Вінницький державний педагогічний університет
імені Михайла Коцюбинського
Інститут математики, фізики і технологічної освіти

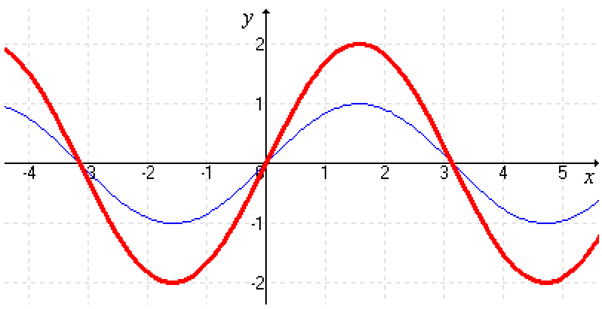
Кафедра математики та інформатики

РОБОЧИЙ ЗОШИТ СТУДЕНТА
з математичного аналізу

I семестр

Вступ в математичний аналіз

(за вимогами кредитно-модульної системи)



Вінниця 2010

Індивідуальний робочий зошит студента

Дисципліна: математичний аналіз

Розділ: Вступ в математичний аналіз

Укладачі: завідувач кафедри математики та інформатики,
кандидат фізико-математичних наук,
доцент **Ковтонюк М. М.**
кандидат фізико-математичних наук,
доцент кафедри математики та інформатики **Бак С. М.**

Рецензенти: кандидат фізико-математичних наук,
доцент **Тимошенко О. З.**

Затверджено і рекомендовано до друку рішенням кафедри математики ВДПУ імені Михайла Коцюбинського, протокол №1 від 30 серпня 2010 року.

Передмова

Робочий зошит з математичного аналізу призначений для використання студентами денної і заочної форм навчання фізико-математичних спеціальностей при вивченні тем “Вступ в математичний аналіз”, „Границя числової послідовності” та „Границя функції у точці” в умовах кредитно-модульного навчання.

У **Робочому** зошиті подано робочий план студента з вказаних тем, за яким весь загальний обсяг матеріалу поділено на два загальні модулі поточного контролю, які відповідають двом змістовим модулям, наведено розрахунки рейтингових балів за видами поточного контролю, а також за модулями.

Кожен модуль складається з практичних занять з добіркою типових завдань для аудиторного і самостійного опрацювання та тексти самостійних робіт.

Після кожного модуля подано зразок контрольної роботи або тестового завдання із типовими завданнями. Для допомоги у виконанні самостійної роботи в зошиті подано список рекомендованої літератури і шкалу оцінювання знань згідно з ECTS.

1. Робочий план студента.

Робочий план студента складений на основі навчальної програми з математичного аналізу, затвердженої Вченою радою Вінницького державного педагогічного університету імені Михайла Коцюбинського, протокол №5 від 28.10.2009р.

Таблиця 1. Розподіл годин

№	Назви теоретичних блоків	Кількість кредитів	Кількість годин				
			всього	аудиторних	лекційних	практичних	самостійна робота
Модуль 1							
1.	Вступ до аналізу. Границя числової послідовності		**72**	**36**	**18**	**18**	**36**
Всього:		**2**	**72**	**36**	**18**	**18**	**36**
Модуль 2							
1.	Границя функції у точці		**54**	**32**	**16**	**16**	**22**
Всього:		**1,5**	**54**	**32**	**16**	**16**	**22**
Всього за семестр:		**3,5**	**126**	**68**	**34**	**34**	**58**

Таблиця 2. Шкала оцінювання

За шкалою університету	За державною (національною) шкалою	За шкалою ECTS
90—100	Відмінно	**A** (відмінно)
82—89	Добре	**B** (дуже добре)
75—81		**C** (добре)
67—74	Задовільно	**D** (задовільно)
60—66		**E** (достатньо)
35—59	Незадовільно	**FX** (незадовільно з можливістю повторного складання)
1—34		**F** (незадовільно з обов’язковим повторним курсом

Таблиця 1. Розподіл рейтингових балів за видами діяльності

№	Вид діяльності	Коефіцієнт вартості (бали)	Кількість робіт	Результат (бали)
1.	Лекційні заняття	1	17	17
2.	Практичні заняття	1	17	17
3.	Домашні завдання	1	15	15
4.	Конспект (1-й модуль/2-й модуль)	9/13	2	22
5.	Самостійні роботи (на практичних заняттях)	35	2	70
6.	Контрольна робота	70	2	140
7.	Колоквіум	60	2	120
Всього за 1-й семестр:				**400 (80%)**
Творча робота				**100 (20%)**
Підсумковий рейтинговий бал				**500 (100%)**
Нормований рейтинговий бал				**100**

Таблиця 2. Розподіл рейтингових балів за модулями

№	Назви теоретичних блоків	Кількість балів							
		лекц. заняття	практ. заняття	конспект	домаш. роботи	СР	колок-віум	КР	всього
	Модуль 1	**9**	**9**	**9**	**8**	**35**	**60**	**70**	**200**
1.	Змістовий модуль 1. *Вступ до аналізу. Границя числової послідовності*	9	9	9	8	35	60	70	200
	Модуль 2	**8**	**8**	**13**	**6**	**35**	**60**	**70**	**200**
	Змістовий модуль 2. *Границя функції у точці*	8	8	13	6	35	60	70	200
	Творча робота							100	**100**
	Підсумковий рейтинговий бал								**500**
	Нормований рейтинговий бал								**100**

МОДУЛЬ 1.

🕮 Практичне заняття №1

Тема: Множини. Дійсні числа

✍**1.** *Задайте переліком елементів множини:*

1.1. B – множину коренів рівняння $x^4 - 4x^2 = 0$;

1.2. $H = \left\{x : (x-2)(x+2) = 0\right\}$;

1.3. A – множину натуральних чисел, кратних 3 і менших за 25;

1.4. C – множину коренів рівняння $x^2 - 5x + 6 = 0$;

1.5. $D = \left\{x : x^2 - 3x + 2 = 0\right\}$;

1.6. $E = \left\{2n+1 : n \in \mathbb{N} \ i \ n \le 20\right\}$;

1.7. $F = \left\{x : x^2 - 2x + 2 = 0\right\}$.

Відповідь: 1) $\left\{-2, 0, 2\right\}$; 2) $\left\{-2; 2\right\}$; 3) $\left\{3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24\right\}$; 4) $\left\{2; 3\right\}$; 5) $\left\{1; 2\right\}$; 6) $\left\{3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19\right\}$; 7) $\varnothing$.

✍**2.** *Дано множини* $A = \left\{a, b, c, 1, 3\right\}$, $B = \left\{b, d, 6, 3\right\}$, $C = \left\{b, 1, 6\right\}$. *Знайти:*

а) $A \cap B$; б) $A \cap C$; в) $C \cap B$; г) $A \cap B \cap C$.

✍**3.** *Дано:* $A = \left\{x : x^2 - 5x + 6 = 0\right\}$, $B = \left\{x : x^2 - 3x + 2 = 0\right\}$. *Знайти:* $A \cap B$. *Відповідь:* $\left\{2\right\}$.

✍**4.** *Дано:* $A = \left\{1, 3, 5, 7\right\}$, $B = \left\{1, 5, 7, 9\right\}$, $C = \left\{2, 4\right\}$. *Знайти:*

4.1. $A \cup B$; 4.2. $A \cup C$; 4.3. $C \cup B$; 4.4. $A \cup B \cup C$.

✍**5.** *Дано:* $A = \left\{x : x^2 - 4x + 3 = 0\right\}$, $B = \left\{x : x^2 - 7x + 12 = 0\right\}$. *Знайти:* $A \cup B$. *Відповідь:* $\left\{1, 3, 4\right\}$.

✍**6.** *Дано:* $M = \left\{a, b, c, d\right\}$, $N = \left\{b, d\right\}$. *Знайти:*

6.1. $M \setminus N$; 6.2. $N \setminus M$; 6.3. $\left(M \setminus N\right) \cup \left(N \setminus M\right)$.

✍**7.** *Для даних множин A і B знайти $A \cup B$ та $A \cap B$:*

7.1. $A = [0; 5], B = (1; 6)$; 7.2. $A = (-1; 0], B = [0; 2)$;

7.3. $A = (-\infty; 0), B = [0; 6)$; 7.4. $A = (-1; 0), B = [0; 9)$.

✍**8.** *Для даних множин A, B, C знайти $A \cap B \cap C$ та $A \cup B \cup C$:*

8.1. $A = [-2; 2], B = (-\infty; 0), C = [0; 5)$;

8.2. $A = (-5; 8), B = (-2; 10), C = (0; 13)$;

8.3. $A=(2;10),\ B=(3;9),\ C=(4;8)$;

8.4. $A=(-\infty;4],\ B=[4;+\infty),\ C=(0;4)$.

✍**9.** *Задайте переліком елементів множини:*

9.1. $A=\left\{x\in\mathbb{R}: x+\dfrac{1}{x}\le 2\ i\ x>0\right\}$;

9.2. $B=\left\{x\in\mathbb{Z}: \dfrac{1}{4}\le 2^x<5\right\}$;

9.3. $C=\left\{x\in\mathbb{R}: \sin x+\cos x=1\ i\ 0\le x\le\dfrac{\pi}{2}\right\}$;

9.4. $B=\left\{x\in\mathbb{Z}: \dfrac{1}{9}\le 3^x<10\right\}$;

9.5. $C=\left\{x\in\mathbb{R}: \sin^2 2x=1\ i\ 0<x<\pi\right\}$;

9.6. $C=\left\{x\in\mathbb{R}: \sin x+\cos x=\sqrt{2}\ i\ 0<x<\dfrac{\pi}{2}\right\}$.

Відповідь: 1) $\{1\}$; 2) $\{-2,-1,0,1,2\}$; 3) $\{0;\pi/2\}$; 6) $\{0;\pi/4\}$.

✍**10.** *Зобразити на координатній площині такі множини:*

10.1. $A=\left\{(x;y)\in\mathbb{R}^2: x-y=1\right\}$;

10.2. $B=\left\{(x;y)\in\mathbb{R}^2: x^2+y^2=1\right\}$;

10.3. $C=\left\{(x;y)\in\mathbb{R}^2: (x-y)(x+y)=0\right\}$;

10.4. $D=\left\{(x;y)\in\mathbb{R}^2: y>x^2\right\}$;

10.5. $E=\left\{(x;y)\in\mathbb{R}^2: x^2+y^2\le 9\right\}$;

10.6. $F=\left\{(x;y)\in\mathbb{R}^2: xy\ge 1\right\}$;

10.7. $B=\left\{(x;y)\in\mathbb{R}^2: |x|+|y|\le 1\right\}$;

10.8. $B=\left\{(x;y)\in\mathbb{R}^2: y<\sqrt{x}\right\}$;

10.9. $B=\left\{(x;y)\in\mathbb{R}^2: x^2+(y+1)^2<4\right\}$;

10.10. $B=\left\{(x;y)\in\mathbb{R}^2: y<2^{x-1}+1\right\}$.

✍**11.** *Знайти об'єднання, переріз та різницю множин A і B:*

11.1. $A=\{x\in\mathbb{R}: 0<x<2\},\ B=\{x\in\mathbb{R}: 1\le x\le 3\}$;

11.2. $A=\left\{x\in\mathbb{R}: x^2-2x>0\right\},\ B=\left\{x\in\mathbb{R}: x^2-4x+3>0\right\}$;

11.3. $A=\left\{x\in\mathbb{R}:\dfrac{x^2-5x+6}{x-4}<0\right\},\ B=\left\{x\in\mathbb{R}:\dfrac{x-1}{x+2}\le 0\right\};$

11.4. $A=\left\{x\in\mathbb{R}:\sqrt{x+2}>x\right\},\ B=\left\{x\in\mathbb{R}:\dfrac{1}{\sqrt{x+2}}<\dfrac{1}{x}\right\};$

11.5. $A=\left\{x\in\mathbb{R}:\sin>\dfrac{1}{2}\right\},\ B=\left\{x\in\mathbb{R}:\cos x\le\dfrac{1}{2}\right\};$

11.6. $A=\left\{x\in\mathbb{R}:2^{2x}-6\cdot 2^{x}+8\ge 0\right\},\ B=\left\{x\in\mathbb{R}:\log_{\frac{1}{2}}(x-1{,}5)>1\right\}.$

Відповідь: 1) $A\bigcup B=(0;\,3],\ A\bigcap B=[1;\,2),\ A\setminus B=(0;\,1)$; 2) $A\bigcup B=$ $=(-\infty;\,1)\bigcup(2;\,+\infty),\ A\bigcap B=(-\infty;\,0)\bigcup(3;\,+\infty),\ A\setminus B=(2;\,3)$; 3) $A\bigcup B=$ $=(-\infty;\,2)\bigcup(3;\,4),\ A\bigcap B=(-2;\,1],\ A\setminus B=(-\infty;\,-2]\bigcup(1;\,2)\bigcup(3;4)$

✍**12.** *Напишіть множину нижніх і множину верхніх меж для множин:*

12.1 $X=(-2;2)$,

12.2 $X=[3;+\infty)$

12.3 $X=(-5;3]$,

12.4 $X=Q^{+}$,

12.5 $X=\left\{\dfrac{2}{3n},\ n\in\mathbb{N}\right\}$,

12.6 $X=\left\{\sin\dfrac{\pi}{n},\ n\in\mathbb{N}\right\}$.

✍**13.** *Знайдіть точну нижню межу множин:*

13.1 $X=[3;6)$,

13.2 $X=\left\{\dfrac{n}{n+1},\ n\in\mathbb{N}\right\}$

✍**14.** *Знайдіть точну верхню межу множин:*

14.1 $X=\left\{-\dfrac{n}{2n+1},n\in\mathbb{N}\right\}$,

13.2 $X=\left\{E(f),\ \text{де }f(x)=6\cos 3x\right\}$

✍**15.** *Знайдіть множину верхніх і нижніх меж множини розв'язків нерівності* $\log_4\dfrac{9-2x}{x+2}<0$.

✍**16.** *Знайдіть точні верхню і нижню межі множини розв'язків нерівності* $\log_8\left(1-\dfrac{1}{x}\right)+\log_{\frac{1}{8}}\left(1-\dfrac{x}{6}\right)\le 1$.

✍**17.** *Знайдіть множину таких значень параметра a, при яких відношення дискримінанта рівняння* $ax^2-3x+1=0$ *до квадрата* *різниці його коренів буде менше, ніж точна верхня межа множини* $X=\left\{\frac{11}{10n+1},\ n\in\mathbb{N}\right\}$.

✍**18.** *Знайдіть всі значення параметра* a, *при яких кожний розв'язок нерівності* $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2(x-1)^2}}\le\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{(3-x)^2}}$ *є точною нижньою межею області визначення функції* $y=\lg\left(9-19a^2x^2\right)$.

✍**19.** *Виконайте дії та запишіть у вигляді нескінченного десяткового дробу:*

19.1. $\frac{1}{3}+\frac{2}{7}$; 19.4. $-\frac{5}{6}\cdot(-0,4)$; 19.7. $\frac{229}{54}$;

19.2. $\frac{2}{3}-0,17$; 19.5. $-\frac{29}{11}$; 19.8. $\frac{5}{33}$;

19.3. $\frac{4}{7}+0,3$; 19.6. $\frac{37}{13}$; 19.9. $\frac{223}{111}$.

✍**20.** *Подайте у вигляді звичайного дробу:*

20.1. $0,(2)$; 20.4. $0,(37)$; 20.7. $1,2(3)$;

20.2. $0,(7)$; 20.5. $-1,(0011)$; 20.8. $2,1(32)$;

20.3. $0,(23)$; 20.6. $0,(309)$; 20.9. $0,01(98)$.

✍**21.** *Обчислити і результати записати у вигляді звичайного дробу:*

21.1. $\frac{0,1(2)+0,3(4)}{0,4(5)-0,2(3)}$; 21.2. $\frac{0,70(14)}{0,00(62)}$.

Відповідь: 1) 2; 2) 112.

✍**22.** *Які з даних чисел раціональні, а які – ірраціональні:*

22.1. $\dfrac{\sqrt{6,3\cdot1,7}\cdot\left(\sqrt{\frac{6,3}{1,7}}-\sqrt{\frac{1,7}{6,3}}\right)}{\sqrt{(6,3+1,7)^2-4\cdot6,3\cdot1,7}}$;

22.2. $\sqrt{9-4\sqrt{5}}+\sqrt{14-6\sqrt{5}}$;

22.3. $\sqrt{11-4\sqrt{7}}+\sqrt{16-6\sqrt{7}}$;

22.4. $\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{4-2\sqrt{3}}+\sqrt{3+2\sqrt{2}}\right)$;

22.5. $\sqrt{\sqrt{5}-\sqrt{3-\sqrt{29-12\sqrt{5}}}}$;

22.6. $\dfrac{\sqrt{17+12\sqrt{2}}-1}{\sqrt{2}+1}$;

22.7. $\left(4+\sqrt{15}\right)\left(\sqrt{10}-\sqrt{6}\right)\sqrt{4-\sqrt{15}}$;

22.8. $\sqrt[3]{99-70\sqrt{2}}\cdot\sqrt{17+12\sqrt{2}}$;

22.9. $\dfrac{\sqrt{4-2\sqrt{3}}\cdot\sqrt[3]{19\sqrt{7}-50}}{\left(\sqrt{7}-2\right)\left(1-\sqrt{3}\right)}$;

22.10. $\dfrac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{2+\sqrt{3}}}+\dfrac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{2-\sqrt{3}}}$.

Відповідь: 2) 1; 3) 1; 4) 1; 5) 1; 6) 2; 7) 2; 8) 1.

✍**23.** *Доведіть, що вказані числа є ірраціональними:*

23.1 $0{,}2020020002...$, де між сусідніми двійками на n-му місці стоїть n нулів,

23.2 $\sqrt{13}$,

23.3 $\sqrt[3]{6}$,

23.4 $\lg 5$,

23.5 $\sin 10^0$.

✍**24.** *Якими числами є розв'язки рівняння:*

24.1 $\left|x-\sqrt{5}\right|+\left|2x+\sqrt{5}\right|=6$, 24.2 $\sqrt{x^2-2\sqrt{2}x+2}+\sqrt{4x^2+4\sqrt{2}x+2}=1$

✍**25.** *Вказати два ірраціональних числа, різниця (добуток) яких є раціональним числом.*

✍**26.** *Нехай α і β – ірраціональні числа, а $\alpha+\beta$ – раціональне число. Довести, що числа $\alpha-\beta$ і $\alpha+2\beta$ – ірраціональні.*

✍**27.** *Нехай α і β – ірраціональні числа, а r – раціональне число. Які з чисел можуть бути раціональними:*

27.1. $\alpha+\beta$;

27.2. $\alpha+r$;

27.3. $\sqrt{\alpha}$;

27.4. $\sqrt{r}$;

27.5. $\alpha\beta$;

27.6. αr;

27.7. $\sqrt{\alpha+r}$;

27.8. $\sqrt{\alpha+\sqrt{\beta}}$;

27.9. $\sqrt{\alpha+\sqrt{r}}$;

27.10. $\sqrt{r+\sqrt{\alpha}}$.

Відповідь: 1), 4), 5), 8), 9).

✍**28.** *Довести, що не існує раціонального числа* r *такого, що:*

28.1. $r^2 = 5;$

28.2. $r^3 = 7;$

28.3. $r^2 + 3r + 1 = 0;$

28.4. $r^3 - 7r + 1 = 0.$

✍**29.** *Розташувати в порядку зростання числа:*

29.1. $2{,}732;\ -2{,}73;\ \sqrt{3};\ 2{,}73;\ -1{,}732;\ \sqrt{3}+1;\ 2{,}73205;\ \sqrt{3}-1;$

29.2. $-1{,}23;\ -\sqrt{5};\ 1{,}236;\ -\sqrt{5}+1;\ 0;\ -1{,}23606;\ -\sqrt{5}-1;\ 0{,}23606;$

29.4. $0;\ \sqrt{0{,}8};\ 1{,}2;\ \dfrac{11}{30};\ 0{,}91846;$

29.5. $1;\ \dfrac{61}{59};\ 0{,}37;\ \dfrac{65}{63};\ tg33^0;\ tg\left(-314^0\right);$

29.6. $0{,}02;\ 1;\ 0{,}85;\ \dfrac{\sqrt{3}}{2};\ \sqrt{0{,}762};\ -\cos 571^0.$

🕮 Практичне заняття №2

Тема: Модуль дійсного числа

✍**1.** *Відмітьте на числовій прямій точки, для координат яких виконуються наступні співвідношення:*

1.1. $|x| = 2;$

1.2. $|x| = 5;$

1.3. $|x-2| = 1;$

1.4. $|x| = -1;$

1.5. $|x| \ge 0;$

1.6. $|x| = x;$

1.7. $|x| = -x;$

1.8. $|x-2| = x-2;$

1.9. $|x-2| = 2-x;$

1.10. $\left|x^2\right| = 4;$

1.11. $|2-x| = x-2;$

1.12. $|x+1| = 0;$

1.13. $|5-4x| = 0;$

1.14. $|x| + 1 = 12;$

1.15. $\left||x| + 1998\right| = 8;$

1.16. $|-x| + 2 = 3;$

1.17. $|x| > 0;$

1.18. $|-x| \le 0;$

1.19. $|2-x| \le 0;$

1.20. $|-x| \ge x;$

1.21. $|-x| \ge x;$

1.22. $|x| > x.$

Відповідь: 1) ± 2; 2) ± 5; 3) $\{3;1\}$; 4) $\varnothing$; 5) $(-\infty;+\infty)$; 6) $[0;+\infty)$; 7) 0; 8) $[2;+\infty)$; 9) $(-\infty;2]$; 10) ± 2; 11) 2; 12) -1; 13) $\dfrac{5}{4}$; 14) ± 11; 15) $\varnothing$;

16) ± 1; 17) $(-\infty;0)\cup(0;+\infty)$; 18) 0; 19) 2; 20) $(-\infty;-3)\cup(-3;+\infty)$; 21) $(-\infty;+\infty)$; 22) $(-\infty;0)$.

✍**2.** *Розв'язати рівняння:*

2.1. $|x+1|=4$;

2.2. $|x-1|=2$;

2.3. $|1-x|=3$;

2.4. $|2x-4|=3$;

2.5. $|x+1|=-4$;

2.6. $|5-4x|=4$;

2.7. $|-x-2|=1$;

2.8. $|3x-2|=11$;

2.9. $|-5x-10|=5$;

2.10. $|x+2|=-2-x$;

2.11. $\dfrac{|x+2|}{x+2}=1$;

2.12. $\dfrac{|2-x|}{2x-4}=\dfrac{1}{2}$;

2.13. $|x+1|=x-1$;

2.14. $|x+1|=2x+1$;

2.15. $|2x+1|=x$;

2.16. $|2-x|=2x-10$;

2.17. $|2-x|=2x+10$;

2.18. $|2-2x|=4x+6$;

2.19. $|x-2|=2x-4$;

2.20. $|5-3x|=2x$;

2.21. $|4-x^2|=12$;

2.22. $|3x^2-2|=7$.

Відповідь: 1) $\{3;-5\}$; 2) $\{3;-1\}$; 3) $\{4;-2\}$; 4) $\{3,5;0,5\}$; 5) $\varnothing$; 6) $\{2,25;0,25\}$; 7) $\{-1;3\}$; 8) $\left\{-3;4\frac{1}{3}\right\}$; 9) $\{-1;-3\}$; 10) $(-\infty;-2]$; 11) $(-2;+\infty)$; 12) $(2;+\infty)$; 13) $\varnothing$; 14) 0; 15) $\varnothing$; 16) 8; 17) $-\frac{8}{3}$; 18) $-\frac{2}{3}$; 19) 2; 20) $\{1;5\}$; 21) ± 4; 22) $\pm\sqrt{3}$.

✍**3.** *Розв'язати рівняння:*

3.1. $||x^2-4|+2|=1$;

3.2. $||2-x|+1|=1$;

3.3. $||x|+6|=7$;

3.4. $||x|-6|=7$;

3.5. $||x-1|-1|=1$;

3.6. $||x-2|-1|=2$;

3.7. $||3-x|-4|=2$;

3.8. $|6-|x||=1$;

3.9. $||1+2x|+2|=3$;

3.10. $||x^2+1|-1|=-4+4x$;

3.11. $|-4-|-2x-2||=1$;

3.12. $|5-|2-3x||=x-1$;

3.13. $|5+|1-2x||=10$;

3.14. $|3-2|x||=-2-x$;

3.15. $|x-|4-x||+2x=4$;

3.16. $||3x-3|-6|=1$;

3.17. $||4x|-2x|=2$;

3.18. $|5-2|x||=x-1$;

3.19. $|-4-|2x-2||=1$;

3.20. $|x^2-2|x|+1|=1$.

Відповідь: 1) Ø; 2) 2; 3) ±1; 4) ±13; 5) $\{\pm1;\,3\}$; 6) $\{-1;\,5\}$; 7) $\{-3;\,9;\,5;\,1\}$; 8) $\{\pm5;\,\pm7\}$; 9) $\{0;\,-1\}$; 10) 2; 11) Ø; 12) $\{2;\,3\}$; 13) $\{-2;\,3\}$; 14) $-2{,}5$; 15) $(-\infty;\,2]$; 16) $\left\{-1\frac{1}{3};\,-\frac{2}{3};\,2\frac{2}{3};\,3\frac{1}{3}\right\}$; 17) ±2; 18) $\{2;4\}$; 19) Ø; 20) $\{0;\,\pm2\}$.

✍**4.** *Розв'язати рівняння:*

4.1. $|x+2|+|x|=2$;

4.2. $|x-1|+|x-1|=1$;

4.3. $|2x-1|+|1-2x|=2$;

4.4. $|x-1|+|1-2x|=2$;

4.5. $1+|x-1|=|3-x|$;

4.6. $|x-1|=|3-x|$;

4.7. $|x-3|+|x+2|-|x-4|=3$;

4.8. $|3x-5|=|5-2x|$;

4.9. $|x-1|+|2-x|+|3-x|=2$;

4.10. $|3x-8|+|3x-2|=6$;

4.11. $|x^2-4x+3|+|x^2-4x+6|=1$;

4.12. $|x^2-9|+|x-2|=5$;

4.13. $|x-13|+|6-5x|=7$;

4.14. $|7x-12|+|7x-11|=1$;

4.15. $|x^2-4x|+|x-3|-3=0$;

4.16. $|7x-12|+|7x-11|=4$;

4.17. $|4x-1|=|3x-1|$;

4.18. $|x|-2|x+1|+3|x+2|=0$;

4.19. $\dfrac{|1-x|+|x|-3}{\sqrt{2x-3}}=0$;

4.20. $\dfrac{|x+2|+|1-x|-3}{\sqrt{x-1}}=0$;

4.21. $\dfrac{|x+3|+|x+2|-1}{\sqrt{x+3}}=0$;

4.22. $|x^2-9|+|x^2-4|=1$;

4.23. $|x^2-25|+|x^2-1|=24$;

4.24. $|x^2-4x|+3=x^2+|x-5|$.

Відповідь: 1) $[-2;\,0]$; 2) $[1;\,2]$; 3) $\{0;\,1\}$; 4) $\left\{0;\,\frac{4}{3}\right\}$; 5) $\frac{3}{2}$; 6) 2; 7) $\{-2;\,6\}$; 8) $\{0;\,2\}$; 9) 2; 10) $\left[\frac{2}{3};\,\frac{8}{3}\right]$; 11) Ø; Вказівка. Зробити заміну $x^2-4x=t$; 12) $\left\{-3;\,\frac{-1+\sqrt{65}}{2}\right\}$; 13) Ø; 14) $\left[\frac{11}{7};\,\frac{12}{7}\right]$;

15) $\left\{0;\,3;\,\dfrac{3+\sqrt{33}}{2}\right\}$; 16) $\{13{,}5;\,9{,}5\}$; 17) $\left\{0;\,\dfrac{2}{7}\right\}$; 18) -2; 19) 2; 20) Ø; 21) $(-3;\,-2]$; 22) Ø; Вказівка. Позначити $x^2=t$; 23) $[-5;\,-1)\cup[1;\,5]$; 24) $\left\{-\dfrac{2}{3};\,\dfrac{1}{2};\,2\right\}$.

✍ **5.** *Розв'язати рівняння:*

5.1. $\left|\left||x|+1\right|-2\right|=3$;

5.2. $\left|\left||x-1|+1\right|-1\right|=1$;

5.3. $\left|\left||x|-1\right|-2\right|=3$;

5.4. $\left|\left|1-|x|\right|-2\right|=1$;

5.5. $\left|\left||x-1|-2\right|-1\right|=2$;

5.6. $\left||x-2|-|x|\right|=1$;

5.7. $\left||x-3|-|x+2|\right|=6$;

5.8. $\left||x|-|x+1|=1;\right|$

5.9. $\left||2x-1|-|2x+1|\right|=2$;

5.10. $\left||5-5x|-|5x-1|\right|=3$;

5.11. $\left||4x+1|-|4x+2|\right|=2$;

5.12. $\left||x+3|-|x-2|\right|=|2x+1|$;

5.13. $\left||x-4|-|x+2|\right|=6$;

5.14. $\left||x+3|-|x-3|\right|=|x+3|+|x-3|$;

5.15. $\left||x-8|-|x+1|\right|=|x-8|+|x+1|$.

Відповідь: 1) ±4; 2) $\{0;\,2\}$; 3) ±6; 4) $\{\pm4;\,\pm2;\,0\}$; 5) $\{-4;\,6\}$; 6) $\{0{,}5;\,1{,}5\}$; 7) $-2{,}5$; 8) $(-\infty;\,-1]\cup[0;\,+\infty)$; 9) $\left(-\infty;\,-\dfrac{1}{2}\right]\cup\left[\dfrac{1}{2};\,+\infty\right)$; 10) $\{0{,}3;\,0{,}9\}$; 11) Ø; 12) $[-3;\,2]$; 13) $[-2;\,4]$; 14) ±3; 15) $\{-1;\,8\}$.

✍ **6.** *Розв'язати нерівність:*

6.1. $|x+1|\ge 2$;

6.2. $|x+1|<2$;

6.3. $|x-3|\le 4$;

6.4. $|x-3|>4$;

6.5. $|x+1|>4$;

6.6. $|x-3|\le 2$;

6.7. $|3x+1|<2$;

6.8. $|5x-2|>1$;

6.9. $|-2x-1|\ge 5$;

6.10. $|3x-1|\ge 1$;

6.11. $|2-5x|\le 1$;

6.12. $|2x-1|<3$;

6.13. $|-4x+2|\ge 2$;

6.14. $|3x-5|\ge 10$;

6.15. $|2x-7|\le 5$;

6.16. $|5-x|>\dfrac{1}{2}$.

Відповідь: 1) $(-\infty;\,-5]\cup[3;\,+\infty)$; 2) $(-3;1)$; 3) $[-1;\,7]$;

4) $(-\infty;-1)\cup(7;+\infty)$; 5) $(-\infty;-5)\cup(3;+\infty)$; 6) $[1;5]$; 7) $\left(-1;\frac{1}{3}\right)$;

8) $\left(-\infty;\frac{1}{5}\right)\cup\left(\frac{3}{5};+\infty\right)$; 9) $(-\infty;-2]\cup(3;+\infty)$; 10) $(-\infty;0]\cup\left[\frac{2}{3};+\infty\right)$;

11) $\left[\frac{1}{5};\frac{3}{5}\right]$; 12) $(-1;2)$; 13) $(-\infty;0]\cup[1;+\infty)$; 14) $(-\infty;-5/3]\cup[5;+\infty)$;

15) $[1;6]$; 16) $\left(-\infty;\frac{9}{2}\right)\cup\left(\frac{11}{2};+\infty\right)$.

✍ ***7.*** *Розв'язати нерівність:*

7.1. $||x+2|-2|\le 1$;

7.2. $||3-x|-4|>2$;

7.3. $||2-x|-1|>1$;

7.4. $||5+x|-3|<4$;

7.5. $||2x+1|-1|\ge 1$;

7.6. $||3x-1|-4|>2$;

7.7. $||4-x|-1|\le 2$;

7.8. $||4-2x|-2|\ge 1$;

7.9. $||x|-1|\le x+1$;

7.10. $||3x-3||<x+3$;

7.11. $||x-1|-3|>x+2$;

7.12. $||2x+1|-1|<x$;

7.13. $||2x+1|-1|\ge x$;

7.14. $||2x-2|-3|<4+x$;

7.15. $||2x-2|-3|\ge -4$;

7.16. $||2x-4|-1|\ge 2x$;

7.17. $||x+3|-2|>2x+1$;

7.18. $||x-3|-2|<2x+1$;

7.19. $|x^2-3|\ge 3x+1$;

7.20. $||x^2-x+1|-1|>x-1$.

Відповідь: 1) $[-5;-3)\cup[-1;1]$; 2) $(-\infty;-3)\cup(1;5)\cup(9;+\infty)$;

3) $(-\infty;0)\cup(4;+\infty)$; 4) $(-12;2)$; 5) $\left(-\infty;-\frac{3}{2}\right]\cup\left\{-\frac{1}{2}\right\}\cup\left[\frac{1}{2};+\infty\right)$;

6) $\left(-\infty;-\frac{5}{3}\right]\cup\left(-\frac{1}{3};1\right)\cup(3{,}5;+\infty)$; 7) $[1;7]$;

8) $\left(-\infty;\frac{1}{2}\right]\cup\left[\frac{3}{2};\frac{5}{2}\right]\cup\left[\frac{7}{2};+\infty\right)$; 9) $[-1;+\infty)$; 10) $(-3;0)\cup(3;+\infty)$;

11) $(-\infty;-2)$; 12) $\varnothing$; 13) $x\in\mathbb{R}$; 14) $(-2;9)$; 15) $x\in\mathbb{R}$; 16) $\left(-\infty;\frac{3}{4}\right]$;

17) $(-\infty;0)$; 18) $(0;+\infty)$; 19) $\left(-\infty;\frac{-3+\sqrt{17}}{2}\right]\cup[4;+\infty)$; 20) $(2;5)$;

21) $x \in \mathbb{R}$.

✍**8.** *Розв'язати нерівність:*

8.1. $|x| + |1 - x| \geq 0$;

8.2. $|x| + |x - 1| \geq 0,5$;

8.3. $|-x| + |1 - x| \leq 1$;

8.4. $|x| + |x - 1| \leq 2$;

8.5. $|x| + |x - 1| \geq 1$;

8.6. $|x| + |x - 1| > 1$;

8.7. $|x^2| \leq |x|$;

8.8. $|x + 1| + |x - 2| \leq 3$;

8.9. $|x - 1| + |x - 3| > 5$;

8.10. $|x - 2| + |3 - x| \leq 4$;

8.11. $|2x - 1| + |2x - 2| \geq 1$;

8.12. $|2x + 5| + |-2x - 3| \leq 1$;

8.13. $|2x - 1| + |2x + 1| > 2$;

8.14. $2|x| \leq 4 + |x + 1|$;

8.15. $|x - 2| \geq |x^2 - 4|$;

8.16. $|x^2 - x - 2| \geq |x^2 - 3x - 4|$;

8.17. $|x^2 + 1| \leq |x - 2|$;

8.18. $|x^2 - 1| \leq x + 2$;

8.19. $|x^2 - 4| \leq x - 2$;

8.20. $|x^2 - 1| \geq x - 1$;

8.21. $|x^2 - 4| > |x + 2|$;

8.22. $|x^2 - 9| > x + 3$;

8.23. $|x^2 - 9| + |x - 2| \geq 5$;

8.24. $|x - 3| + |x - 1| \geq |2x - 4|$;

8.25. $|x - 2| + |3 - x| \geq 1$.

Відповідь: 1) $x \in \mathbb{R}$; 2) $x \in \mathbb{R}$; 3) $[0;\ 1]$; 4) $[-0,5;\ 1,5]$; 5) $x \in \mathbb{R}$; 6) $(-\infty;\ 0) \cup (1;\ +\infty)$; 7) $[-1;\ 1]$; 8) $[-1;\ 2]$; 9) $(-\infty; -0,5) \cup (4,5;\ +\infty)$; 10) $[1;\ 4]$; 11) $x \in \mathbb{R}$; 12) $\varnothing$; 13) $\left(-\infty;\ -\dfrac{1}{2}\right) \cup \left(\dfrac{1}{2};\ +\infty\right)$; 14) $[-3;\ 5]$; 15) $\{2\} \cup [-3;\ -1]$; 16) $\{1\} \cup [3;\ +\infty)$; 17) $\left[\dfrac{1-\sqrt{5}}{2};\ \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right]$; 18) $\left[\dfrac{1-\sqrt{13}}{2};\ \dfrac{1+\sqrt{13}}{2}\right]$; 19) 2; 20) $x \in \mathbb{R}$; 21) $(-\infty;\ -2) \cup (-2;\ 1] \cup$ $\cup [3;\ +\infty)$; 22) $(-\infty;\ -3) \cup (4;\ +\infty)$; 23) $(-\infty;\ 2] \cup \left[\dfrac{-1+\sqrt{65}}{2};\ +\infty\right)$; 24) $x \in \mathbb{R}$; 25) $x \in \mathbb{R}$.

✍**9.** *Розв'язати нерівність:*

9.1. $|||1+5x|-1|-|x|| \le -1;$

9.2. $|||4+3x|+5|-7| < 2;$

9.3. $|||3x-4|-5|-6| \ge -1;$

9.4. $|||2x-4|-2|+367| > 100;$

9.5. $||x-2|-|x|| \le 1;$

9.6. $||x-3|-|x+2|| > 6;$

9.7. $||x|-|x+1|| \ge 1;$

9.8. $||2x-1|-|2x+1|| < 2;$

9.9. $||4x+1|-|4x+2|| \ge 2;$

9.10. $\dfrac{x^2-|x|-12}{x-3} \ge 2x;$

9.11. $|x^3-1| > 1-x;$

9.12. $|x-6| > |x^2-5x+9|.$

Відповідь: 1) $\varnothing$; 2) $\left(-\dfrac{8}{3}; -\dfrac{4}{3}\right) \bigcup \left(-\dfrac{4}{3}; 0\right)$; 3) $x \in \mathbb{R}$; 4) $x \in \mathbb{R}$;

5) $[0{,}5; 1{,}5]$; 6) $\varnothing$; 7) $(-\infty; -1] \cup [0; +\infty)$; 8) $\left[-\dfrac{1}{2}; \dfrac{1}{2}\right]$; 9) $\varnothing$;

10) $(-\infty; 3)$; 11) $(-\infty; -1) \cup (0; 1) \cup (1; 2)$; 12) $(1; 3)$.

✍**10.** *Побудувати графіки функцій:*

10.1. $y = |x-1|;$

10.2. $y = |2x-3|;$

10.3. $y = |x| - x;$

10.4. $y = x + 1 + |x+1|;$

10.5. $y = |x|(x+2);$

10.6. $y = \dfrac{x}{|x|};$

10.7. $y = \dfrac{x^2-1}{|x|+1};$

10.8. $y = \dfrac{x}{|x|}(x^2-1);$

10.9. $y = \dfrac{x^2-x-2}{|x-2|};$

10.10. $y = \dfrac{|x-|x||}{x};$

10.11. $y = x^2 - 2|x|;$

10.12. $y = |x^2-5x+6|;$

10.13. $y = |x-1| + |x+1|;$

10.14. $y = |x-2| + |2x-1|;$

10.15. $y = |x+1| + |2x+3| - x;$

10.16. $y = x\left(|x-2| + |x+1|\right);$

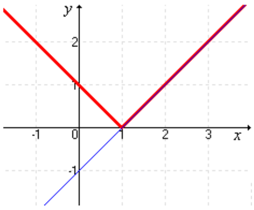
10.17. $y = |x^2 - 2|x| - 3|;$

10.18. $y = |x^2 - 2|x|| + 1;$

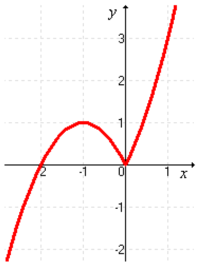
10.19. $y = (x+1)^2 + |x+1| - 2;$

10.20. $y = |4 - 2|x||.$

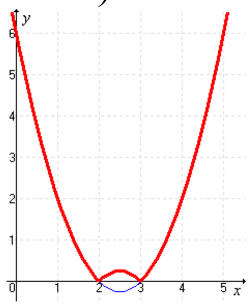
Відповідь: 1)



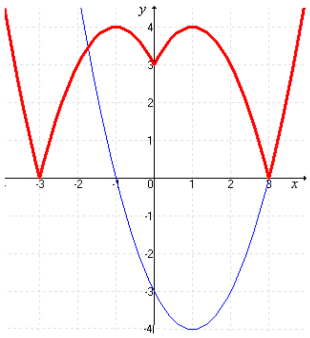
5)



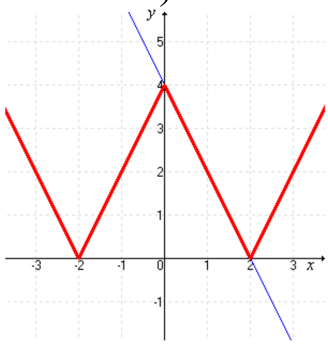
12)



17)



20)



Розглянемо, як можна оцінити похибку, яка виникає при виконанні арифметичних операцій над величинами.

Означення. *Якщо* a *– точне значення деякої величини, а* $\tilde{a}$ *– відоме наближене значення цієї величини, то числа*

$$\Delta(\tilde{a}) := |a - \tilde{a}|, \tag{1}$$

$$\delta(\tilde{a}) := \frac{\Delta(\tilde{a})}{|\tilde{a}|} \tag{2}$$

називаються відповідно ***абсолютною*** *і* ***відносною похибками*** *наближеного значення* $\tilde{a}$.

З формули (1) випливає, що $a = \tilde{a} \pm \Delta(\tilde{a})$. Цей запис означає, що

$$\boxed{\tilde{a} - \Delta(\tilde{a}) \le a \le \tilde{a} + \Delta(\tilde{a}).}$$

Теорема. *Якщо* $|a - \tilde{a}| = \Delta(\tilde{a})$, $|b - \tilde{b}| = \Delta(\tilde{b})$, то

$$\boxed{\Delta(\tilde{a} + \tilde{b}) := |(a + b) - (\tilde{a} + \tilde{b})| \le \Delta(\tilde{a}) + \Delta(\tilde{b}),} \tag{3}$$

$$\boxed{\Delta(\tilde{a} \cdot \tilde{b}) := |a \cdot b - \tilde{a} \cdot \tilde{b}| \le |\tilde{a}| \cdot \Delta(\tilde{b}) + |\tilde{b}| \cdot \Delta(\tilde{a}) + \Delta(\tilde{a}) \cdot \Delta(\tilde{b})} \tag{4}$$

і якщо $b \ne 0, \tilde{b} \ne 0, \delta(\tilde{b}) = \dfrac{\Delta(\tilde{b})}{|\tilde{b}|} < 1$, *то*

$$\boxed{\Delta\left(\frac{\tilde{a}}{\tilde{b}}\right) := \left|\frac{a}{b} - \frac{\tilde{a}}{\tilde{b}}\right| \le \frac{|\tilde{a}| \cdot \Delta(\tilde{b}) + |\tilde{b}| \cdot \Delta(\tilde{a})}{\tilde{b}^2} \cdot \frac{1}{1 - \delta(\tilde{b})}.} \tag{5}$$

Доведення. Нехай $a = \tilde{a} + \alpha, b = \tilde{b} + \beta$, тоді

$$\Delta\left(\tilde{a} + \tilde{b}\right) = \left|(a+b) - \left(\tilde{a} + \tilde{b}\right)\right| \le |\alpha + \beta| \le |\alpha| + |\beta| = \Delta(\tilde{a}) + \Delta\left(\tilde{b}\right),$$

$$\Delta\left(\tilde{a} \cdot \tilde{b}\right) = \left|a \cdot b - \tilde{a} \cdot \tilde{b}\right| = \left|(\tilde{a} + \alpha)\left(\tilde{b} + \beta\right) - \tilde{a} \cdot \tilde{b}\right| = \left|\tilde{a}\beta + \tilde{b}\alpha + \alpha\beta\right| \le$$

$$\le |\tilde{a}| \cdot \Delta\left(\tilde{b}\right) + \left|\tilde{b}\right| \cdot \Delta(\tilde{a}) + \Delta(\tilde{a}) \cdot \Delta\left(\tilde{b}\right),$$

$$\Delta\left(\frac{\tilde{a}}{\tilde{b}}\right) := \left|\frac{a}{b} - \frac{\tilde{a}}{\tilde{b}}\right| = \left|\frac{a\tilde{b} - \tilde{a}b}{b\tilde{b}}\right| = \left|\frac{(\tilde{a} + \alpha)\tilde{b} - \tilde{a}\left(\tilde{b} + \beta\right)}{\tilde{b}^2}\right| \cdot \left|\frac{1}{1 + \frac{\beta}{\tilde{b}}}\right| \le$$

$$\le \frac{|\tilde{a}| \cdot |\beta| + \left|\tilde{b}\right| \cdot |\alpha|}{\tilde{b}^2} \cdot \frac{1}{1 - \delta\left(\tilde{b}\right)} = \frac{|\tilde{a}| \cdot \Delta\left(\tilde{b}\right) + \left|\tilde{b}\right| \cdot \Delta(\tilde{a})}{\tilde{b}^2} \cdot \frac{1}{1 - \delta\left(\tilde{b}\right)}.$$

Що й треба було довести. ■

З отриманих оцінок абсолютних похибок випливають оцінки відносних похибок:

$$\boxed{\delta\left(\tilde{a} + \tilde{b}\right) \le \frac{\Delta(\tilde{a}) + \Delta\left(\tilde{b}\right)}{\left|\tilde{a} + \tilde{b}\right|},} \tag{6}$$

$$\boxed{\delta\left(\tilde{a} \cdot \tilde{b}\right) \le \delta(\tilde{a}) + \delta\left(\tilde{b}\right) + \delta(\tilde{a}) \cdot \delta\left(\tilde{b}\right),} \tag{7}$$

$$\boxed{\delta\left(\frac{\tilde{a}}{\tilde{b}}\right) \le \frac{\delta(\tilde{a}) + \delta\left(\tilde{b}\right)}{1 - \delta\left(\tilde{b}\right)}.} \tag{8}$$

Правило. *Якщо при обчисленні суми* $a+b$*, різниці* $a-b$*, добутку* $a \cdot b$*, частки* $\frac{a}{b}$ *зберігати в десяткових розкладах тільки* m *знаків після коми, то абсолютна похибка:*

а) $a+b$ *або* $a-b$ *не перевищуватиме* $2 \cdot 10^{-m}$;

б) $a \cdot b$ *не перевищуватиме* $|a| \cdot 10^{-m} + |b| \cdot 10^{-m} + 10^{-m}$;

в) $\frac{a}{b}$ *не перевищуватиме* $\frac{2(|a| + |b|) \cdot 10^{-m}}{|b|^2}$*, якщо* $2 \cdot 10^{-m} \le |b|$.

✍*11. Обчислити з точністю до* $0{,}001$:

11.1. $\frac{1}{3}+\frac{4}{7}$;

11.2. $\frac{2}{5}+\sqrt{7}$;

11.3. $\sqrt{3}+\sqrt{5}$;

11.4. $\sqrt{10}-\sqrt{2}$;

11.5. $\frac{\sqrt{2}}{3-\sqrt{2}}$;

11.6. $\frac{2}{3}+\frac{1}{7}-\frac{5}{6}+\frac{3}{17}$;

11.7. $\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{2}{3\cdot 5}+\frac{3}{7\cdot 11}$;

11.8. $22,(41)+10,(132),\ \Delta=2\cdot 10^{-4}$.

🕮 Практичне заняття №3

Тема: Функції дійсної змінної

✍**1.** *Знайти лінійну функцію* $f(x)$, *якщо:*

1.1. $f(-2)=10,\ f(1)=-5$;

1.2. $f(-2)=-5,\ f(2)=-3$;

1.3. $f(-10)=-2,\ f(5)=1$;

1.4. $f(-3)=3,\ f(6)=0$.

Відповідь: 1) $y=-5x$; 2) $y=\frac{x}{5}$; 3) $y=\frac{x}{2}-4$; 4) $y=-\frac{x}{3}+2$.

✍**2.** *Знайти квадратичну функцію* $f(x)$, *якщо:*

2.1. $f(-1)=-1,\ f(3)=-3,\ f(6)=12$;

2.2. $f(-1)=3,\ f(1)=3,\ f(2)=12$;

2.3. $f(-2)=9,\ f(1)=3,\ f(3)=19$;

2.4. $f\left(-\sqrt{2}\right)=-4,\ f(2)=-5,\ f\left(2\sqrt{2}\right)=-7$;

2.5. $f(-3)=-8,\ f(0)=-2,\ f(3)=10$;

2.6. $f(-3)=-11,\ f(0)=10,\ f(2)=-6$.

Відповідь: 1) $y=-\frac{1}{3}x^2$; 2) $y=3x^2$; 3) $y=2x^2+1$; 4) $y=-\frac{1}{2}x^2-3$;

5) $y=\frac{1}{3}x^2+3x-2$; 6) $y=-3x^2-2x+10$.

✍**3.** *Знайти область визначення функції* $f(x)$, *якщо:*

3.1. $f(x)=\frac{x}{x+1}$;

3.2. $f(x)=\frac{x^3-1}{x^2-6x+8}$;

3.3. $f(x)=\dfrac{(x+2)^2}{x^3-4x}$;

3.4. $f(x)=\dfrac{1}{x+|x|}$;

3.5. $f(x)=\sqrt{2-x-x^2}$;

3.6. $f(x)=\sqrt{\dfrac{x-3}{1-3x+2x^2}}$;

3.7. $f(x)=\log_2(4-x)-\log_2(x+7)$;

3.8. $f(x)=\sqrt{\log_{\frac{1}{4}}\dfrac{2x^2-5x+3}{x^2-1}}$;

3.9. $f(x)=\arcsin x+\sqrt{\dfrac{2}{4x-1}}$;

3.10. $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{|x|-2|x-1|}}$;

3.11. $f(x)=\arccos\dfrac{2x}{1+x^2}+\sqrt{x^2(x-1)^2(x-3)}$.

Відповідь: 1) $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$; 2) $\mathbb{R}\setminus\{2;\,4\}$; 3) $\mathbb{R}\setminus\{0;\,\pm 2\}$; 4) $(0;\,+\infty)$; 5) $[-2;\,1]$; 6) $\left(\dfrac{1}{2};\,1\right)\cup[3;\,+\infty)$; 7) $(-7;\,4)$; 8) $(-1;\,1)\cup(1;\,4]$; 9) $\left(\dfrac{1}{4};1\right]$; 10) $\left(\dfrac{2}{3};\,2\right)$; 11) $[3;\,+\infty)$.

✍**4.** *Знайти* $y(0)$, $y(1)$, $y(-3)$, *якщо* $y=\dfrac{1}{1+x^2}$.

✍**5.** *Задана функція* $f(x)=x^2$. *Знайти:*

5.1. $f(-x)$;

5.2. $2f(x-1)$;

5.3. $f\left(\dfrac{1}{x}\right)$;

5.4. $f(\cos x)$;

5.5. $f^2(x)$;

5.6. $\sqrt{f(x)}$;

5.7. $f(f(x))$;

5.8. $\dfrac{1}{2}f(x)-2f\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

✍**6.** *Знайти множину значень функції* $f(x)$, *якщо:*

6.1. $f(x)=2x-5,\ x\in[-2;\,2]$;

6.2. $f(x)=|x-1|,\ x\in[0;\,5]$;

6.3. $f(x)=\sqrt{2+x-x^2}$;

6.4. $f(x)=\log_3(1-2\cos x)$;

6.5. $f(x)=\sin x+|\sin x|$;

6.6. $f(x)=\dfrac{2x}{1+x^2}$;

6.7. $f(x)=2^{|\cos x|}$;

6.8. $f(x)=\dfrac{2}{3-\sin x}$;

6.9. $f(x)=x^2-x^4,\ x\in[-1;\ 4]$;

6.10. $f(x)=ax+\dfrac{b}{x},\ ab>0.$

Відповідь: 1) $[-9;\ -2]$; 2) $[0;\ 4]$; 3) $\left[0;\ \dfrac{3}{2}\right]$; 4) $(-\infty;\ 1)$; 6) $[-1;\ 1]$; 7) $[1;\ 2]$; 8) $\left[\dfrac{1}{2};\ 1\right]$; 9) $\left[-240;\ \dfrac{1}{4}\right]$; 10) $\left(-\infty;\ -2\sqrt{ab}\right]\cup\left[2\sqrt{ab};\ +\infty\right)$.

✍**8.** *Чи є вказані відповідності функціями? Якщо так, то знайдіть їх області визначення і області значень:*

8.1 Кожному прямокутнику ставимо у відповідність його площу.

8.2 Кожному прямокутнику, вписаному в півколо, ставимо у відповідність його периметр.

8.3 Кожному колу ставимо у відповідність вписаний у неї прямокутник.

8.4 Кожному колу ставимо у відповідність дотичну, проведену із заданої точки.

✍***9. а)*** *У рівносторонній трикутник з стороною а вписано прямокутник висотою x. Виразіть площу S цього прямокутника як функцію від x.*

б) *Складіть задачні ситуації, для яких розв'язком буде функція $S(x)=x\sqrt{a^2-x^2}$.*

✍***10. а)*** *Виразіть площу бічної поверхні циліндра, вписаного в кулю радіуса R як функцію радіуса основи x. Знайдіть область визначення отриманої функції $S(x)$ і порівняйте з областю визначення її аналітичного ви разу. Зробіть ескіз графіка.*

б) *Скільки коренів має рівняння $S(x)=a$ в залежності від параметра a?*

✍**11. [15, с. 79]** *Знайти композиції $f\circ g$ і $g\circ f$, та вказати їх області визначення для заданих функцій:*

11.1. $f(x)=x^2,\ g(x)=\sqrt{x}.$

11.2. $f(x)=g(x)=\sqrt{1-x^2}.$

11.3. $f(x)=10^x,\ g(x)=\lg x.$

11.4. $f(x)=x^5,\ g(x)=x+5.$

11.5. $f(x)=\begin{cases} x, & x\in[0;+\infty), \\ 0, & x\in(-\infty;0), \end{cases}$ $g(x)=\begin{cases} 0, & x\in[0;+\infty), \\ x^2, & x\in(-\infty;0). \end{cases}$

11.6. $f(x)=\ln x^2$, $g(x)=\sin x$.

✍**12. [15, с. 80]** *Написати формули, які задають композиції:*

12.1. $u\circ v\circ w\circ y\circ z$.

12.2. $z\circ y\circ w\circ v\circ u$.

12.3. $w\circ y\circ v\circ z\circ u$.

12.4. $y\circ v\circ z\circ u\circ w$;

якщо $u=\sin x$, $v=\log_2 x$, $w=1+x$, $y=\dfrac{1}{x}$, $z=\sqrt{x}$.

✍**13**. [15, с. 80] *Знайти яку-небудь функцію* f, *яка задовольняє умову:*

13.1. $f(x-2)=\dfrac{1}{x+1}$, $x\in\mathbb{R}$, $x\neq 1$.

13.2. $f\left(\dfrac{1}{x}\right)=x^2+1$, $x\in\mathbb{R}$, $x\neq 0$.

13.3. $f\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)=x$, $x\in\mathbb{R}$, $x\neq -1$.

13.4. $f\left(x+\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{x^4+1}{x^2}$, $x\in\mathbb{R}$, $x\neq 0$.

13.5. $f\left(x^2\right)=1-|x|^3$, $x\in\mathbb{R}$.

✍**14. [15, с. 80]** *Нехай* $f(x)=\dfrac{x}{ax+b}$, $g(x)=\dfrac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}$. *Знайти:*

14.1. $f\circ f\circ f(x)$.

14.2. $g\circ g\circ g(x)$.

14.3. $\underbrace{f\circ f\circ\ldots\circ f}_{n}(x)$.

14.4. $\underbrace{g\circ g\circ\ldots\circ g}_{n}(x)$.

✍**15.** *Довести, що якщо* $f(x)$ *і* $g(x)$ – *парні функції на множині* X, *то функції* $f(x)+g(x)$, $f(x)-g(x)$, $f(x)\cdot g(x)$, $\dfrac{f(x)}{g(x)}$, $g(x)\neq 0$ *є парними на множині* X.

✍**16.** *Довести, що якщо* $f(x)$ *і* $g(x)$ *– непарні функції на множині* X*, то функції* $f(x)+g(x)$ *і* $f(x)-g(x)$ *є непарні функції на* X*, а* $f(x)\cdot g(x)$, $\dfrac{f(x)}{g(x)}$, $g(x)\neq 0$ *є парними на множині* X.

✍**17.** *Довести, що будь-яку функцію* $f(x)$*, визначену на множині* X*, симетричній відносно початку координат, можна подати у вигляді суми функцій* $\varphi(x)$ *і* $\psi(x)$, $x\in X$ *:*

$$f(x)=\varphi(x)+\psi(x),$$

де $\varphi(x)$ *– парна функція, а* $\psi(x)$ *– непарна функція. Тут*

$$\varphi(x)=\frac{f(x)+f(-x)}{2},\ \psi(x)=\frac{f(x)-f(-x)}{2}.$$

✍**18.** *Перевірити на парність і непарність функції:*

17.1. $y=\sin(\cos x)$;

17.2. $y=\dfrac{2^x+2^{-x}}{2^x-2^{-x}}$;

17.3. $y=\ln\dfrac{1-x}{1+x}$;

17.4. $y=\log_2\left(x+\sqrt{1-x^2}\right)$;

17.5. $y=\sqrt[3]{(x-1)^2}+\sqrt[3]{(x+1)^2}$;

17.6. $y=\log_2\dfrac{1+\sin x}{1-\sin x}$;

17.7. $y=|x-1|+|x+1|-2|x|$;

17.8. $y=\arccos(\cos x)$;

17.9. $y=\cos\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)+\sin\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)$;

17.10. $y=\dfrac{|\sin x|}{1-\cos x}$.

✍**19.** *Подати функцію* $f(x)$ *у вигляді суми парної і непарної функцій:*

18.1. $f(x)=(x+1)^3$;

18.2. $f(x)=\dfrac{x-3}{x^4}$;

18.3. $f(x)=\sin(x+1)$;

18.4. $f(x)=\arccos x$;

18.5. $f(x)=\ln\left(1+e^x\right)$;

18.6. $f(x)=\sin\left(x^3+x^2\right)$.

✍**20.** *Довести, що якщо* $f(x)$ *і* $g(x)$ *– визначені і обмежені на множині* X*, то функції* $f(x)+g(x)$, $f(x)-g(x)$, $f(x)\cdot g(x)$, $|f(x)|$, $Cf(x)$ *також є обмежені на множині* X.

✍**21.** *Довести, що якщо* $f(x)$ *і* $g(x)$ *– визначені на множині* X, *функція* $f(x)$ *обмежена на* X, *а функція* $g(x)$ *така, що* $|g(x)| > M > 0$, *то функція* $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ *обмежена на* X.

✍**22.** *Дослідити на обмеженість функції:*

21.1. $y = x^2 + 3x + 5,\ x \in [1; 3]$;

21.2. $y = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}},\ x \in (-1; 1)$;

21.3. $y = \dfrac{|x+1|}{x^2+1}$;

21.4. $y = x^4 - 2x^2 + 3$;

21.5. $y = (x+1)(x+2)(x+3)(x+4)$;

21.6. $y = |x| - |x+1|$;

21.7. $y = \sqrt{1-x^2} - \sqrt{x^2-1}$;

21.8. $y = \sqrt{x+1} - \sqrt{x}$;

21.9. $y = x - [x]$;

21.10. $y = \dfrac{x^2+2x+3}{x^2+x+1}$;

21.11. $y = 0{,}3^{x^2-1}$;

21.12. $y = \dfrac{1}{\lg\left(2+x^4\right)}$;

21.13. $y = 2^{-\sqrt{x}}$;

21.14. $y = \sin^3 3x - 4\sin 17x.$

Відповідь: 1) обмежена; 2) обмежена знизу, необмежена зверху; 3) обмежена; 4) обмежена знизу, необмежена зверху; 5) обмежена знизу, необмежена зверху; 6) обмежена; 7) обмежена; 8) обмежена; 9) обмежена; 10) обмежена; 13) обмежена; 14) обмежена.

✍**22.** **[15]** *Знайти* $\inf f, \sup f$, *а також* $\max f, \min f$, *якщо вони існують:*

22.1. $f(x) = 2^{-|x+2|}$;

22.2. $f(x) = \left(\sqrt{2}-1\right)^{1-x^2}$;

22.3. $f(x) = 1 - 2^{\frac{1}{x-1}}$;

22.4. $f(x) = 8 - 2^{x+1} - 4^x$;

22.5. $f(x) = \lg\left(x^2 + x - 2\right)$;

22.6. $f(x) = \log_{0,1}\left(4x - 3 - x^2\right)$;

22.7. $f(x) = \log_2\left(\dfrac{2}{x}\right) \cdot \log_2 8x.$

Відповідь: 1) $\sup f = \max f = 1, \inf f = 0$; 2) $\sup f = +\infty, \inf f = \min f = \sqrt{2} - 1$; 3) $\sup f = 1, \inf f = -\infty$; 4) $\sup f = 8, \inf f = -\infty$; 5) $\sup f = \max f = 4, \inf f = -\infty.$

🕮 Практичне заняття №4

Тема: Властивості функцій

✍**1. [14, с. 138]** *Знайти проміжки монотонності функцій:*

1.1. $y=\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{x}}$;

1.2. $y=3^{|x|}$;

1.3. $y=2x^2+x+4$;

1.4. $y=x+\frac{1}{x}$;

1.5. $y=|2x-1|$;

1.6. $y=\frac{x-3}{2x+1}$;

1.7. $y=\sqrt{x+2}-1$;

1.8. $y=\sin x-3\cos x$;

1.9. $y=tgx\cdot ctgx$;

1.10. $y=\log_2\left||x|-1\right|$.

Відповідь: 1) зростає на $(-\infty;\,0)$ і $(0;+\infty)$; 2) зростає на $[0;+\infty)$; спадає на $(-\infty;\,0)$; 4) зростає на $(-\infty;-1]$ і $[1;+\infty)$; спадає на $[-1;\,0)$ і $(0;\,1]$; 5) спадає на $\left(-\infty;\frac{1}{2}\right]$; зростає на $\left[\frac{1}{2};+\infty\right)$; 6) зростає на $\left(-\infty;-\frac{1}{2}\right)$ і на $\left(-\frac{1}{2};+\infty\right)$; 7) зростає на $[-2;+\infty)$; 8) зростає на $\left[\arcsin\frac{3}{\sqrt{10}}-\frac{\pi}{2}+2\pi k;\ \arcsin\frac{3}{\sqrt{10}}+\frac{\pi}{2}+2\pi k\right]$, $k\in\mathbb{Z}$; 9) функція стала на $\left(\frac{\pi}{2}k;\frac{\pi}{2}(k+1)\right)$, $k\in\mathbb{Z}$; 10) спадає на $(-\infty;-1)$ і $(0;\,1)$; зростає на $(-1;\,0)$ і $(1;+\infty)$.

✍**2. [14, с. 142]** *Знайти точки екстремуму функцій:*

2.1. $y=\frac{|x|}{1+x^2}$;

2.2. $y=3x^2+6x+7$;

2.3. $y=1+\cos 2x+\sin x+\sin^2 x$;

2.4. $y=3\sin 5x+7\cos 5x$;

2.5. $y=x^2+x,\ x\in[-2;\,5]$;

2.6. $y=-\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+1}$;

2.7. $y=\left||x-1|-1\right|$;

2.8. $y=\log_2\left(x^2+2x+2\right)$;

2.9. $y=3^{|x-1|-|x+1|}$;

2.10. $y=\frac{1}{\sqrt{x^2+x+1}}$.

Відповідь: 1) $y_{\max} = y(-1) = y(1) = \dfrac{1}{2}$; $y_{\min} = y(0) = 0$; 2) $\min\limits_{x\in\mathbb{R}} y(x) = y(-1) = 4$; 3) $\min\limits_{x\in\mathbb{R}} y(x) = y\left(-\dfrac{\pi}{2} + 2\pi n\right) = -1,\ n\in\mathbb{Z}$; $\max\limits_{x\in\mathbb{R}} y(x) = y\left((-1)^k \dfrac{\pi}{6} + \pi k\right) = \dfrac{9}{4},\ k\in\mathbb{Z}$; 5) $\max\limits_{x\in[-2;\,5]} y(x) = y(5) = 30$; $\min\limits_{x\in[-2;\,5]} y(x) = y\left(-\dfrac{1}{2}\right) = -\dfrac{1}{4}$; 6) $\min\limits_{x\in\mathbb{R}} y(x) = y(0) = -\dfrac{1}{2}$.

✍**3.** *Знайти найбільше значення площі прямокутника, вписаного в дане коло діаметра* d.

✍**4.** ***а)*** *Виразіть об'єм* $V(x)$ *лунки у формі конуса з твірної 20 см як функцію висоти. Знайдіть область визначення отриманої функції, порівняйте з областю визначення її аналітичного виразу, зробіть ескіз графіка функції.*

б) *Напишіть рівняння прямої, яка є віссю симетрії даної функції.*

в) *Починаючи з якого номера* n $(n\in\mathbb{N})$ *послідовність* $V(n)$ *спадає?*

г) *Доведіть, що функція* $V(x)$ *має на відрізку* $[10;30]$ *принаймні один корінь.*

д) *Скільки розв'язків має рівняння* $V(x) = a$ *в залежності від параметра* a*?*

✍**5.** *Число* 100 *подати у вигляді суми двох додатних чисел так, щоб добуток цих чисел був найбільшим.*

✍**6.** *Знайти коефіцієнти тричлена* $y = ax^2 + bx + c$, *якщо* $y(8) = 0$ *і його найменше значення дорівнює* -12 *в точці* $x = 6$,

✍**7.** *Довести, що якщо функція* $f(x) = \sin x + \cos bx$ *періодична, то число* b *є раціональним числом.*

Доведення. 1) $D(f) = \mathbb{R}$;

2) Нехай $T \neq 0$ – період функції $f(x)$. Тоді для будь-якого $x\in\mathbb{R}$ правильна рівність

$$\sin(x+T) + \cos b(x+T) = \sin x + \cos bx.$$

Покладемо тут $x = 0$ та $x = -T$, отримаємо дві рівності:

$$\sin T + \cos bT = 1,$$

$$-\sin T + \cos bT = 1.$$

Додавши та віднявши їх, матимемо

$$\begin{cases} 2\cos bT = 2, \\ 2\sin T = 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} bT = 2\pi m,\ m \in \mathbb{Z}, \\ T = \pi k,\ k \in \mathbb{Z}; \end{cases} \Leftrightarrow b = \frac{2m}{k} \in \mathbb{Q}.$$

Отже, b – раціональне число. ■

✍**8.** *Довести, що якщо функція $f(x)$ періодична з періодом $T \neq 0$, то функція $f(ax+b)$, $a>0$ є періодичною з періодом $\frac{T}{a}$.*

Доведення. 1) Покажемо, що число $T_1 = \frac{T}{a}$ є періодом функції $f(ax+b)$: $\quad f\left(a\left(x+\frac{T}{a}\right)+b\right) = f\left((ax+b)+T\right) = f(ax+b)$.

2) Покажемо, що $\frac{T}{a}$ – найменший додатний період. Припустимо, що існує додатне число T_1, яке є також періодом функції $f(ax+b)$:

$$f\left(a(x+T_1)+b\right) = f(ax+b).$$

Візьмемо довільну точку $x_1 \in D(f)$ і покладемо $x_1 = \frac{x-b}{a}$ ($x = ax_1 + b$). Обчислимо значення функції в точці x:

$$f(ax_1+b) = f\left(a \cdot \frac{x-b}{a} + b\right) = f\left(a(x_1+T_1)+b\right) =$$
$$= f\left((ax_1+b)+aT_1\right) = f(x+aT_1).$$

Звідси випливає, що період $T \le aT_1 \Rightarrow \frac{T}{a} \le T_1$.

Отже, $\frac{T}{a}$ – найменший додатний період функції $f(ax+b)$. ■

Знайти найменший період функції:

8.1. $y = \sin 2x$;

8.2. $y = tg 3x$;

8.3. $y = 3\cos\frac{x}{2}$;

8.4. $y = 5\sin \pi x$;

8.5. $y = ctg\frac{3x}{2}$;

8.6. $y = \sin\frac{\pi x}{4}$;

8.7. $y = ctg 4x$;

8.8. $y = \cos\frac{x}{3}$;

8.9. $y = 10 tg 15x$.

Відповідь: 1) π; 2) $\frac{\pi}{3}$; 3) 4π; 4) 2; 5) $\frac{2\pi}{3}$; 6) 8; 7) $\frac{\pi}{4}$; 8) 6π; 9) $\frac{\pi}{15}$.

✍**9. [11, с. 63]** *Переконатись, що кожна з заданих функцій періодична і знайти її період:*

9.1. $y=\sin\dfrac{x}{2}+tgx;$

9.2. $y=\sin\dfrac{2x+1}{2};$

9.3. $y=\sqrt{\sin 3x};$

9.4. $y=1+\sqrt{\log_2\cos x};$

9.5. $y=2^{\sin x};$

9.6. $y=arctg\left(tgx\right);$

9.7. $y=\arcsin\left(\sin x\right);$

9.8. $y=\sqrt{\left|\sin|x|\right|}.$

Знаходження періоду функції.

1. Функції $y=\cos ax+\cos bx,$ $y=\sin ax+\cos bx,$ $y=\dfrac{\cos ax}{\sin bx},$ $y=tgax+ctgbx$ періодичні, якщо число $\dfrac{a}{b}$ є раціональним числом, і неперіодичні, якщо $\dfrac{a}{b}$ – ірраціональне число.

2. Період функції

$y=c_1\sin n_1x+...+c_k\sin n_kx+d_1\cos m_1x+...+d_l\cos m_lx,$

де сума ніяких двох або більше членів ряду тотожно не дорівнює нулю, $c_i,\, d_j\in\mathbb{R},\, n_i,\, m_j\in\mathbb{N},\, i=\overline{1,\,k},\ j=\overline{1,\,l}$, знаходимо за формулою:

$$T=\frac{2\pi}{HCD(n_1,...,n_k,\, m_1,...,\, m_l)}. \qquad (1)$$

3. Аналогічно, період функції

$y=c_1tgn_1x+...+c_ktgn_kx+d_1ctgm_1x+...+d_lctgm_lx,$

Знаходимо за формулою

$$T=\frac{\pi}{HCD(n_1,...,n_k,\, m_1,...,\, m_l)}. \qquad (2)$$

4. Якщо $n_i=\dfrac{s_i}{r_i},\, m_j=\dfrac{p_j}{q_j}$, де $s_i,\ r_i,\ p_j,\, q_j$ – натуральні числа, то період функції $y=c_1\sin n_1x+...+c_k\sin n_kx+d_1\cos m_1x+...+d_l\cos m_lx,$ становить

$$T=2\pi\frac{HCK(r_1,...,\, r_k,\, q_1,...,\, q_l)}{HCD(s_1,...,\, s_k,\, p_1,...,\, p_l)}. \qquad (3)$$

5. А період функції $y = c_1 tgn_1 x + ... + c_k tg_k x + d_1 ctg_1 x + ... + d_l ctgm_l x,$ знаходимо за формулою

$$T = \pi \frac{HCK(r_1,..., r_k, q_1,..., q_l)}{HCD(s_1,..., s_k, p_1,..., p_l)}. \qquad (4)$$

✍**10.** *Знайти період функції* $y = \sin\frac{2}{3}x + \cos\frac{4}{9}x + \cos\frac{8}{27}x$.

Розв'язання. Для вищезгаданої формули (3) маємо: $n_1 = \frac{2}{3}$, $m_1 = \frac{4}{9}$, $m_2 = \frac{8}{27}$, тоді $s_1 = 2,\ r_1 = 3,\ p_1 = 4,\ p_2 = 8,\ q_1 = 9,\ q_2 = 27.$

Отже, $T = \frac{HCK(3, 9, 27)}{HCD(2, 4, 8)} \cdot 2\pi = \frac{27}{2} \cdot 2\pi = 27\pi.$

Відповідь: 27π.

✍**11.** Знайти період функції $y = \sin 2x + 3\sin(3x - 2) - 0,5\cos\left(\frac{4}{5}x + 1\right)$.

Розв'язання. Використовуючи раніше згадувану формулу $T = \frac{2\pi}{\omega}$, маємо:

функція $\sin 2x$ має період $\frac{2\pi}{2} = \pi$;

$\sin(3x - 2)$ має період $\frac{2\pi}{3} = \frac{2}{3}\pi$;

$-0,5\cos\left(\frac{4}{5}x + 1\right)$ має період $\frac{2\pi}{\frac{4}{5}} = \frac{5}{2}\pi$.

Основним періодом даної функції y є НСК періодів $\pi, \frac{2}{3}\pi, \frac{5}{2}\pi$. Для знаходження НСК зведемо коефіцієнти $1, \frac{2}{3}, \frac{5}{2}$ при π до спільного знаменника: $\frac{6}{6}\pi, \frac{4}{6}\pi, \frac{15}{6}\pi$, або $6 \cdot \frac{\pi}{6}, 4 \cdot \frac{\pi}{6}, 15 \cdot \frac{\pi}{6}$.

$HCK(6, 4, 15) = 60$.

Отже, основний період даної функції y рівний: $T_0 = 60 \cdot \frac{\pi}{6} = 10\pi$.

Відповідь: 10π.

✍**12.** *Знайти найменший період функції:*

12.1. $y = 3\sin 4x + 6\sin x + \sin(x-\pi) + 5\sin(x+\pi)$;

12.2. $y = \sin 2x + tg\dfrac{x}{2}$;

12.3. $y = \cos\dfrac{x}{3} + tg\dfrac{x}{5}$;

12.4. $y = \sin\dfrac{3x}{4} + 5\cos\dfrac{2x}{3}$;

12.5. $y = \sin x + \cos x$;

12.6. $y = 2ctg3x - 4tg2x$;

12.7. $y = \sin 2x - \cos 5x$;

12.8. $y = \cos^2 x$;

12.9. $y = |\sin x|$;

12.10. $y = \sin\dfrac{x}{2} + \cos 2x$;

12.11. $y = \cos\dfrac{x}{3} + \sin\dfrac{2}{5}x$;

12.12. $y = \sin x - |\sin x|$;

12.13. $y = \sin^4 x$;

12.14. $y = \sin 3x - \sin x\cos x + \cos 4x$;

12.15. $y = \cos 5x \cos 3x$;

12.16. $y = tg\dfrac{3x}{4} + ctg\dfrac{2x}{3}$;

12.17. $y = \cos\dfrac{\pi x}{3} + \cos\dfrac{\pi x}{4} + \cos\dfrac{\pi x}{5}$.

Відповідь: 1) $\dfrac{\pi}{2}$. 2) 2π. 3) 30π. 4) 24π. 5) $\dfrac{\pi}{2}$. 6) π; 7) π; 8) π; 9) π; 10) 4π; 11) 30π; 12) 2π; 13) π; 14) 2π; 15) π; 16) 12π; 17) 120.

✍**13.** *На області визначення функції знайти функцію, обернену до заданої:*

13.1. $y = \dfrac{x-1}{x+2}$;

13.2. $y = 4^{x+1} - 1$;

13.3. $y = \log_2(x-1)$;

Відповідь: 1) $y = \dfrac{2x+1}{1-x}$; 2) $y = \log_4(x+1) - 1$; 3) $y = 2^x + 1$;

🕮 Практичне заняття №5

Тема: Побудова графіків елементарних функцій. Самостійна робота №1

✍**1.** *На рис. 1 зображено графік функції* $y=f(x)$. *Побудувати графік функції:*

1.1. $y=f(2x)$;

1.2. $y=f(-x)$;

1.3. $y=f\left(\frac{x}{2}\right)$;

1.4. $y=f(x+2)$;

1.5. $y=f(|x|)$;

1.6. $y=|f(x)|$;

1.7. $y=-\frac{1}{2}f(x)$;

1.8. $y=f(2x+1)$;

1.9. $y=f(|x-1|)$.

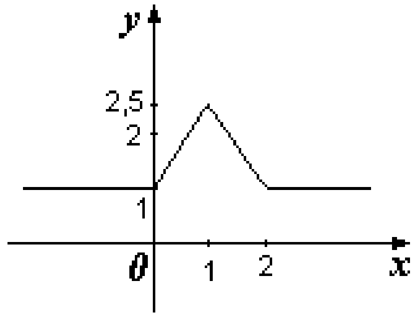


Рис. 1

✍**2.** *На рис. 2 зображено графік функції* $y=f(x)$. *Побудувати графік функції:*

2.1. $y=f\left(\frac{x}{2}\right)$;

2.2. $y=\frac{1}{2}f(x)$;

2.3. $y=f(3x)$;

2.4. $y=f(x-1)$;

2.5. $y=f(|x|)$;

2.6. $y=|f(x)|$;

2.7. $y=2f(x)$;

2.8. $y=f(1-2x)$;

2.9. $y=f(|2-x|)$.

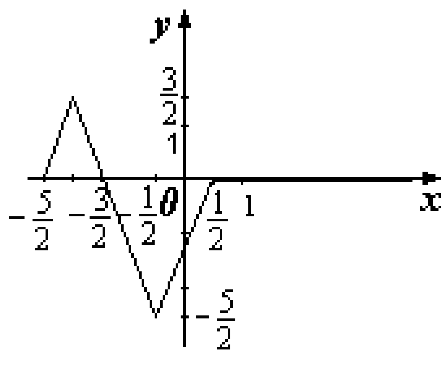


Рис. 2

✍**3.** *Використовуючи правила побудови графіків функцій* $y=f(-x)$, $y=f(x+a)$, $y=f(x)+b$*, побудуйте графіки функцій:*

3.1 $y=\dfrac{1}{x+2}$;

3.2 $y=\sqrt{3-x}$;

3.3 $y=\log_{\frac{1}{2}}(x-4)$;

3.4 $y=x^2+4x+6$;

3.5 $y=\sqrt{5-x}+3$;

3.6 $y=-\dfrac{x+2}{x+5}$;

3.7 $y=1-\arcsin(-x)$;

3.8 $y=\sin\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right)+2$.

✍**4.** *Використовуючи правила побудови графіків функцій* $y=f(kx)$, $y=kf(x)$*, побудуйте графіки функцій:*

4.1 $y=\sqrt[5]{4x}$;

4.2 $y=\cos 2x$;

4.3 $y=3\log_3 x$;

4.4 $y=\cos\dfrac{x}{3}$;

4.5 $y=\sqrt[3]{4+3x}$;

4.6 $y=2-\dfrac{1}{\pi}\arccos x$;

4.7 $y=-\dfrac{1}{3}5^x$;

4.8 $y=\dfrac{1}{2}tg\left(\dfrac{x}{2}\right)$.

✍**5.** *Використовуючи правила побудови графіків функцій* $y=f(|x|)$, $y=|f(x)|$*, побудуйте графіки функцій:*

5.1 $y=\log_4|x|$;

5.2 $y=\cos\left|x-\dfrac{\pi}{4}\right|$;

5.3 $y=\left|\dfrac{4-x}{5-2x}\right|$;

5.4 $y=|tg 2x+1|$;

5.5 $y=\dfrac{1}{1-3|x|}$;

5.6 $y=\dfrac{|x|-2}{|x|+3}$; ;

5.7 $y=x^2-4|x|+7$

5.8 $y=|x^2-6|x|+8|$.

✍**6.** *Використовуючи різні властивості перетворень, побудуйте графік функцій:*

6.1. $y=\dfrac{|x+2|}{x+3}$;

6.2. $y=1+\dfrac{|x|}{x+1}$;

6.3. $y=|2x-1|+|x-1|-x$;

6.4. $y=|2-3x|-|1+5x|+|7-2x|$;

6.5. $y=\sqrt{|x-1|+|x+1|}$;

6.6. $y=\sqrt[3]{|x|-1}$;

6.7. $y=\left|3x^2-5x+2\right|+\left|x^2-7x+6\right|$;

6.8. $y=\left|2x^2-8x+6\right|-\left|3x^2-10x+7\right|-2x+1$.

✍**7.** *Побудувати графік функції:*

7.1. $y=\sqrt[3]{x^2 sign(\cos\pi x)}$;

7.2. $y=arctg\dfrac{\left|-2|x+1|\right|}{3}$;

7.3. $y=\sqrt{1-\cos^2 2x}$;

7.4. $y=\cos^2 x\sin^2 x$;

7.5. $y=2^{\log_{\sqrt{2}}\sin x}$;

7.6. $y=\left(\sqrt{\sin 3x}\right)^2$;

7.7. $y=tg2x\cdot ctg2x$;

7.8. $y=\arcsin\dfrac{\left|-|2x+1|\right|}{4}$;

7.9. $y=\sin x-\sqrt{\sin^2 x}$;

7.10. $y=2^{|\log_2 x|}$.

✍**8.** *Побудувати графік функції:*

8.1. $y=\arcsin(\sin x)$;

8.2. $y=\arccos(\cos x)$;

8.3. $y=arctg(tgx)$;

8.4. $y=arcctg(tgx)$;

8.5. $y=\arcsin(\cos x)$;

8.6. $y=\arccos(\sin x)$;

8.7. $y=\sin(arctg\, x)$;

8.8. $y=\arcsin\sqrt{1-x^2}$.

✍**9. [Вавілов, с. 265]** *Побудувати графік функції:*

9.1. $y=|tgx|-|tgx-1|+2$;

9.2. $y=\dfrac{x}{x^2-1}$;

9.3. $y=\dfrac{x}{x^2+1}$;

9.4. $y=\dfrac{x^2+2x+3}{x+2}$;

9.5. $y=\dfrac{x^2+x+1}{x^2-x+1}$;

9.6. $y=\lg\left(x^2-x\right)$;

9.7. $y=2^{\frac{1-x}{1+x}}$;

9.8. $y=\arccos\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)$;

9.9. $y=\sqrt[3]{x+\dfrac{1}{x}}$;

9.10. $y=\left|\sin x-1\right|-\sin x+1$.

⌛ Самостійна робота №1 (35 балів) (зразок)

✍**1.** *Які з даних чисел є раціональними, а які ірраціональними:*

$$\frac{\sqrt{37+12\sqrt{7}}-1}{\sqrt{7}+1}.$$

✍**2**. *Подати нескінченні десяткові дроби у вигляді звичайних дробів:* $2,4(16)$.

✍**3.** *Нехай задані функції* $f(x), g(x), h(x)$. *Побудувати для кожної операційної схеми функцію:*

$$f+g\circ h,\quad f(x)=2x+5,\quad g(x)=x^2+1,\quad h(x)=\frac{1}{x}.$$

✍**4.** *Розв'язати рівняння:* $\left|x-2\right|-\left|5-x\right|=x+1-\left|2-6x\right|$.

✍**5.** *Розв'язати нерівність:* $\left|\left|x\right|-1\right|\le x+1$.

🕮 Практичне заняття №6

Тема: Числові послідовності

✍**1.** *Знайти перші шість членів послідовності* $\left(x_n\right)$, *заданої формулою загального члена:*

1.1. $x_n=3$;

1.2. $x_n=\dfrac{1+\left(-1\right)^n}{n}$;

1.3. $x_n=\left(-1\right)^n+\left(-1\right)^{n+1}$;

1.4. $x_n=\sin\dfrac{n\pi}{2}$;

1.5. $x_n=n\sin\dfrac{n\pi}{2}+n^2\cos\dfrac{n\pi}{2}$;

1.6. $x_n=n^{(-1)^n}$;

1.7. $x_n=\dfrac{n!}{n^n+1}$;

1.8. $x_n = \dfrac{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot (2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot \ldots \cdot 2n}$;

1.9. $x_n = \left[\sqrt{n^2+n}\right]$;

1.10. $x_n = \sum\limits_{k=1}^{n} k$.

✍**2.** *Знайти перші п'ять членів послідовності, заданої рекурентно:*

2.1. $x_1 = 1,\ x_{n+1} = 2x_n$;

2.2. $x_1 = 1,\ x_{n+1} = 3x_n - 2$;

2.3. $x_1 = 3,\ x_{n+1} = x_n - n$;

2.4. $x_1 = 1,\ x_{n+1} = \dfrac{x_n}{n}$;

2.5. $x_1 = x_2 = 1,\ x_{n+2} = x_{n+1} + x_n$;

2.6. $x_1 = -1,\ x_2 = 0,\ x_{n+2} = x_{n+1} + x_n$;

2.7. $x_1 = 1,\ x_2 = 2,\ x_{n+2} = x_{n+1}\cdot x_n$;

2.8. $x_1 = 1,\ x_2 = 2,\ x_{n+2} = \dfrac{x_{n+1}}{x_n}$;

2.9. $x_1 = 1,\ x_2 = 2,\ x_{n+2} = \dfrac{x_n + x_{n+1}}{2}$;

2.10. $x_1 = 2,\ x_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(x_n + \dfrac{1}{x_n}\right)$.

✍**3.** *Підібрати одну з можливих формул для загального члена послідовності, якщо відомо декілька перших її членів:*

3.1. $4, 9, 16, 25, 36, \ldots$;

3.2. $4, 16, 36, 64, 100, \ldots$;

3.3. $\dfrac{1}{1\cdot 5}, \dfrac{1}{5\cdot 9}, \dfrac{1}{9\cdot 13}, \dfrac{1}{13\cdot 17}, \ldots$;

3.4. $\dfrac{2}{1\cdot 2}, \dfrac{4}{2\cdot 3}, \dfrac{8}{3\cdot 4}, \dfrac{16}{4\cdot 5}, \ldots$;

3.5. $1, \dfrac{4}{2}, \dfrac{9}{6}, \dfrac{16}{24}, \dfrac{25}{120}, \ldots$;

3.6. $\dfrac{2}{4}, \dfrac{5}{7}, \dfrac{10}{12}, \dfrac{17}{19}, \dfrac{26}{28}, \ldots$;

3.7. $1, 0, -1, 1, 0, -1, 1, 0, -1, \ldots$;

3.8. $2, 0, \dfrac{2}{3}, 0, \dfrac{2}{5}, 0, \dfrac{2}{7}, \ldots$;

3.9. $1, 2, \dfrac{3}{2}, \dfrac{2}{3}, \dfrac{5}{24}, \ldots$;

3.10. $2, \dfrac{1}{3}, 4, \dfrac{1}{5}, 6, \ldots$.

Відповідь: 1) $(n+1)^2$; 2) $(2n)^2$; 3) $\dfrac{1}{(4n-3)(4n+1)}$; 4) $\dfrac{2^n}{n(n+1)}$;

5) $\frac{n^2}{n!}$; 7) $\frac{2}{\sqrt{3}}\sin\left(\frac{\pi(2n-1)}{3}\right)$; або $\sin\frac{n\pi}{2}$; 10) $(n+1)^{(-1)^{n+1}}$.

✍**4.** *Довести, що довільна арифметична прогресія задовольняє рівність* $x_{n+2} = 2x_{n+1} - x_n$.

✍**5.** *Довести, що довільний член послідовності:*

5.1 $x_n = 4^n + 15n - 1$ ділиться на 9;

5.2 $5^n + 2\cdot 3^{n-1} + 1$ ділиться на 8;

5.3 $3^{2n+2} + 5\cdot 2^{3n+1}$ ділиться на 19;

5.4 $2^{5n+3} + 5^5\cdot 3^{n+2}$ ділиться на 17;

5.5 $6^{2n} + 3^{n+2} + 3^n$ ділиться на 11;

5.6 $n^3 + 3n^2 + 5n + 3$ ділиться на 3.

✍**6. [17, с. 250], [14, с. 58]** *Довести, що послідовність* (x_n) *є зростаючою, якщо:*

6.1. $x_n = 5n - 12$;

6.2. $x_n = n^2 + n - 1$;

6.3. $x_n = \frac{n}{n+1}$;

6.4. $x_n = \frac{3n+5}{n+3}$;

6.5. $x_n = 3^{n+1}$;

6.6. $x_n = 2^{n-1}$;

6.7. $x_n = 4^n - 2^n$;

6.8. $x_n = \frac{2^n}{n+1}$;

6.9. $x_n = \frac{n}{\sqrt{n}+1}$;

6.10. $x_n = n^3 - n^2$.

✍**7.** *Довести, що послідовність* (x_n) *є спадною, якщо:*

7.1. $x_n = 11 - 2n$;

7.2. $x_n = -n^2 + n - 1$;

7.3. $x_n = \frac{1}{n^2}$;

7.4. $x_n = \frac{2n+3}{3n-2}$;

7.5. $x_n = \frac{2n}{n^2+1}$;

7.6. $x_n = \frac{1}{n^2+2n+4}$;

7.7. $x_n = \frac{n}{4^n}$;

7.8. $x_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$;

7.9. $x_n = \sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n}$;

7.10. $x_n = \frac{3n^2+2}{3n^2+1}$.

✍**8. [17,с.250], [14, с. 63]** *Дослідити на монотонність послідовності:*

8.1. $x_n = \dfrac{n+2}{0{,}5n-5}$;

8.2. $x_n = \dfrac{3n+4}{n+2}$;

8.3. $x_n = \dfrac{6^{n+1}}{n!}$;

8.4. $x_n = \dfrac{n^3}{2^n}$;

8.5. $x_n = \dfrac{n^3}{n^2-2n+3}$;

8.6. $x_n = \dfrac{n^2}{n^3+32}$;

8.7. $x_n = \sqrt{n+3}-\sqrt{n}$;

8.8. $x_n = \sqrt{n^2+2n}-n$.

Відповідь: 1) спадає для $n \geq 11$; 2) зростає; 3) спадає для $n > 5$; 4) спадає.

✍**9. [17, с. 252], [14, с. 65]** *Знайти найбільший член послідовності:*

9.1. $x_n = 8n - n^3$;

9.2. $x_n = -n^2 + 4n + 16$;

9.3. $x_n = 3 - \left(n - \dfrac{7}{3}\right)^2$;

9.4. $x_n = \dfrac{10\sqrt{n}}{n+25}$;

9.5. $x_n = \dfrac{3n+3}{3n-4}$;

9.6. $x_1 = 1,\ x_n = \sqrt[n]{n},\ (n>1)$;

9.7. $x_n = \dfrac{n}{n^3+1000}$;

9.8. $x_n = \dfrac{\left(\sqrt{39}\right)^n}{n!}$;

9.9. $x_n = \dfrac{\left(\sqrt{126}\right)^n}{(2n)!}$;

9.10. $x_n = \sin\dfrac{n\pi}{2}$.

Відповідь: 1) $x_2 = 8$; 2) $x_2 = 20$; 3) $x_2 = \dfrac{26}{9}$; 4) $x_{25} = 1$; 5) $x_2 = \dfrac{9}{2}$; 6) $x_3 = \sqrt[3]{3}$; 7) $x_8 = \dfrac{1}{189;}$ 8) $x_6 = \dfrac{39^3}{6!}$; 9) $x_5 = \dfrac{126^5}{10!}$; 10) $x_{4n+1} = 1$.

✍**10. [17, с. 255]** *Знайти найменший член послідовності:*

10.1. $x_n = (n-1)(n-2)(n-4)$;

10.2. $x_n = n + 3\cos\pi n$;

10.3. $x_n = \dfrac{(n+3)(n+12)}{n}$;

10.4. $x_n = \dfrac{6n-5}{3n-4}$;

10.5. $x_n = n^3 - 10$;

10.6. $x_n = n^3 - 18n$;

10.7. $x_n = n - 2\sin\dfrac{\pi n}{2}$;

10.8. $x_n = n + \dfrac{4}{n}$.

Відповідь: 1) $x_3=-2$; 2) $x_1=-2$; 3) $x_6=27$; 4) $x_1=-1$; 5) $x_1=-9$; 6) $x_2=-28$; 7) $x_1=-1$; 8) $x_2=2$.

✍**11. [17, с. 256]** *Довести, що послідовність* (x_n) *обмежена зверху:*

11.1. $x_n=\dfrac{2n+7}{n+2}$;

11.2. $x_n=-n^2-n$;

11.3. $x_n=\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$;

11.4. $x_n=\sqrt[3]{n+2}-\sqrt[3]{n+1}$;

11.5. $x_n=\dfrac{3^n}{n!}$;

11.6. $x_n=\dfrac{n}{3^n}$;

11.7. $x_n=\dfrac{1}{1\cdot 2}+\dfrac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\dfrac{1}{n(n+1)}$;

11.8. $x_n=1+\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{3^2}+\ldots+\dfrac{1}{n^2}$.

✍**12. [17, с. 258]** *Довести, що послідовність* (x_n) *обмежена знизу:*

12.1. $x_n=n^2+n+1$;

12.2. $x_n=2n^2-n+4$;

12.3. $x_n=\dfrac{n+2}{n^2+6n+5}$;

12.4. $x_n=\dfrac{n^2-3n+1}{n}$;

12.5. $x_n=n^3-6n+2$;

12.6. $x_n=n^3-8n$.

✍**13. [14, с. 64]** *Довести, що послідовність* (x_n) *обмежена:*

13.1. $x_n=\dfrac{2-n}{\sqrt{n^2+3}}$;

13.2. $x_n=\dfrac{3n+(-1)^n}{9n-1}$;

13.3. $x_n=\dfrac{n^2+3}{n^2+4n+5}$;

13.4. $x_n=\dfrac{3^n}{4^n+1}$;

13.5. $x_n=\underbrace{\sqrt{4+\sqrt{4+\ldots+\sqrt{4}}}}_{n\ \text{коренів}}$ (Вказівка. Використайте метод математичної індукції);

13.6. $x_1=2,\ x_{n+1}=\dfrac{x_n^2-2}{2}$;

13.7. $x_1=1,\ x_{n+1}=\dfrac{3}{4}x_n+\dfrac{1}{x_n}$.

✍**14.** *Довести, що послідовність* (x_n) *необмежена:*

14.1. $x_n=n^2-5n+2$;

14.2. $x_n=n^3-27n$;

14.3. $x_n=\log_2\left(n^2+n\right)$;

14.4. $x_n=\log_3\left(n^2+4n\right)-3$;

14.5. $x_n = 3^n - 2^n$;

14.6. $x_1 = -4,\ x_2 = 3,\ x_{n+2} = x_{n+1} + \dfrac{3}{4} x_n$.

🕮 Практичне заняття №7

Тема: Границя числової послідовності. Нескінченно малі і нескінченно великі послідовності

✍**1.** *Послідовність (x_n) задана формулою загального члена. Для заданого числа ε вказати такий номер n_0, що для всіх $n > n_0$ виконується нерівність $|x_n - a| < \varepsilon$:*

$$\boxed{\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ n_0 \in \mathbb{N},\ \forall\ n > n_0 \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon}$$

1.1. $x_n = \dfrac{n+1}{n},\ a = 1,\ \varepsilon = \dfrac{1}{2};\ 0{,}1;\ 0{,}001;$

1.2. $x_n = \dfrac{2n}{n^3+1},\ a = 0,\ \varepsilon = \dfrac{1}{2};\ 0{,}1;\ 0{,}01;$

1.3. $x_n = 3 + \dfrac{(-1)^{n-1}}{n},\ a = 3,\ \varepsilon = 0{,}05;\ 0{,}08;\ 0{,}004;$

1.4. $x_n = \dfrac{2n^2 - n + 2}{n^2 + 3n - 1},\ a = 2,\ \varepsilon = \dfrac{1}{2};\ 0{,}1;\ 0{,}001.$

1.5. $x_n = (-1)^n \dfrac{1}{7^n},\ a = 0;$

1.6. $x_n = \dfrac{n+1}{n+2},\ a = 1;$

1.7. $x_n = 2^n,\ a = +\infty;$

1.8. $x_n = -n^2,\ a = -\infty;$

1.9. $x_n = \dfrac{3n-2}{2n-4},\ a = \dfrac{3}{2};$

1.10. $x_n = \dfrac{4n-1}{2n+1},\ a = 2;$

✍**2.** *Довести за означенням, що* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$:

2.1. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3n+2}{n} = 3;$

2.2. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{1}{3}\right)^n = 0;$

2.3. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2 + n - 1}{2n^2 + 3n + 4} = \dfrac{1}{2};$

2.4. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3n^2 + 2n - 2}{n^2 + n + 1} = 3;$

2.5. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n+1}{(n+1)\cdot 2^n} = 0;$

2.6. $\lim\limits_{n\to\infty} (-1)^n \dfrac{3^n}{5n + 3^n} = 1.$

✍**3.** *Довести, що якщо послідовність* (x_n) *збіжна до числа* a, *то послідовність* $(\sin x_n)$ *збіжна до числа* $\sin a$. *[14, с. 75]*

✍**4.** *Довести, що якщо* $x_n \ge 0\ \forall\ n \in \mathbb{N}$ *і* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, *то* $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{x_n} = \sqrt{a}$.

✍**5.** *Знайти границю:*

5.1. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{-2n^2+7n+1}{n^2+1}$;

5.2. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n+3}{3n-4}$;

5.3. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4n+1}{n^2+n}$;

5.4. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2-n+4}{2n^2+n+3}$;

5.5. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n(n+1)(n+2)}{(n+3)(n+4)(n+5)}$;

5.6. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n+1}{3n-2}\right)^2$;

5.8. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^3+4}{n+5n^2+8}$.

5.7. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+(-1)^n}{n-(-1)^{n-1}}$;

5.9. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)^4-(n-1)^4}{(n^2+1)^2-(n^2-1)^2}$;

5.10. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(2+n)^{100}-n^{100}-200n^{99}}{n^{98}-10n^2+1}$.

5.11. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{3n-1}{2n+3}-\dfrac{2+3n^2}{2n^2-7}\right)$;

5.12. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^3-1}{5n^3-1}-\dfrac{2-n}{5n+3}\right)$;

5.13. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(3-n)^2+(3+n)^2}{(3-n)^2-(3+n)^2}$;

5.14. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(1+2n)^2-8n^3}{(1+2n)^2+4n^2}$.

Відповідь: 1) –2; 2) $\dfrac{2}{3}$; 3) 0; 4) $\dfrac{1}{2}$; 5) 1; 6) $\dfrac{4}{9}$; 7) 1; 8) ∞; 9) ∞; 10) 4950.

✍**6.** *Знайти границю:*

6.1. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+2}-\sqrt{n+3}}$;

6.2. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n}{\sqrt{n^2+1}+\sqrt{2+n^2}}$;

6.3. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2-n}-\sqrt{2n}\right)$;

6.4. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{3n^2+2n-1}-\sqrt{3n^2-4n+8}\right)$;

6.5. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+\sqrt{n+\sqrt{n}}}-\sqrt{n}\right)$;

6.6. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt[4]{n^4+n^2}-n\right)$;

6.7. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt[p]{n^p+(p-1)n^{p-1}}-n\right)$;

6.8. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+n}-\sqrt[3]{n^3+n^2}\right)$;

6.9. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n\sqrt[3]{5n^2}+\sqrt[4]{9n^8+1}}{\left(n+\sqrt{n}\right)\sqrt{7-n+n^2}}$;

6.10. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n-1}-\sqrt{n^2+1}}{\sqrt[3]{3n^3+3}+\sqrt[4]{n^5+1}}$.

Відповідь: 1) $\dfrac{1}{2}$; 2) 1; 3) ∞; 4) $\sqrt{3}$; 5) $\dfrac{1}{2}$; 6) 0; 7) $\dfrac{p-1}{p}$; 8) $\dfrac{1}{6}$; 9) $\sqrt{3}$; 10) 0.

✍**7.** *Знайти границю:*

7.1. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+2)!+(n+1)!}{(n+3)!}$;

7.2. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+2)!+(n+1)!}{(n+2)!-(n+1)!}$;

7.3. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n!}{(n+1)!-n!}$;

7.4. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n!+(n+2)!}{((n+1)!+n!)\cdot n}$;

7.5. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n!+(n+1)!}{(n+2)!+(n+3)!}$;

7.6. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+2)\cdot n!}{(n+1)!}$.

Відповідь: 1) 0; 2) 1; 3) 0; 4) 1; 5) 0; 6) 1.

✍**8.** *Знайти границю:*

8.1. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^n+1}{2^n+5}$;

8.2. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^n+3^n}{n^2+2\cdot 3^n}$;

8.3. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{3n-4}{7n+5}-\dfrac{5^n+1}{4-3\cdot 5^n}\right)$;

8.4. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\left(1+(-1)^n\right)^n}{3^n\ln(n+2)}$;

8.5. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\lg\left(n^2+n-1\right)}{\lg\left(n^{10}+n^5+1\right)}$;

8.6. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+5^n+\lg(n+1)}{n^2-5^n+\lg(n+1)}$;

8.7. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\log_2 n+\log_3 n}{\log_3 n+\log_4 n}$;

8.8. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\log_2\left(n^{1000}+1\right)}{n+2}$.

Відповідь: 1) 1; 2) $\dfrac{1}{2}$; 3) $\dfrac{16}{21}$; 4) 0; 5) $\dfrac{1}{5}$; 6) -1; 7) $\dfrac{\log_2 e+\log_3 e}{\log_3 e+\log_4 e}$; 8) 0.

✍**9.** *Знайти границю:*

9.1. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sin^2(n+2)}{n+2}$;

9.2. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n+1}\sin\dfrac{\pi(n+1)}{n+2}$;

9.3. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{\ln 2+\sqrt{n}}{\sqrt{2n+3}}+\dfrac{\cos n}{n^2}\right)$;

9.4. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{n^2}\sin n!}{n+1}$;

9.5. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sin\dfrac{1}{n}\cos n\right)$;

9.6. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+\sin n}{2n+\sin n}$.

Відповідь: 1) 0; 2) 0; 3) $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$; 4) 0; 5) 0; 6) $\dfrac{1}{2}$.

✍**10.** *Знайти границю:*

10.1. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+4+7+\ldots+(3n-2)}{n^2}$;

10.2. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{2}{n^2}+\ldots+\dfrac{n-1}{n^2}\right)$;

10.3. $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{\dfrac{n}{2}\left(\dfrac{1}{n^3}+\dfrac{2}{n^3}+\ldots+\dfrac{n}{n^3}\right)}$;

10.4. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n\sqrt{1+3+\ldots+(2n-1)}}{2n^2+n-1}$;

10.5. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1+3+\ldots+(2n-1)}{n+1}-\dfrac{2n+1}{2}\right)$;

10.6. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-2+3-4+\ldots-2n}{\sqrt{n^2+1}}$;

10.7. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{8}+\ldots+\dfrac{(-1)^{n-1}}{2^{n-1}}\right)$;

10.8. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+2+4+\ldots+2^{n-1}}{2^{n+1}}$;

10.9. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}\right)+\left(\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{3^2}\right)+\ldots+\left(\dfrac{1}{2^n}+\dfrac{1}{3^n}\right)\right)$;

10.10. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}+\ldots+\dfrac{1}{2^n}}{1+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{9}+\ldots+\dfrac{1}{3^n}}$.

Відповідь: 1) $\dfrac{3}{2}$; 2) $\dfrac{1}{2}$; 3) $\dfrac{1}{2}$; 4) $\dfrac{1}{2}$; 5) $-\dfrac{3}{2}$; 6) -1; 7) $\dfrac{2}{3}$; 8) $\dfrac{1}{2}$; 9) $\dfrac{3}{2}$;

10) $\frac{4}{3}$.

✍**11.** *Знайти границю:*

11.1. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}\right)$;

11.2. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\ldots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}\right)$;

11.3. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{4\cdot 11}+\frac{1}{11\cdot 18}+\ldots+\frac{1}{(7n-3)(7n+4)}\right)$;

11.4. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2\cdot 9}+\frac{1}{9\cdot 16}+\ldots+\frac{1}{(7n-5)(7n+2)}\right)$.

Відповідь: 1) 1; 2) $\frac{1}{28}$; 3) $\frac{1}{28}$; 4) $\frac{1}{14}$.

✍**12.** *Довести, що*

12.1. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(2n-\frac{n+1}{n-2}\right)=+\infty$; 12.2. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2+n}{n+2}=+\infty$;

12.3. $\lim\limits_{n\to\infty}(2n+1)^3=+\infty$; 12.4. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n^2-\ln n\right)=+\infty$.

✍**13.** *Знайти границі даних послідовностей:*

1) $\left(\frac{1}{n}+\frac{2\sin^2 n}{n^2}\right)$; 2) $\left(\frac{1}{5n}\sin\frac{1}{n^2}-\frac{3n}{6n+4}\right)$;

3) $\left(\frac{8n}{n^2+3}\cos\frac{n+1}{2n-1}-\frac{(-1)^n\left(n^2+1\right)}{n^2(n+5)}\right)$; 4) $\left(\frac{1+2+3+\ldots+n}{n^2+1}\right)$;

5) $\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\ldots+\frac{1}{3^n}\right)$; 6) $\left(\frac{\sin n^2}{n}\right)$;

7) $\left(\frac{\cos n}{\sqrt{n}}\right)$; 8) $\left(\left(\frac{n}{2n^2-1}\right)\cos\frac{n}{2n^2-1}\right)$;

9) $\left(2^{-n}\arccos(-1)^n\frac{n+1}{2n}\right)$; 10) $\left(\frac{\ln n}{n}\,arctg(\ln n)\right)$;

11) $\left(\left(\sqrt[n]{2}-1\right)\dfrac{(-1)^n n^2}{n^2+1}\right)$; 12) $\left(\sin\sqrt{n+1}-\sin\sqrt{n}\right)$.

В: 1) 0; 2) $-\dfrac{1}{2}$; 3) 0; 4) $\dfrac{1}{2}$; 5) 1,5; 12) 0.

✍**14.** *Підберіть функцію, яка буде обмежена значенням границі* $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1^2+2^2+...+n^2}{1+2+...+n}-\dfrac{4n^2}{3(2n+1)}\right)$.

✍**15.** *Знайти число* m *таке, що* $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^{2005}}{n^m-(n-1)^m}=\dfrac{1}{2006}$.

✍**16.** *Нехай задано відрізок* AB. *Побудуємо послідовність точок* $\{M_n\}$ *так, що* $M_1=A$, $M_2=B$, *а кожна наступна точка є серединою відрізка* $[M_{n-1}M_n]$. *До якої точки відрізка AB збігається послідовність точок* $\{M_n\}$*?*

🕮 Практичне заняття №8

Тема: Обчислення границь числових послідовностей. Границя монотонної послідовності

✍**1. [15, с. 142]** *Знайти* $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$, *якщо:*

1.1. $x_n=0,\underbrace{11...1}_{n}$;

1.2. $x_1=0,4;\ x_2=0,45;\ x_3=0454;\ x_4=04545;...;\ X_{2k}=0,4545...45;...$;

1.3. $x_1=0,2;\ x_2=0,23;\ x_3=0,234;\ x_4=0,2342;\ x_5=0,23423;$
$x_6=0,234234;...$;

Відповідь: 1) $\dfrac{1}{9}$; 2) $\dfrac{5}{11}$; 3) $\dfrac{26}{111}$.

✍**2. [14, с. 101], [15, с. 135]** *Дослідити на збіжність числову послідовність, якщо:*

2.1. $x_n=\dfrac{1}{1^3}+\dfrac{1}{2^3}+\dfrac{1}{3^3}+...+\dfrac{1}{n^3}$;

2.2. $x_n=1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+...+\dfrac{1}{n}-\ln n$;

2.3. $x_n = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{3^n}$;

2.4. $x_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!}$;

2.5. $x_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n}$;

2.6. $x_n = 1 + \frac{2}{4} + \frac{3}{4^2} + \ldots + \frac{n}{4^{n-1}}$;

2.7. $x_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{4n}$;

2.8. $x_n = \left(1 - \frac{1}{2^2}\right)\left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$;

2.9. $x_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$;

2.10. $x_n = \frac{n!}{(2n+1)!!}$.

✍**3.** *Знайти границю:*

3.1. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{2n-9}$;

3.2. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2+n}{1+n}\right)^{1-5n}$;

3.3. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+1+n}{n^2+2}\right)^{2n}$;

3.4. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1 - \frac{4}{n}\right)^{3n}$;

3.5. $\lim\limits_{n\to\infty} 8n\big(\ln(n+3) - \ln(n+1)\big)$;

3.6. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2n+5}{2n-3}\right)^{3n-4}$.

Відповідь: 1) e^2; 2) e^{-5}; 3) e^2; 4) e^{-12}; 5) 16; 6) e^{12}.

✍**4.** *Знайти границю послідовності* (x_n), *заданої рекурентно:*

4.1. $x_1 = 5,\ x_{n+1} = \sqrt{5 + x_n},\ n \in \mathbb{N}$;

4.2. $x_1 = 0,\ x_{n+1} = \sqrt{6 + x_n},\ n \in \mathbb{N}$;

4.3. $x_1 = 13,\ x_{n+1} = \sqrt{12 + x_n},\ n \in \mathbb{N}$;

4.4. $x_1 = \sqrt{a},\ x_{n+1} = \sqrt{a + x_n},\ a > 0$;

4.5. $x_1 = 2,\ x_{n+1} = \frac{x_{n+1}}{3},\ n \in \mathbb{N}$;

4.6. $x_1 = \sqrt{2},\ x_{n+1} = \sqrt{2x_n},\ n \in \mathbb{N};$

4.7. $x_1 = \dfrac{a}{2},\ x_{n+1} = \dfrac{x_n^2 + a}{2},\ n \in \mathbb{N},\ a \in [0;1];$

4.8. $x_1 = 1,\ x_{n+1} = x_n^2 + a,\ n \in \mathbb{N},\ a \in \left[0; \dfrac{1}{4}\right];$

4.9. $x_1 = 1,\ x_{n+1} = 1 - \dfrac{1}{4x_n},\ n \in \mathbb{N};$

4.10. $x_1 = 0,\ x_{n+1} = \dfrac{1}{4(1 - x_n)},\ n \in \mathbb{N};$

4.11. $x_{n+2} = \dfrac{1}{2}(x_{n+1} + x_n),\ n \in \mathbb{N};$

4.12. $x_1 = \dfrac{1}{2},\ x_{n+1} = \dfrac{1}{2 - x_n},\ n \in \mathbb{N}.$

✍**5.** *[15, с. 161] Дослідити на збіжність послідовності* (x_n)*:*

5.1. $x_1 = 0,\ x_{n+1} = \dfrac{x_{n+1}}{x_{n+2}},\ n \in \mathbb{N};$ 5.2. $x_1 = \dfrac{1}{2},\ x_{n+1} = (1 - x_n)^2,\ n \in \mathbb{N}.$

✍**6.** *Нехай* $x_1 = a,\ 0 < a < 1,\ x_{n+1} = 1 + qx_n^2,\ n \in \mathbb{N}$. *При яких* $q \in [0;1]$ *послідовність* (x_n) *збіжна? [15, с. 161], [14, с.219]*

✍**8.** *[15, с. 161]Нехай* $x_1 > 0,\ x_{n+1} = \dfrac{1}{3}\left(2x_n + \dfrac{125}{x_n^2}\right),\ n \in \mathbb{N}$. *Довести, що існує* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$*, і знайти її.*

✍**9.** *[15, с. 161]Нехай* $x_1 = \sqrt{2},\ x_{n+1} = \sqrt{2 + \sqrt{x_n}},\ n \in \mathbb{N}$. *Довести, що послідовність* $\{x_n\}$ *збігається.*

✍**10.** *[15, с. 161]Довести, що:*

10.1. *Послідовність* $\{x_n\}$, *де* $x_1 = a,\ a > -1,\ x_{n+1} = \dfrac{1}{1 + x_n}$, *має границю, і знайти її.*

10.2. *У послідовності* $\{x_n\}$, *де* $x_1 = a,\ 0 < a < 1,\ x_{n+1} = 1 - x_n^2$, *її підпослідовності* $\{x_{2k}\}$ *та* $\{x_{2k-1}\}$ *мають границі, які є коренями рівняння* $x = x^2(2 - x^2)$.

✍**11. [15, с. 161]** *Дослідити на збіжність* $(n \in \mathbb{N})$*:*

11.1. $x_1 = -3,\ x_{n+1} = 1 + \dfrac{6}{x_n}$;

11.2. $x_1 = -\dfrac{7}{13},\ x_{n+1} = \dfrac{1 + x_n}{2x_n}$;

11.3. $x_1 = \dfrac{8}{17},\ x_{n+1} = \dfrac{1}{x_n} - \dfrac{3}{2}$;

11.4. $x_1 = \dfrac{6}{7},\ x_{n+1} = 4 - \dfrac{3}{x_n}$.

✍**12. [15, с. 161]** *Нехай* $x_1 > 0,\ x_{n+1} = \dfrac{a}{x_n} + b,\ n \in \mathbb{N}$, *де* $a > 0, b > 0$. *Довести, що послідовність* $\{x_n\}$ *збігається, і знайти її границю.*

✍**13. [15, с. 161]** *Нехай* $a \in \mathbb{R},\ x_1 = \dfrac{a}{2},\ x_{n+1} = \dfrac{a}{2} + \dfrac{x_n^2}{2}$. *Знайти всі значення* a, *при яких послідовність* $\{x_n\}$ *збігається, і знайти її границю.*

✍**14. [15, с. 161] 14.1.** *Нехай* $0 < x_1 < 1,\ x_{n+1} = x_n\left(2 - x_n\right),\ n \in \mathbb{N}$*:*

а) довести, що послідовність $\{x_n\}$ збігається і $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1$;

б) дослідити послідовність $\{x_n\}$ на збіжність, якщо $x_1 \notin (0; 1)$.

14.2. *Нехай* $0 < x_1 < \dfrac{1}{a},\ x_{n+1} = x_n\left(2 - ax_n\right),\ n \in \mathbb{N}$, *де* $a > 0$. *Довести, що послідовність* $\{x_n\}$ *збігається і* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \dfrac{1}{a}$.

14.3. *Нехай* $0 < x_1 < a,\ x_{n+1} = x_n\left(a - x_n\right),\ n \in \mathbb{N}$. *Довести, що:*

а) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a - 1$ при $a > 1$;

б) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$ при $0 < a \le 1$.

✍**15. [15, с. 161]** *Послідовності* $\{x_n\}$ *та* $\{y_n\}$ *задовольняють умови:*

15.1. $x_1 = a > 0,\ y_1 = b > 0,\ x_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(x_n + y_n\right),\ y_{n+1} = \sqrt{x_n y_n},\ n \in \mathbb{N}$;

15.2. $x_1 = a > 0,\ y_1 = b > 0,\ x_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(x_n + y_n\right),\ y_{n+1} = \dfrac{2x_n y_n}{x_n + y_n},\ n \notin \mathbb{N}$.

Довести, що послідовності $\{x_n\}$ *та* $\{y_n\}$ *збігаються і* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} y_n$.

У випадку 15.2 знайти цю границю.

✍**16. [15, с. 162]** *При яких* a *і* b *з* $\mathbb{R}$ *збігається (відповідно розбігається) послідовність* $\{x_n\}$, *якщо* $x_1 = a,\ x_2 = b$ *і:*

16.1. $x_{n+2} = 2x_{n+1} - x_n$;

16.2. $x_{n+2} = 4x_{n+1} - 3x_n$;

16.3. $x_{n+2} = -2x_{n+1} - x_n$;

16.4. $x_{n+2} = x_{n+1} + 2x_n,\ n \in \mathbb{N}$.

✍**17. [15, с. 162]** *Нехай* $x_1 = a,\ x_{n+1} = \dfrac{x_n}{4 - x_n},\ n \in \mathbb{N}$. *Довести, що послідовність* $\{x_n\}$ *має границю, і знайти її, якщо:*

17.1. $0 < a < 3$; 17.2. $3{,}5 < a < 4$.

✍**19. [15, с.162]** *Довести, що послідовність* $x_1 = a,\ x_{n+1} = \dfrac{x_n}{2 + x_n},\ n \in \mathbb{N}$, *має границю, і знайти її, якщо:*

19.1. $a < 0$; 19.2. $a < -2$; 19.3. $-1 < a < 0$.

✍**20. [15, с.162]** *Довести, що послідовність* $x_1 = a,\ x_{n+1} = 1 + \dfrac{b}{x_n},\ n \in \mathbb{N}$, *де* $b < -\dfrac{1}{4}$, *розбігається.*

✍**21. [15, с. 162]** *Нехай* $x_1 = a,\ x_{n+1} = x_n^2 + 3x_n + 1,\ n \in \mathbb{N}$. *З'ясувати, чи має ця послідовність границю (скінченну або нескінченну), і знайти її, якщо:*

21.1. $a = -\dfrac{5}{4}$; 21.2. $a = -\dfrac{3}{4}$; 21.3. $a = -\dfrac{7}{4}$; 21.4. $a = -\dfrac{9}{4}$.

⌛ Контрольна робота №1 (70 балів) (зразок)

✍**1.** *Побудувати графік функції* $y = \arcsin(\sin x)$.

✍**2.** *Побудувати графік функції* $y = \dfrac{1}{3}\log_2(2x-1) + 4$.

✍**3.** *Побудувати графік функції* $y = \arccos|x-2|$.

✍**4.** *Довести, що* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ *(вказати* $n_0(\varepsilon)$*):* $a_n = \dfrac{3n-2}{2n-1},\ a = \dfrac{3}{2}$.

✍**5.** *Обчислити границі числових послідовностей:*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(3-n)^2 + (3+n)^2}{(3-n)^2 - (3+n)^2}.$$

✍**6.** *Обчислити границі числових послідовностей:*

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\sqrt{n^2+1} - \sqrt{n^2-1}\right).$$

✍**7.** *Обчислити границі числових послідовностей:*

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n+3}{2n+1}\right)^{n+1}.$$

МОДУЛЬ 2

🕮 Практичне заняття №10

Тема: Границя функції. Обчислення границі функції, виходячи з означення. Односторонні границі.

✍**1. [13, с. 93], [12, с. 80]** *Для заданих функцій* $f(x)$ *і точки* x_0 *знайти границю* $A=\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ *і* $\forall\varepsilon>0$ *вказати* $\delta>0$ *таке, що* $\forall x: 0<|x-x_0|<\delta \Rightarrow |f(x)-A|<\varepsilon$*:*

1.1. $f(x)=3x-2,\ x_0=1,\ \varepsilon=0{,}1;\ \varepsilon=0{,}01;\ \varepsilon=0{,}001.$

1.2. $f(x)=x^3,\ x_0=2,\ \varepsilon=0{,}1;\ \varepsilon=0{,}01;\ \varepsilon=0{,}001.$

1.3. $f(x)=\dfrac{2x+1}{x+3},\ x_0=-1,\ \varepsilon=0{,}1;\ \varepsilon=0{,}01;\ \varepsilon=0{,}001.$

1.4. $f(x)=\dfrac{x-1}{2(x+1)},\ x_0=3,\ \varepsilon=0{,}1;\ \varepsilon=0{,}01;\ \varepsilon=0{,}001.$

1.5. $f(x)=\dfrac{1}{x^2+1},\ x_0=\infty,\ \varepsilon=0{,}2.$

1.6. $f(x)=\dfrac{x^2}{x^2+4},\ x_0=\infty,\ \varepsilon=0{,}1.$

1.7. $f(x)=4x-3,\ x_0=2,\ \varepsilon=0{,}1;\ \varepsilon=0{,}01;\ \varepsilon=0{,}001.$

1.8. $f(x)=\sqrt{x+4},\ x_0=5,\ \varepsilon=0{,}1;\ \varepsilon=0{,}01;\ \varepsilon=0{,}001.$

1.9. $f(x)=\dfrac{x+1}{2x+1},\ x_0=\infty,\ \varepsilon=0{,}1;\ \varepsilon=0{,}01;\ \varepsilon=0{,}001.$

1.10. $f(x)=\sqrt{x^2+1}-x,\ x_0=+\infty,\ \varepsilon=0{,}1;\ \varepsilon=0{,}01;\ \varepsilon=0{,}001.$

✍**2.** *Довести (знайти* $\delta(\varepsilon)$*):*

2.1. $\lim\limits_{x\to\frac{1}{3}}\dfrac{6x^5-5x+1}{x-\frac{1}{3}}=-1.$

2.2. $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\dfrac{2x^2-7x+3}{x-\frac{1}{2}}=-5.$

2.3. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^3-3x^2}{x-3}=9.$

2.4. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x^2-4x+1}{x-1}=2.$

✍**3.** *Довести, що не існують границі функцій* $f(x)=\sin x$ *і* $\varphi(x)=tgx$ *при* $x\to\infty,\ x\to+\infty,\ x\to-\infty$**.**

✍**4.** *Довести, що не існують границі функцій у точці* x_0 :

4.1. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{x-1}$.

4.2. $\lim\limits_{x\to 0}2^{\frac{1}{x}}$.

4.3. $f(x)=\begin{cases}2, & x\ge 0,\\ -2, & x<0,\end{cases}$ $x_0=0$.

4.4. $f(x)=sign\,x^2$, $x_0=0$.

4.5. $f(x)=\begin{cases}1, & x\ge 0,\\ x-2, & x<0,\end{cases}$ $x_0=0$.

4.6. $f(x)=\cos\dfrac{1}{x}$, $x_0=0$.

✍**5. [11, с. 119]** *Перевірити, чи має ліву і праву границі у точці* $x=a$ *функція:*

5.1. $y=\dfrac{x}{|x|}$, $x=0$.

5.2. $y=\operatorname{sgn}x$, $x=0$.

5.3. $y=[x]$, $x=-1$.

5.4. $f(x)=\begin{cases}x\sin\dfrac{1}{x}, & x\ne 0,\\ 2, & x=0,\end{cases}$ $x=0;\ x=\pi$.

5.5. $y=(0,5)^{\frac{1}{x}}$, $x=0$.

5.6. $y=arctg(tgx)$, $x=0;\ x=\dfrac{\pi}{2};\ x=\pi$.

5.7. $y=\dfrac{1}{(x-1)^2}$, $x=1$.

5.8. $y=\dfrac{4x+3}{64x^2+27}$, $x=-\dfrac{3}{4}$.

5.9. $f(x)=\begin{cases}1+x, & x>0,\\ 1-x, & x\le 0,\end{cases}$ $x=0;\ x=1$.

5.10. $f(x)=\begin{cases}e^x, & x<0,\\ b+x, & x\ge 0,\end{cases}$ $x=0;\ x=1$.

🕮 Практичне заняття №11
Тема: Нескінченно малі і нескінченно великі функції

✍**1.** *Знайти границю функції:*

1.1. $\lim\limits_{x\to 1}\left(2x^2+3x-4\right)$.

1.2. $\lim\limits_{x\to 2}\left(x\sqrt{x+2}-x^2-x\right)$.

1.3. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x+4}{6-5x}$.

1.4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2+3x+6}{x+2}$.

1.5. $\lim\limits_{x\to 2}(3x)^{x^2}$.

1.6. $\lim\limits_{x\to 1}\left(2x^2\right)^{\lg x}$.

1.7. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\left(x^3+2\cos x\right)$.

1.8. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x^2+3x}-x^3}{tg\dfrac{\pi x}{4}+2x}$.

Відповідь: 1) 1; 2) –2; 3) 7; 4) 3; 5) 6^4; 6) 1; 7) $\dfrac{\pi^3}{64}+\sqrt{2}$; 8) $\dfrac{1}{3}$.

✍**2. [11, с.132]** *Знайти точку, в якій функція* $y=f(x)$ *має границею число* A*:*

2.1. $f(x)=\left(x^2-6x\right)^2-2(x-3)^2$, $A=81$.

2.2. $f(x)=7\left(x+\dfrac{1}{x}\right)-2\left(x^2+\dfrac{1}{x^2}\right)$, $A=9$.

2.3. $f(x)=\dfrac{(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)}{(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)}$, $A=1$.

2.4. $f(x)=\dfrac{\log_2\left(9-2^x\right)}{3-x}$, $A=1$.

Відповідь: 1) 3; $3\pm 2\sqrt{5}$; 2) 2; $\dfrac{1}{2}$; 3) 0; 4) 0.

✍**3. [12]** *Знайти границю функції:*

3.1. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x-2}$.

3.2. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-3x-2}{x^3-8}$.

3.3. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-5x+6}{x^3-2x^2-x-2}$.

3.4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^5-(1+5x)}{x^2+x^5}$.

3.5. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^3-2x^2+x-1}{x^3-x^2+3x-3}$.

3.6. $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{2x^2-11x-21}{x^2-9x+14}$.

3.7. $\lim\limits_{x\to -5}\dfrac{\left(x^2+2x\right)^2-14\left(x^2+2x\right)-15}{x^4-29x^2+100}$.

3.8. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^m-1}{x^n-1}$.

3.9. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-3x^{11}+2}{x^{50}+2x^{30}-3}$.

3.10. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(x^2+1\right)^5-\left(1-3x^2\right)^6}{3x^2-x^3}$.

3.11. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\left(x^n-a^n\right)-na^{n-1}(x-a)}{(x-a)^2}$.

3.12. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^{101}-101x+100}{x^2-2x+1}$.

Відповідь: 1) 4; 2) $\frac{3}{4}$; 3) $-\frac{1}{3}$; 4) 10; 5) $\frac{3}{4}$; 6) $\frac{17}{5}$; 7) $\frac{64}{105}$; 8) $\frac{m}{n}$; 12) 5050.

✍**4.** *Знайти границю функції:*

4.1. $\lim\limits_{x\to 3}\frac{\sqrt{x-2}-1}{x-3}$.

4.2. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}$.

4.3. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt{5-x}-2}{\sqrt{2-x}-1}$.

4.4. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1-x}-\sqrt[3]{1+x}}{x}$.

4.5. $\lim\limits_{x\to -8}\frac{\sqrt{1-x}-3}{2+\sqrt[3]{x}}$.

46. $\lim\limits_{x\to \pi}\frac{\sqrt{1-tgx}-\sqrt{1+tgx}}{\sin 2x}$.

4.7. $\lim\limits_{x\to -1}\frac{1+\sqrt[3]{x}}{1+\sqrt[5]{x}}$. (Заміна $x=z^{15}$).

4.8. $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x-\sqrt{3x-2}}{x^2-4}$.

Відповідь: 1) $\frac{1}{2}$; 2) –3; 3) $\frac{1}{2}$; 4) $-\frac{2}{3}$; 5) –2; 6) $-\frac{1}{2}$; 7) $\frac{5}{3}$; 8) $\frac{1}{16}$.

✍**5. [14, с.326]** *Знайти границю функції:*

5.1. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^2-3x+4}{1-x-x^2}$.

5.2. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x+4+\sin x}{x-2}$.

5.3. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(1+x)(1+2x)\cdot\ldots\cdot(1+10x)}{x^{10}+1}$.

5.4. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\sqrt{x+1}}$.

5.5. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(2x-1)^{15}(3x-1)^{31}}{\left(x^2+13x+4\right)^{23}}$.

5.6. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2+2}-\sqrt[3]{8x^3+x}}{\sqrt{x^2+5}}$.

5.7. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(x+5)^5+(x+6)^5+(x+7)^5}{x^5+5^5}$.

5.8. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(x+1)^2(3-7x)^2}{(2x-1)^4}$.

5.9. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x-1)^{20}(2x+3)^{15}}{(3x+17)^{35}}$.

5.10. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)^{20}-\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)^{20}}{x^{20}}$.

Відповідь: 1) –2; 2) 2; 3) 10!; 4) 1; 5) $2^{15}\cdot 3^{31}$; 7) 3; 8) $\dfrac{49}{16}$; 9) $\dfrac{2^{15}}{3^{35}}$; 10) 2^{20}.

✍**6.** *Знайти границю функції:*

6.1. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x-\sqrt{x^2+x+2}\right)$.

6.2. $\lim\limits_{x\to2}\left(\dfrac{1}{x(x-2)^2}-\dfrac{1}{x^2-3x+2}\right)$.

6.3. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+3x^2+4x}-\sqrt[3]{x^3-3x^2+4}\right)$.

6.4. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+\sqrt{x^2+\sqrt{x^2}}}-\sqrt{x^2}\right)$.

6.5. $\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{m}{1-x^m}-\dfrac{n}{1-x^n}\right)$, $m, n\in\mathbb{N}$. (Заміна $x-1=y$.)

6.6. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^4+2x^2-1}-\sqrt{x^4-2x^2-1}\right)$.

🕮Практичне заняття №12

Тема: Техніка знаходження границь функцій. Таблиця „чудових” границь

✍**1. [12]** *Знайти границю функції:*

1.1. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 3x}{x}$.

1.2. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 7x-\sin 3x}{\sin 2x}$.

1.3. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{tgx-\sin x}{\sin^3 x}$.

1.4. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{tg2x}{\arcsin 3x}$.

1.5. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\sqrt{\cos x}}{1-\cos\sqrt{x}}$.

1.6. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos^3 x}{x-\sin 2x}$.

1.7. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos 3x}{x\cdot tg2x}$.

1.8. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 4x}{\sqrt[4]{x+1}-1}$.

1.9. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\sqrt[3]{tgx}-1}{2\sin^2 x-1}$.

1.10. $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{\sin(x-2)}{x^2-4}+2^{\frac{1}{(x-2)^2}}\right)$.

1.11. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\dfrac{\sin\left(x-\dfrac{\pi}{6}\right)}{1-4\sin^2 x}$.

1.12. $\lim\limits_{x\to-\frac{\pi}{3}}\dfrac{\sin\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)}{1-8\cos^3 x}$.

1.13. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\dfrac{1-\sqrt[3]{\sin 3x}}{\sqrt{tg\dfrac{3x}{2}-1}}$.

1.14. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{tgx}-\sqrt{tg1}}{\sqrt[3]{\sin x}-\sqrt[3]{\sin 1}}$.

Відповідь: 1) 3; 2) 2; 3) 1; 4) $\dfrac{2}{3}$; 5) 0; 6) ∞; 7) $\dfrac{9}{4}$; 8) 16.

✍**2. [11, с.133]** *Знайти границю функції:*

2.1. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{e^x-e^a}{x-a}$.

2.2. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\ln x-\ln a}{x-a}$.

2.3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{10^x-1}{2^x-1}$.

2.4. $\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(\ln(x+1)-\ln x\right)$.

2.5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3^{tg3x}-1}{\sin 3x}$.

2.6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1+x}-1}{2x}$.

2.7. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2^x-\sqrt{1+x}}{x}$.

2.8. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\sin 5x}-e^{\sin x}}{\ln(1+2x)}$.

2.9. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^2}-\cos x}{\sin^2 x}$.

2.10. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^2}-1}{\sqrt{1+\sin x^2}-1}$.

2.11. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{arctg\left(x^2+2x\right)}{\arcsin 2x}$.

2.12. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\cos 2x}{\ln\cos 5x}$.

2.13. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln tg\left(\dfrac{\pi}{4}+4x\right)}{x}$.

2.14. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\left(1+3x+x^2\right)+\ln\left(1-3x+x^2\right)}{x^2}$.

2.15. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln\left(2+e^{3x}\right)}{\ln\left(3+e^{2x}\right)}$.

2.16. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^2}-1}{\sqrt{1+\sin x^2}-1}$.

✍**3. [15, с.188]** *Знайти границю функції:*

4.1. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+4}{x^2-4}\right)^{x^2}$.

4.2. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\sqrt{1+x}-x\right)^{\frac{1}{x}}$.

4.3. $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+3x^4\right)^{\frac{1}{\sin^2 x}}$.

4.4. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(1+ctgx\right)^{tgx}$.

4.5. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\cos x\right)^{-\frac{1}{x^2}}$.

4.6. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\sin x\right)^{tg^2 x}$.

4.7. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\cos 6x\right)^{ctg^2 x}$.

4.8. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\ln\left(e+x\right)\right)^{ctgx}$.

4.9. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{xe^x+1}{x\pi^x+1}\right)^{\frac{1}{x^2}}$.

4.10. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\cos x+arctg^2 x\right)^{\frac{1}{arctg\, x^2}}$.

Відповідь: 1) e^8; 2) $\dfrac{1}{\sqrt{e}}$; 3) e^3; 4) e; 5) $\sqrt{e}$; 6) $\dfrac{1}{\sqrt{e}}$; 7) e^{-18}; 8) $e^{\frac{1}{e}}$; 9) $\dfrac{e}{\pi}$; 10) $\sqrt{e}$.

✍**4. [15]** *Знайти значення* α *і* β*, при яких функція є нескінченно малою:*

4.1. $f(x)=\ln\left(1+e^{3x}\right)-\alpha x-\beta,\ x\to+\infty;\ x\to-\infty.$

4.2. $f(x)=xarctgx-\alpha x-\beta,\ x\to+\infty;\ x\to-\infty.$

4.3. $f(x)=x^{\alpha}\sin\dfrac{1}{x^{\beta}},\ x\to+0.$

4.4. $f(x)=\dfrac{\ln\left(1+x^{\alpha}\right)}{x^{\beta}},\ x\to+0.$

4.5. $f(x)=x^{\alpha}arctg\dfrac{1}{x^{\beta}},\ x\to+0.$

4.6. $f(x)=\left(1-x^{\alpha}\right)^{x^{\beta}},\ x\to+0.$

✍**5. [15]** *Знайти значення* α *і* β*, при яких функції* $f(x)$ *і* $g(x)=\alpha x^{\beta}$ *еквівалентні:*

5.1. $f(x)=\sqrt{2x+\sqrt{x+\sqrt{x}}},\ x\to+0;\ x\to+\infty.$

5.2. $f(x)=\sqrt{1-2x}-\sqrt[3]{1-3x},\ x\to 0.$ (Вказівка. Використати формулу Тейлора).

5.3. $f(x)=2e^{x^4}+\left(\cos x-1\right)^2+x^5-2,\ x\to 0.$

5.4. $f(x)=\sin^2 2x+\arcsin^2 x+2arctgx^2,\ x\to 0.$

5.5. $f(x)=1-\cos\left(1-\cos\dfrac{1}{x}\right),\ x\to\infty.$

✍**6. [12, с. 92]** *1) Визначити, які із наступних функцій при* $x \to 0$ *будуть нескінченно малими одного порядку, вищого порядку, нижчого порядку у порівнянні з* x*; 2) визначити порядок малості у порівнянні із нескінченно малою* $\beta(x) = x$*:*

6.1. $\alpha(x) = -\frac{x}{2}.$

6.2. $\alpha(x) = \sqrt[3]{\sin x}.$

6.3. $\alpha(x) = x + \sqrt[3]{\sin x}.$

6.4. $\alpha(x) = \sqrt{1+2x} - \sqrt{1-x}.$

6.5. $\alpha(x) = tgx - \sin x.$

6.6. $\alpha(x) = \sqrt{4+x} - 2.$

6.7. $\alpha(x) = \frac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt{1+x}}.$

6.8. $\alpha(x) = tg\sqrt[3]{x\sqrt[3]{x}}.$

6.9. $\alpha(x) = \lg\left(1 - \frac{1}{2}\sin x\right).$

6.10. $\alpha(x) = \sqrt{1-2x} - \sqrt[3]{1-3x}.$

Відповідь: 1) 6.1, 6.4, 6.6, 6.7, 6.9 – одного порядку; 6.5, 6.6 – вищого порядку; 6.2, 6.3, 6.8 – нижчого порядку; 2) 6.2, 6.3 – порядок 2; 6.5 – порядок 3; 6.8 – порядок $\frac{4}{9}$; 6.10 – порядок 2.

✍**7. [12, с. 93]** *Визначити порядок малості наступних нескінченно малих функцій відносно нескінченно малої функції* $\beta(x) = x - 1$ *при* $x \to 1$*:*

7.1. $\alpha(x) = x^3 + 2x - 3.$

7.2. $\alpha(x) = \ln\left(x^2 + 2x - 2\right).$

7.3. $\alpha(x) = \sqrt{1-\sqrt{x}}.$

7.4. $\alpha(x) = x^x - 1.$

Відповідь: 1), 2), 3), 4) нескінченно малі першого порядку.

✍**8. [12, с. 93]** *Визначити порядок наступних нескінченно великих функцій відносно нескінченно великої функції* $\beta(x) = x$*:*

8.1. $\alpha(x) = 3x^2 + 5x - 3.$

8.2. $\alpha(x) = \frac{3x^3}{1-2x+x^2}.$

8.3. $\alpha(x) = \sqrt[5]{x^3 - \sqrt{x}} + \sqrt{x}.$

8.4. $\alpha(x) = \ln\left(2 + e^{3x^2}\right).$

8.5. $\alpha(x) = \sqrt{3+\sqrt{x}}.$

Відповідь: 1), 4) другого порядку; 2) першого порядку; 3) порядку $\frac{3}{5}$; 5) порядку $\frac{1}{4}$.

✍**9. [12, с. 93]** *При* $x \to 1$ *наступні функції є нескінченно великими. Визначити їх порядок у порівнянні із нескінченно великою функцією* $\beta(x) = \dfrac{1}{x-1}$, $x \to 1$*:*

9.1. $\alpha(x) = \dfrac{x^2}{x^3-1}$.

9.2. $\alpha(x) = \dfrac{\sin x}{\sqrt[3]{1-x^2}}$.

9.3. $\alpha(x) = \sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$.

9.4. $\alpha(x) = \dfrac{1}{\sin \pi x}$.

9.5. $\alpha(x) = \dfrac{1}{e^{\cos\frac{\pi}{2}x} - 1}$.

Відповідь: 1) другого порядку; 2) першого порядку; 3) першого порядку; 4) порядку $\dfrac{2}{3}$.

🕮 Практичне заняття №13

Тема: Функції, неперервні в точці, їх властивості

✍**1. [12]** *Виходячи з означення* ($\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$)*, довести неперервність функцій:*

1.1. $y = 3x^2 - 2x + 1,\ x \in \mathbb{R}$.

1.2. $y = \dfrac{x^3 + x - 1}{2x^2 + 3x - 5},\ x \in (2;\, 3)$.

1.3. $y = \cos(ax + b),\ x \in \mathbb{R}$.

1.4. $y = \dfrac{x^2 \cos x}{1 + \sin^2 x},\ x \in \mathbb{R}$.

✍**2. [12]** *Виходячи з означення неперервності функції в термінах „*$\varepsilon - \delta$*”, довести неперервність функцій:*

2.1. $y = \dfrac{x+3}{2-3x},\ x_0 = \dfrac{1}{2}$.

2.2. $y = \sqrt{x},\ x_0 \in D(y)$.

2.3. $y = tgx,\ x_0 \in D(y)$.

2.4. $y = \dfrac{1}{x^2},\ x_0 \in D(y)$.

✍**3. [12]** *Виходячи з означення неперервності функції* ($\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$)*, довести неперервність функцій:*

3.1. $y = x^2 + 3x + 1,\ x_0 \in \mathbb{R}$.

3.2. $y = 2^x,\ x_0 \in \mathbb{R}$.

3.3. $y = \arcsin x,\ x_0 \in (-1;\, 1)$.

3.4. $y = \sqrt[3]{x},\ x_0 \in \mathbb{R}$.

✍**4. [12]** *Знайти односторонні границі функцій:*

4.1. $f(x)=\begin{cases} x+1, & x\le 2, \\ -2x+1, & x>2, \end{cases}$ $x_0=2.$

4.2. $f(x)=\dfrac{\sin x}{|x|},\ x_0=0.$

4.3. $f(x)=\dfrac{x^3-1}{|x-1|},\ x_0=1.$

4.4. $f(x)=\dfrac{\sqrt{1-\cos 2x}}{x},\ x_0=0.$

4.5. $f(x)=\cos\dfrac{\pi}{x},\ x_0=0.$

4.6. $f(x)=x+\dfrac{2}{1+2^{\frac{1}{2-x}}},\ x_0=2.$

4.7. $f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{x-2}, x<0, \\ 1, & x=0, \\ x, & 0<x<1, \\ -2x, & 1\le x\le 2, \end{cases}$ $x_0=0,\ x_0=1.$

4.8. $f(x)=\dfrac{\cos x}{3-2^{\frac{1}{\sin x}}},\ x_0=0.$

✍**5. [13, с.116]** *Дослідити на неперервність композиції $f\circ g$ і $g\circ f$:*

5.1. $f(x)=\operatorname{sgn} x,\ g(x)=1+x^2.$

5.2. $f(x)=\operatorname{sgn} x,\ g(x)=x(1-x^2).$

5.3. $f(x)=\operatorname{sgn}(x-1),\ g(x)=\operatorname{sgn}(x+1).$

✍**6. [11]** *Знайти множину точок неперервності функцій:*

6.1. $f(x)=x^2-2x-3.$

6.2. $f(x)=\dfrac{x^2+1}{2x^3-3x^2-3x+2}.$

6.3. $f(x)=\sqrt{9-4x^2}.$

6.4. $f(x)=\dfrac{x-1}{\sqrt{x^2-1}}.$

6.5. $f(x)=\sin x+tgx.$

6.6. $f(x)=\sqrt{\sin^3 x}.$

6.7. $f(x)=\arcsin\dfrac{2x}{x^2+1}.$

6.8. $f(x)=x^{\frac{1}{tgx}}.$

✍**7.** *Виходячи з неперервності показникової функції, довести неперервність функцій:*

7.1. $y = chx.$

7.2. $y = thx.$

7.3. $y = cthx.$

7.4. $y = \log_a x,\ a > 0,\ a \neq 1.$

✍**8.** *Виходячи з неперервності тригонометричних функцій, довести неперервність обернених тригонометричних функцій:*

8.1. $y = \arcsin x.$

8.2. $y = \arccos x.$

8.3. $y = \operatorname{arc} tgx.$

8.4. $y = \operatorname{arc} ctgx.$

✍**9.** *Довести, що якщо $f(x)$ – неперервна функція, то неперервними будуть:*

9.1. $y = |f(x)|.$

9.2. $y = f(|x|).$

✍**10. [15]** *Знайти значення a, при якому функція $f(x)$ буде неперервною:*

10.1. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{(1+x)^n - 1}{x}, & x \neq 0,\ n \in N, \\ a, & x = 0. \end{cases}$

10.2. $f(x) = \begin{cases} xctg2x, & x \neq 0,\ |x| < \dfrac{\pi}{2}, \\ a, & x = 0. \end{cases}$

10.3. $f(x) = \begin{cases} (\pi + 2x)tgx, & x \neq -\dfrac{\pi}{2},\ -\pi < x < \dfrac{\pi}{2}, \\ a, & x = -\dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$

10.4. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{c^x - 1}{x}, & x \neq 0,\ c > 0, \\ a, & x = 0. \end{cases}$

10.5. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{shx}{x}, & x \neq 0, \\ a, & x = 0. \end{cases}$

10.6. $f(x) = \begin{cases} x \ln x^2, & x \neq 0, \\ a, & x = 0. \end{cases}$

10.7. $f(x)\begin{cases}\cos x, & x \le 0,\\ a(x-1), & x > 0,\end{cases}$ $x_0 = 0.$

🕮Практичне заняття № 14

Тема: Точки розриву, їх класифікація.

Самостійна робота №2

✍**1. [15]** *Дослідити функцію на неперервність, встановити характер точок розриву і побудувати графік:*

1.1. $y=\begin{cases}x^2+2, & x\le 0,\\ x-1, & x>0.\end{cases}$

1.2. $y=\begin{cases}-\dfrac{1}{x}, & x<0,\\ 5x-x^2, & x\ge 0.\end{cases}$

1.3. $y=\begin{cases}1-x^3, & x<0,\\ (x-1)^3, & 0\le x\le 2\\ 4-x, & x>2.\end{cases}$

1.4. $y=\begin{cases}2^x, & -1\le x<1,\\ 1, & x=1,\\ x-1, & x>1.\end{cases}$

1.5. $y=\begin{cases}\cos x, & -\dfrac{\pi}{2}\le x<\dfrac{\pi}{4},\\ 1, & x=\dfrac{\pi}{4},\\ x^2-\dfrac{\pi^2}{16}, & \dfrac{\pi}{4}<x\le\pi.\end{cases}$

1.6. $y=\begin{cases}-x, & x\le -1,\\ \dfrac{2}{x-1}, & x>-1.\end{cases}$

1.7. $y=\begin{cases}\dfrac{1}{x-1}, & x<0,\\ (x+1)^2, & 0\le x\le 2,\\ 1-x, & x>2.\end{cases}$

1.8. $y=x-E(x).$

1.9. $y=\dfrac{1}{x-E(x)}.$

1.10. $y=\dfrac{(x+1)^2-(x-1)^2}{x^2-x}.$

✍**2.** [15] *Знайти точки розриву функції, встановити їх рід, до визначити функцію в точках усувного розриву, знайти стрибки в точках розриву I роду:*

2.1. $y=\dfrac{x}{x^2+x-6}.$

2.2. $y=\dfrac{1}{x^3-3x^2-4x}.$

2.3. $y=\dfrac{\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x+1}}{\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{x}}.$

2.4. $y=\dfrac{x}{\cos x}$.

2.5. $y=\dfrac{\arcsin x}{\sin 2x}$.

2.6. $y=\dfrac{\cos\frac{\pi x}{2}}{x^3-x^2}$.

2.7. $y=\dfrac{2}{1-2^x}$.

2.8. $y=\lg\left(x^2+3x\right)$.

2.9. $y=\dfrac{1}{\ln|x-1|}$.

2.10. $y=\operatorname{sgn}\left(x^2-2x-3\right)$.

2.11. $y=\operatorname{sgn}\left(\cos x\right)$.

2.12. $y=\arcsin\dfrac{1}{x}$.

2.13. $y=(-1)^{\left[\frac{1}{x}\right]}$.

2.14. $y=arcctg\dfrac{1}{x^2}$.

2.15. $y=\dfrac{3^{\frac{1}{x}}+2^{\frac{1}{x}}}{3^{\frac{1}{x}}-2^{\frac{1}{x}}}$.

✍**3.** *Дослідити на неперервність і побудувати графік функції* $f(x)$*:*

3.1. $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{1+x^n}$.

3.2. $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^{2n}-1}{x^{2n}+1}$.

3.3. $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\cos^n x$.

3.4. $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x+e^{nx}}{1+xe^{nx}}$.

3.5. $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}x\,arctg\left(nctgx\right)$.

3.6. $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{x^n+x^{2n}}$.

⌛ Самостійна робота №2 (35 балів) (зразок)

✍**1.** *Довести (знайти $\delta(\varepsilon)$), що:* $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3x^2-5x-2}{x-2}=7$.

✍**2.** *Обчислити границю функції:* $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3+5x^2+7x+3}{x^3+4x^2+5x+2}$.

✍**3.** *Обчислити границю функції:* $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-3x+2}{\sqrt{5-x}-\sqrt{x+1}}$.

✍**4.** *Обчислити границю функції:* $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x-1}{2x+4}\right)^{-x}$.

✍**5.** *Обчислити границю функції:* $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{e^{3x}-1}{x}\right)^{\cos^2(\pi/4+x)}$.

🕮Практичне заняття №15

Тема: Властивості функцій, неперервних на відрізку. Рівномірна неперервність

✍**1. [15, с.247]** *Довести, що функція* $f(x)$ *рівномірно неперервна:*

1.1. $f(x)=\sin x$ на $\mathbb{R}$.

1.2. $f(x)=\dfrac{1}{x}$ на $[a;+\infty)$, $a>0$.

1.3. $f(x)=\sqrt{x}$ на $[0;+\infty)$.

1.4. $f(x)=2x-1$ на $\mathbb{R}$.

✍**2.** *Довести, що функція* $f(x)$ *не є рівномірно неперервною на* X*:*

2.1. $f(x)=\dfrac{1}{x}$, $X=(0;a]$, $a>0$.

2.2. $f(x)=x^2$, $X=\mathbb{R}$.

2.3. $f(x)=\cos\dfrac{1}{x}$, $X=(0;1)$.

2.4. $f(x)=\ln x$, $X=(0;1)$.

✍**3. [11]** *Знайти множину значень функції на* X*:*

3.1. $f(x)=\sin^4 x+\cos^4 x$, $X=[0;\pi]$.

3.2. $f(x)=x^2-2x-3$, $X=[-2;2]$.

3.3. $f(x)=\dfrac{x+3}{x-5}$, $X=[0;1]$.

3.4. $f(x)=\left|\dfrac{1-|x|}{1+|x|}\right|$, $X=[0;2]$.

3.5. $f(x)=4^x+4^{-x}$, $X=[-1;1]$.

3.6. $f(x)=\log_2(5+\sin x)$, $X=[0;2\pi]$.

3.7. $f(x)=\dfrac{x^2-5x+1}{x^2-5x+4}$, $X=[2;3]$.

✍**4. [11]** *Довести, що рівняння має принаймні один корінь:*

4.1. $3\sin^2 x-5\sin x+1=0$.

4.2. $x^3-|x|+3=0$.

4.3. $\ln x+x=0$.

4.4. $8^x-3\cdot 2^x-16=0$.

4.5. $x\arcsin x-1=0$.

4.6. $2\sqrt{2x^2-x+1}-x-3=0$.

✍**5. [15]** *Довести, що рівняння* $x^3-3x^2+6x-1=0$ *має тільки один корінь. Знайти цей корінь з точністю до* $0{,}1$.

✍**6.** *Довести, що рівняння* $x^4+3x^2-x-2=0$ *має тільки два дійсних корені.*

✍**7. [11]** *Довести, що: 1) будь-який многочлен непарного степеня має принаймні один дійсний корінь; 2) многочлен парного степеня,* *який має значення за знаком, протилежне до знаку коефіцієнта при x у найвищому степені, має принаймні два корені.*

✍**8. [15, с. 213]** *Довести, що:*

8.1. Рівняння $\frac{a_1}{x-\lambda_1}+\frac{a_2}{x-\lambda_2}+\frac{a_3}{x-\lambda_3}=0$, де $a_i>0, i=\overline{1, 3}$, $\lambda_1<\lambda_2<\lambda_3$, має по одному дійсному кореню в інтервалах $(\lambda_1; \lambda_2)$ і $(\lambda_2; \lambda_3)$;

8.2. Рівняння $\sum_{j=1}^{n}\frac{a_j}{x-\lambda_j}=0$, де $a_j>0,\ j=\overline{1, n}$, $\lambda_1<\lambda_2<...<\lambda_n$, має по одному дійсному кореню в інтервалах $(\lambda_j; \lambda_{j+1})$, $j=\overline{1, n-1}$.

✍**9. [11]** *Дослідити функцію $f(x)$ на знак:*

9.1. $f(x)=(8x^3-1)(4x^2-1)$.

9.2. $f(x)=(x^6-1)(x^3-1)$.

9.3. $f(x)=(x^8-1)\log_2\left(x+\frac{1}{2}\right)$.

9.4. $f(x)=(2^x-8)\sin x$.

9.5. $f(x)=(x^2-2x-35)\arcsin x$.

9.6. $f(x)=(4x^4-x^2)\arccos x$.

9.7. $f(x)=|13+x|-|x-2|-3$.

9.8. $f(x)=|x^2-5x+4|-|3-2x-x^2|$.

9.9. $f(x)=\log_{x^2-3x}(x^2+2x)-1$.

9.10. $f(x)=x^{2\log_{x^2}(x+2)^2}-4$.

✍**10. [11]** *Розв'язати нерівності:*

10.1. $\frac{3x-2}{2x-3}>\frac{4x-5}{5x-4}$.

10.2. $\frac{x^2-3x+2}{x^2-5x+6}<-2$.

10.3. $\frac{6x}{2x^2-3x+4}+\frac{x}{2x^2-5x+4}>3$.

10.4. $\sqrt{-2x^2+11x-5}>2x-11$.

10.5. $\sqrt{1+x}+\sqrt[4]{1-x}>1$.

10.6. $\log_{\frac{1}{2}} \log_4 \dfrac{x^2-4x-5}{x^2+2x} > 1.$

10.7. $\left(2x^2+3x+2\right)^{x-1} > 1.$

10.8. $\log_2(x-7) > \log_2(21-x).$

10.9. $\cos^2 x + 9\sin x\cos x - 10\sin^2 x > 0.$

✍**11. [11]** *Розв'язати нерівності:*

11.1. $\sqrt{4x-3-x^2} < x^3 + x.$

11.2. $5^{\sin x-1} + 5^{\cos x} > 6.$

11.3. $\left(\dfrac{1}{3}\right)^{\sqrt{x-1}} + \left(\dfrac{1}{3}\right)^{\sqrt{x+3}} < \sqrt{x-1} + \sqrt{x+3}.$

11.4. $x^2 + 2x + 1 > \sin x.$

11.5. $\sin x \sin 5x < 1.$

✍**12. [11]** *Визначити проміжки монотонності функції* $y = f(x)$ *і на кожному з них побудувати функцію* $y = f^{-1}(x)$, *якщо:*

12.1. $f(x) = 2x - 1.$

12.2. $f(x) = x^2.$

12.3. $f(x) = \sin x.$

12.4. $f(x) = tgx.$

12.5. $f(x) = e^{x^2-4x+3}.$

12.6. $f(x) = 2^{arctgx}.$

12.7. $f(x) = \log_2\left(4 - x^2\right).$

12.8. $\log_3\left(3^x + 1\right).$

✍**13. [11]** *Довести, що функція* $y = x + arctgx$ *має неперервну обернену функцію.*

✍**14. [11]** *Довести, що функція* $y = \dfrac{2}{\pi} arctgx + \dfrac{1}{1+x^2}$ *на проміжку* $[0; +\infty)$ *має неперервну обернену функцію, визначену на проміжку* $[0; 2]$.

✍**15. [11]** *Чи має функція* $f(x) = x^4 - 2x^2 + 4$ *обернену?*

🕮Практичне заняття №16

Тема: Елементарні функції та їх неперервність. Дослідження і побудова графіків

✍**1. [13, с. 118]** *Побудувати графіки раціональних функцій:*

1.1. $y = \left(1 - x^2\right)\left(2 + x\right).$

1.2. $y = x^2 - x^4.$

1.3. $y = x(a-x)^2(a+x)^3$, $a > 0.$

1.4. $y = \dfrac{1}{1-x^2}.$

1.5. $y = \dfrac{(x+1)(x-2)}{(x-1)(x+2)}.$

1.6. $y = \pm\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}.$

✍**2. [13, с. 122]** *Побудувати графік складної функції* $y = e^{y_1}$*, якщо:*

2.1. $y_1 = x^2.$

2.2. $y_1 = -x^2.$

2.3. $y_1 = \dfrac{1}{x}.$

2.4. $y_1 = \dfrac{1}{x^2}.$

2.5. $y_1 = -\dfrac{1}{x^2}.$

2.6. $y_1 = \dfrac{2x}{1-x^2}.$

✍**3. [13, с. 122]** *Побудувати графік складної функції* $y = \ln y_1$*, якщо:*

3.1. $y_1 = 1 + x^2.$

3.2. $y_1 = (x-1)(x-2)^2(x-3)^3.$

3.3. $y_1 = \dfrac{1-x}{1+x}.$

3.4. $y_1 = \dfrac{1}{x^2}.$

✍**4.** *Побудувати графіки функцій:*

4.1. $y = \sin^2 x.$

4.2. $y = \sin^3 x.$

4.3. $y = \sin x \sin 3x.$

4.4. $y = \sin x^2.$

✍**5.** *Побудувати графіки функцій:*

5.1. $y = \arcsin\dfrac{1}{x}.$

5.2. $y = \arccos\dfrac{1}{x}.$

5.3. $y = arcctg\dfrac{1}{x}.$

5.4. $y = \arcsin(2\sin x).$

✍**6.** *Побудувати графік функції* $y = \arcsin y_1$*, якщо:*

6.1. $y_1 = 1 - \dfrac{x}{2}.$

6.2. $y_1 = \dfrac{2x}{1+x^2}.$

6.3. $y_1 = \dfrac{1-x}{1+x}.$

6.4. $y_1 = e^x.$

✍**7. [13, с. 137]** *Побудувати графік функції* $y = f(x),\ x \in \mathbb{R}$, *якщо* $f(x+1) = 2f(x)$ *і* $f(x) = x(1-x)$ *при* $0 \le x \le 1$.

✍**8. [13, с. 137]** *Побудувати графік функції* $y = f(x),\ x \in \mathbb{R}$, *якщо* $f(x+\pi) = f(x) + \sin x$ *і* $f(x) = 0$ *при* $0 \le x \le \pi$.

✍**9. [13, с. 157]** *Дослідити на неперервність і побудувати графіки функцій:*

9.1. $y = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{1+x^n},\ x \ge 0.$

9.2. $y = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^x - n^{-x}}{n^x + n^{-x}}.$

9.3. $y = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{1+x^{2n}}.$

9.4. $y = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x}{1+(2\sin x)^{2n}}.$

9.5. $y = \lim\limits_{n\to\infty} \left(x arctg\left(n ctg x \right) \right).$

9.6. $y = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x + x^2 e^{nx}}{1+e^{nx}}.$

🕮Практичне заняття №17

⌛ Контрольна робота №2 (70 балів) (зразок)

✍ ***1.*** *Обчислити границю функції:* $\lim\limits_{x\to 1/3} \dfrac{\sqrt[3]{x/9} - 1/3}{\sqrt{1/3+x} - \sqrt{2x}}.$

✍ ***2.*** *Обчислити границю функції:* $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2\sin\left(\pi(x+1)\right)}{\ln(1+2x)}.$

✍ ***3.*** *Обчислити границю функції:* $\lim\limits_{x\to 2\pi} \dfrac{\sin 7x - \sin 3x}{e^{x^2} - e^{4\pi^2}}.$

✍ ***4.*** *Обчислити границю функції:* $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2^{3x} - 3^{2x}}{x + \arcsin x^3}.$

✍ ***5.*** *Обчислити границю функції:* $\lim\limits_{x\to 0} \left(\cos x + arctg^2 x \right)^{\frac{1}{arctg\, x^2}}.$

✍ ***6.*** *Дослідити функцію на неперервність та побудувати її графік:*

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \le 0, \\ 2^x, & 0 < x \le 2, \\ x+3, & x > 2. \end{cases}$$

✍ *7. Дослідити функцію на неперервність у вказаних точках:*

$$f(x) = 7^{\frac{1}{5-x}} + 1;\ x_1 = 4,\ x_2 = 5.$$

Творче завдання (100 балів).

Інструкція для написання твору з математичного аналізу

При написанні твору з кожної теми повинні бути висвітлені такі пункти:

1. Загальні відомості про функцію;
2. Властивості функцій та арифметичні операції над ними.

У вашій роботі властивості, теореми записуються з доведенням. Усі означення, теореми, твердження ілюструються прикладом. Якщо твердження не є однозначним, то наводиться контрприклад.

План написання твору:

Монотонні функції:

- Загальні відомості про монотонні функцію;
- Властивості монотонних функцій та арифметичні операції над монотонними функціями.

Зокрема при описанні арифметичних операцій над монотонними функціями повинні бути розглянуті завдання такого типу, як: якою буде сума $F = f_1 + f_2$, $D_{f_1} = D_{f_2} = [a; b]$ при :

a) f_1, f_2 – зростаючі (строго зростаючі) на $[a; b]$;

b) f_1, f_2 – спадні (строго спадні) на $[a; b]$;

c) f_1 – зростаюча (строго зростаюча), а f_2 – спадна (строго спадна) на $[a; b]$;

якою буде функція $F = -f$, $D_f = [a; b]$при :

a) f – зростаюча (строго зростаюча) на $[a; b]$;

b) f – спадна (строго спадна) на $[a; b]$;

якою функцією буде добуток $F = f_1 \cdot f_2$, $D_{f_1} = D_{f_2} = [a; b]$ при :

a) f_1, f_2 – зростаючі (строго зростаючі) на $[a; b]$ і;

b) f_1, f_2 – спадні (строго спадні) на $[a; b]$ і;

c) f_1 – зростаюча (строго зростаюча),а f_2 – спадна (строго спадна) на $[a; b]$;

функція $F = \dfrac{1}{f}$, $D_f = [a; b]$буде … функцією при:

a) f – зростаюча (строго зростаюча) на $[a; b]$;

b) f – спадна (строго спадна) на $[a; b]$;

якою функцією буде композиція $F = f_2 \circ f_1$, $D_{f_1} = [a;b]$, $D_{f_2} = [c;d]$, де $c = \min\limits_{t \in [a;b]} f_1(t)$, $d = \max\limits_{t \in [a;b]} f_1(t)$ при:

a) f_1 – зростаюча (строго зростаюча) на $[a;b]$, f_2 – зростаюча (строго зростаюча) на $[c;d]$;

b) f_1 – спадна (строго спадна) на $[a;b]$, f_2 – спадна (строго спадна) на $[c;d]$;

c) f_1 – зростаюча (строго зростаюча) на $[a;b]$, f_2 – спадна (строго спадна) на $[c;d]$;

d) f_1 – спадна (строго спадна) на $[a;b]$, f_2 – зростаюча (строго зростаюча) на $[c;d]$.

Парні і непарні функції:

- Загальні відомості про парні і непарні функції;
- Властивості парних і непарних функцій та арифметичні операції над ними.

Зокрема при описанні арифметичних операцій над парними і непарними функціями повинні бути розглянуті завдання такого типу, як: Чи можна сказати щось про характер парності функції φ, якщо про функції f і g відомо:

a) f і g – обидві парні і:

1) $\varphi = f + g$;
2) $\varphi = f - g$;
3) $\varphi = f \cdot g$;
4) $\varphi = \dfrac{f}{g}$;
5) $\varphi = f \circ g$;

b) f – парна, g – непарна і:

1) $\varphi = f + g$;
2) $\varphi = f \cdot g$;
3) $\varphi = g \circ f$;
4) $\varphi = f \circ g$;
5) $\varphi = \dfrac{f}{g}$;
6) $\varphi = \dfrac{g}{f}$;

c) f і g – обидві непарні і:

1) $\varphi = f + g$;
2) $\varphi = f - g$;
3) $\varphi = f \cdot g$;
4) $\varphi = \dfrac{f}{g}$;
5) $\varphi = f \circ g$.

Обмежені функції:

- Загальні відомості про обмежені функції;
- Властивості обмежених функцій та арифметичні операції над ними.

Зокрема при описанні арифметичних операцій над обмеженими функціями повинні бути розглянуті завдання такого типу, як:
Якою буде функція φ, якщо про функції f і g відомо:

d) f і g – обидві обмежені і:

1) $\varphi = f + g$;
2) $\varphi = f - g$;
3) $\varphi = f \cdot g$;
4) $\varphi = \dfrac{f}{g}$;
5) $\varphi = f \circ g$;

e) f – обмежена, g – необмежена і:

1) $\varphi = f + g$;
2) $\varphi = f \cdot g$;
3) $\varphi = g \circ f$;
4) $\varphi = f \circ g$;
5) $\varphi = \dfrac{f}{g}$;
6) $\varphi = \dfrac{g}{f}$;

f) f і g – обидві необмежені і:

1) $\varphi = f + g$;
2) $\varphi = f - g$;
3) $\varphi = f \cdot g$;
4) $\varphi = \dfrac{f}{g}$;
5) $\varphi = f \circ g$.

Періодичні функції:

- Загальні відомості про періодичні функції;
- Властивості періодичних функцій та арифметичні операції над ними.

Зокрема при описанні арифметичних операцій над періодичними функціями повинні бути розглянуті завдання такого типу, як:
Якою буде функція φ, якщо про функції f і g відомо:

a) f і g – обидві періодичні і:

1) $\varphi = f + g$;
2) $\varphi = f - g$;
3) $\varphi = f \cdot g$;
4) $\varphi = \dfrac{f}{g}$;
5) $\varphi = f \circ g$;

b) f – періодична, g – неперіодична і:

1) $\varphi = f + g$;
2) $\varphi = f \cdot g$;
3) $\varphi = g \circ f$;
4) $\varphi = f \circ g$;
5) $\varphi = \dfrac{f}{g}$;
6) $\varphi = \dfrac{g}{f}$;

c) f і g – обидві неперіодичні і:

1) $\varphi = f + g$;
2) $\varphi = f - g$;
3) $\varphi = f \cdot g$;
4) $\varphi = \dfrac{f}{g}$;
5) $\varphi = f \circ g$.

“Використання програми Advanced Grapher для дослідження функцій та побудови графіків”

1. **Короткі теоретичні відомості та інтерфейс Програми Advanced Grapher**

На ринку програмних засобів існує велика кількість потужних графічних та математичних пакетів, які дозволяють реалізувати різного роду задачі. Але для вирішення такого вузького питання як побудова графіків та дослідження функцій доцільно використовувати мобільні, невеликі програми, які дозволяють досить швидко і якісно підготувати графічний матеріал. Одна з таких програм -Advanced Grapher має невеликий розмір (1009 КБ), інтуїтивно зрозумілий інтерфейс, меню на багатьох мовах, на російській включно. Розповсюджується безкоштовно.

Незважаючи на малий розмір програма досить функціональна. Окрім побудови графіків є досить багато інших додаткових можливостей для дослідження функцій, зокрема знаходження екстремумів, точок перетину з осями координат, знаходження аналітичного виразу для похідних та побудова їх графіків, знаходження рівнянь дотичних та нормалей у вказаних точках та побудова їх графіків, обчислення визначених інтегралів. Програма має широкі можливості для проведення регресійного аналізу, обробки експериментальних даних та апроксимації табличних функцій аналітичними залежностями. Програма дозволяє імпортувати таблиці функцій з інших файлів для подальшої графічної обробки.

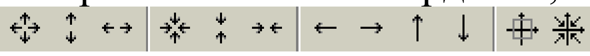
Головне вікно програми Advanced Grapher показане на рис.1.

Зверху маємо головне меню та панелі інструментів. Робоче поле має три вікна: основне для побудови графіків та два додаткових – **Список графіків** для навігації і **Калькулятор** для обчислень. Два останніх вікна можна приховати.

Коротко розглянемо інструменти програми. Окрім знайомих елементів на панелі інструментів, які присутні в багатьох програмах, є інші:

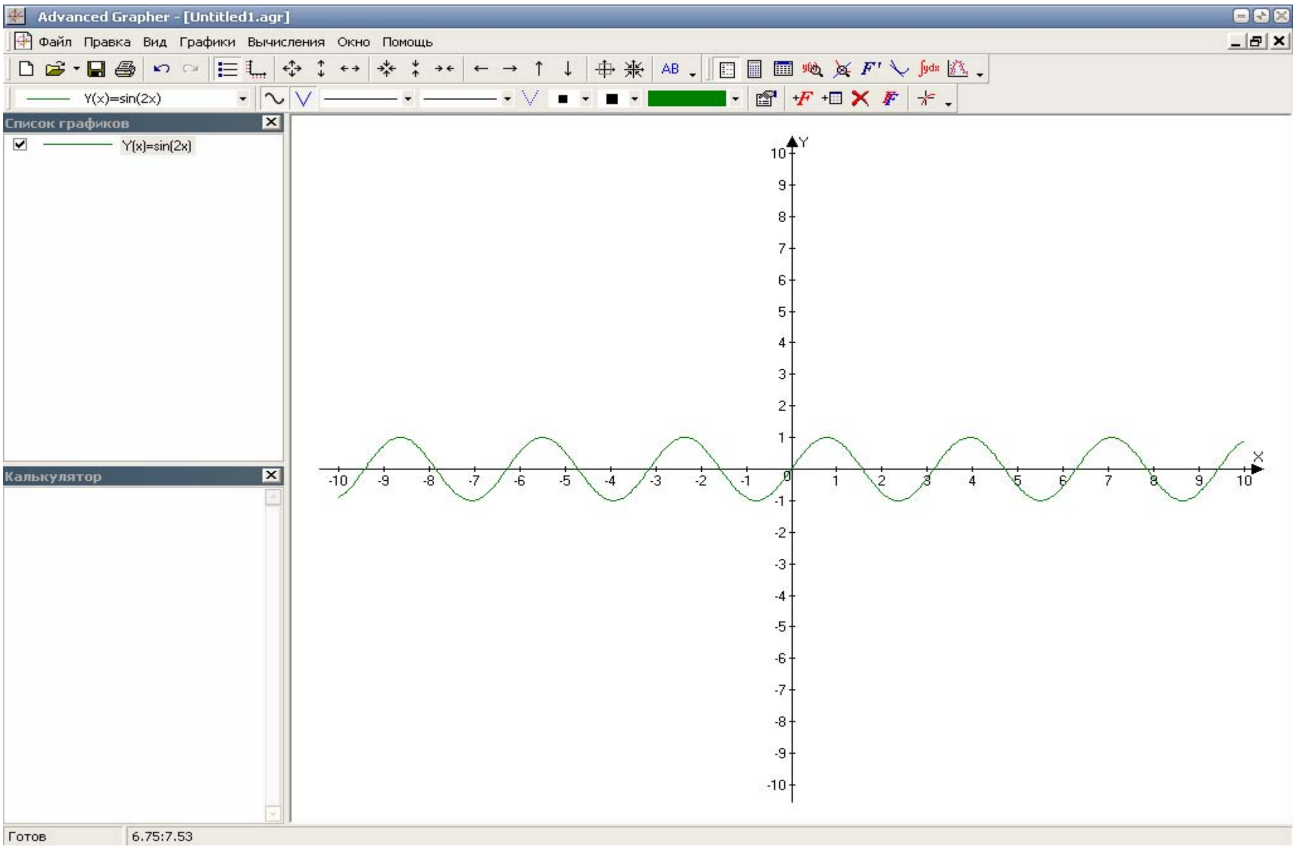
 -список графіків. Показує вікно зі списком побудованих графіків, що дає можливість зручної навігації для редагування графіків.

 - властивості документа. Відкриває діалогове вікно для настройки системи координат, підписів, заголовків та ін.

 - інтуїтивно зрозумілі інструменти для форматування області побудови графіків.

 - дозволяє вставити текстові елементи .

 - обчислення функцій. Відкриває вікно, в якому можна обчислити



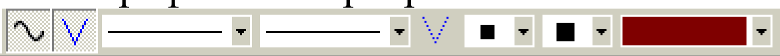
функцію для вказаного значення аргументу.

 - добавити таблицю. Відкриває діалогове вікно для вводу та редагування таблиць.

 - дослідження функції. Дозволяє знайти екстремуми функції та точки перетину з осями.

 - дозволяє знайти координати точок перетину двох графіків.
 - похідна. Знаходить аналітичний вираз похідної та будує її графік.
 - для вказаної точки видає рівняння дотичної та нормалі та будує їх графіки.
 - інтегрування. Обчислює визначений інтеграл для вказаної функції та меж інтегрування.
 - регресійний аналіз. Дає можливість побудувати різні види рівнянь регресії, обчислити коефіцієнти кореляції, знайти найкращу апроксимаційну залежність.
 - властивості графіка. Установка та редагування властивостей графіка.
 - добавити графік. Відкриває вікно для вводу функцій.
 - добавити таблицю. Відкриває вікно для вводу та редагування таблиць.
 - видаляє активний графік.
 - дозволяє побудову декількох графіків в одній системі координат.
 - трасировка вздовж графіка функції.

На панелі інструментів присутні також кнопки для форматування ліній графіка та маркерів



2. **Приклад використання програми Advanced Grapher**

Побудувати графік функції $y = \frac{1}{2}\sin 2x + \cos x$. Встановити потрібний масштаб. Знайти екстремуми. Знайти точки перетину графіка функції з віссю OX Побудувати графік похідної. Побудувати дотичну та нормаль до графіка в точці $x_0 = 2$. Знайти інтеграл від вказаної функції на інтервалі [1,3].

На панелі інструментів натискуємо кнопку ***Добавить график*** . В діалоговому вікні, що з'явилося, вводимо вираз функції, стиль форматування лінії, колір (рис. 2). На вкладці ***Доп. Свойства*** можна встановити інтервал для аргументу та кількість точок для табулювання функції. Далі натискуємо **ОК** – з'являється графік функції.

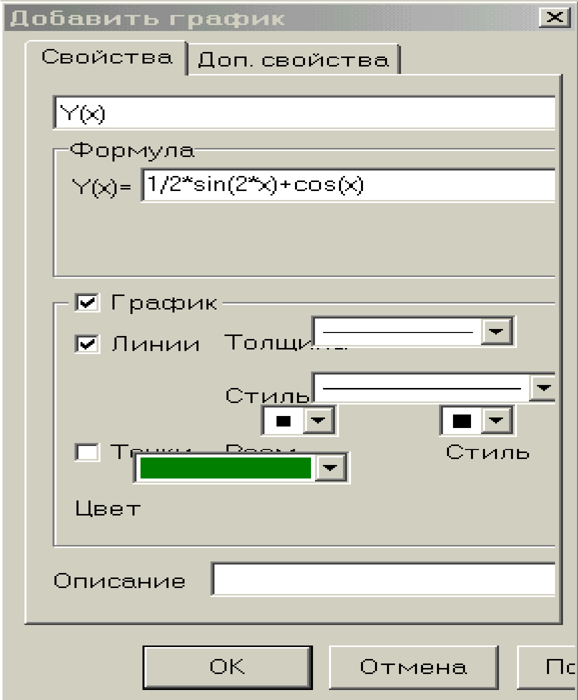
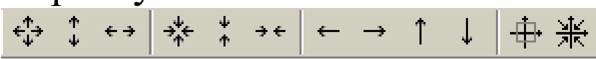
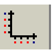


Рис. 2.

Користуючись кнопками



установлюємо потрібний формат для відображення графіка та положення його на екрані. Натиснувши кнопку ***Свойства документа***  в діалоговому вікні, що з'явиться (рис. 3), маємо можливість настроїти та сформувати стиль, зарубки на осях, сітку, заголовки та підписи. Для цього, в лівій частині вікна вибираємо атрибут, а в правій установлюємо його параметри.

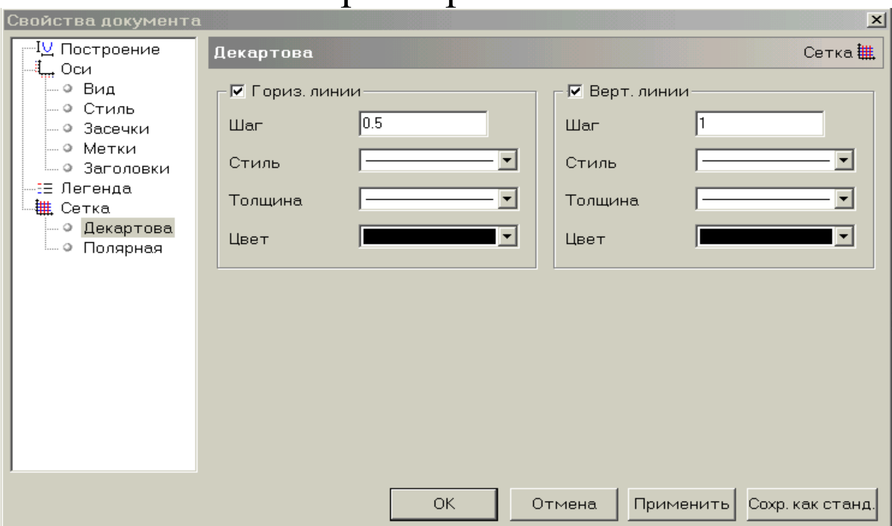


Рис. 3.

На рис. 4,5 подані різні стилі оформлення графіків.

Для пошуку екстремумів та нулів функції натискуємо кнопку  -***Исследование функции.*** З'являється діалогове вікно, в якому треба вказати інтервал, де відбувається пошук, та точність пошуку.

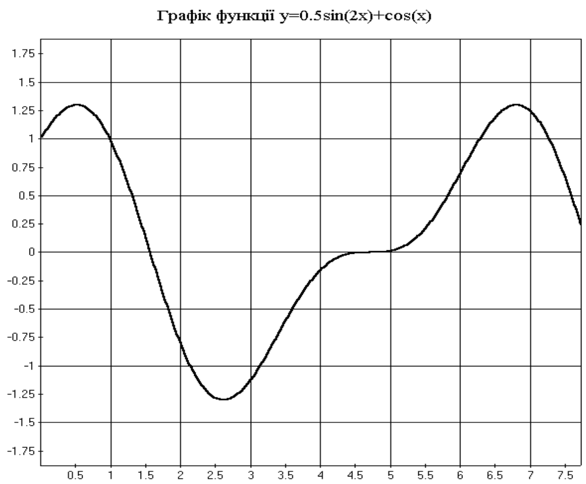


Рис. 4.

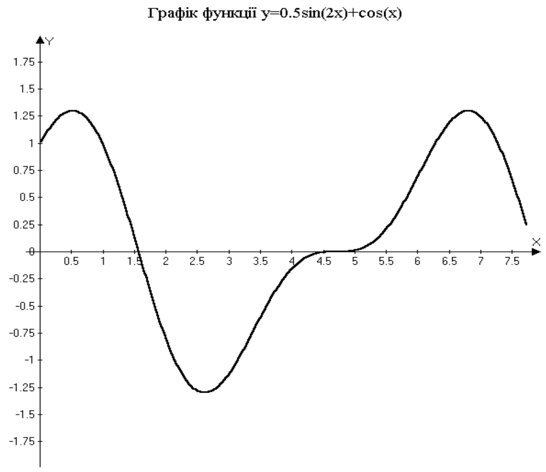


Рис. 5.

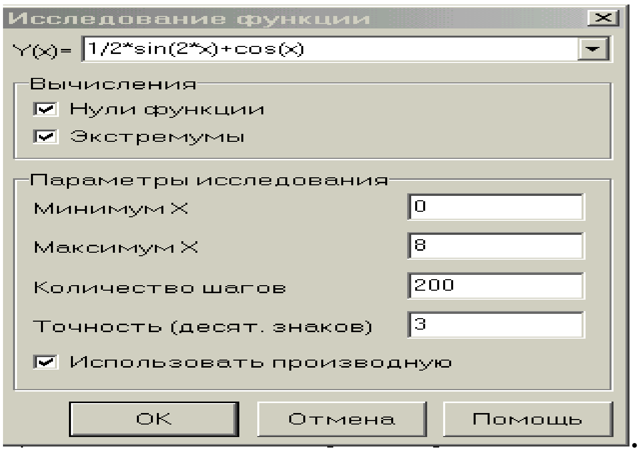


Рис. 6.

Натиснувши ОК – отримуємо результати пошуку (рис. 7).

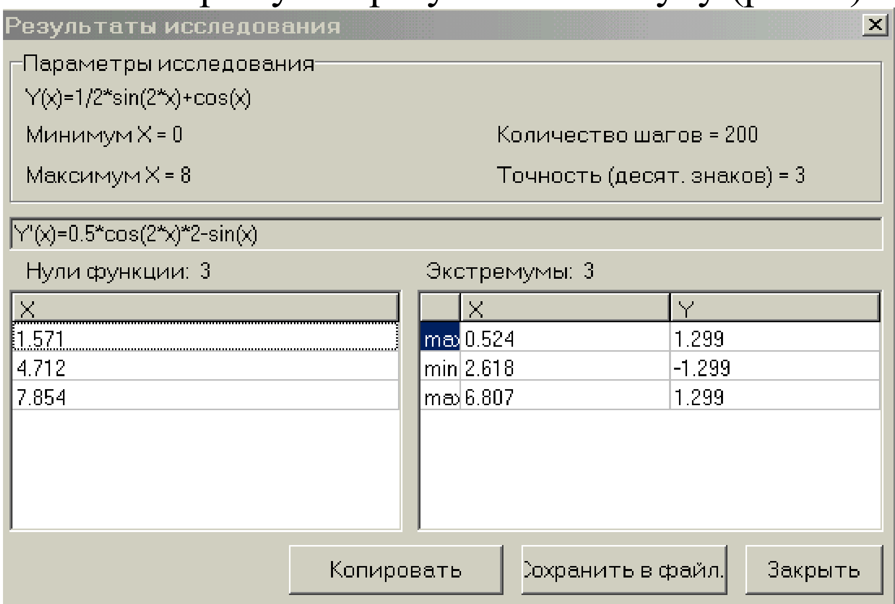


Рис. 7.

Для визначення похідної та побудови її графіка натискуємо кнопку  - ***Производная***, вибираємо функцію, для якої необхідно знайти похідну та побудувати графік (рис. 8.).

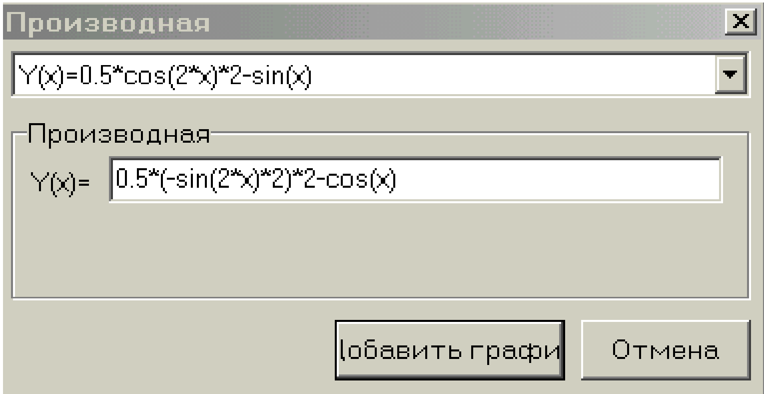


Рис. 8.

Далі, натискаємо ***Добавить график*** – на екрані з'являються обидва графіки – функції та похідної (рис. 9).

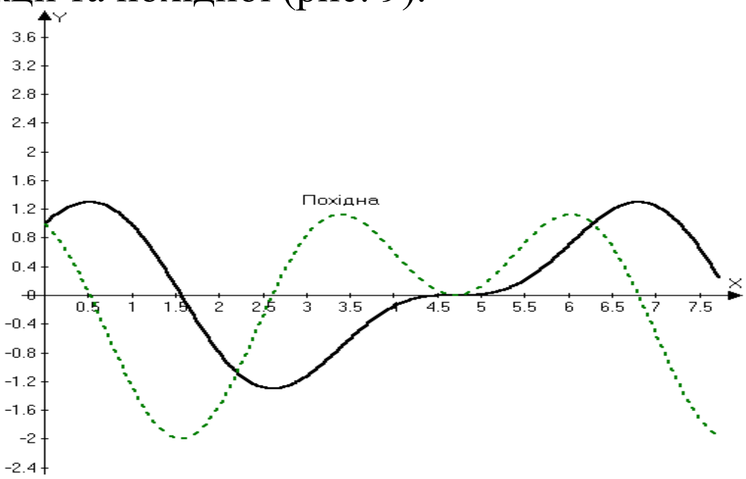


Рис. 9.

Для побудови дотичної та нормалі натискуємо кнопку - ***Касательная и нормаль.*** У вікні, що з’явиться, вказуємо значення аргументу, для якого треба побудувати дотичну та нормаль. В тому ж вікні буде відображено рівняння дотичної або нормалі. Для відображення графіків натискуємо ***Добавить графік.***

Щоб обчислити інтеграл натискуємо кнопку і в діалоговому вікні вказуємо підінтегральну функції та границі інтегрування (рис.10)

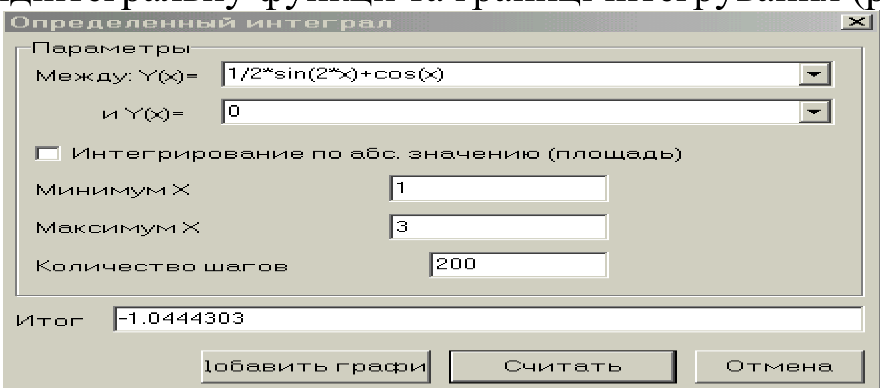


Рис. 10.

Далі натискуємо ***Считать*** – після чого в полі ***Итог*** з'явиться значення інтеграла. Якщо натиснути кнопку ***Добавить графік*** , штриховкою на екрані буде відображена площа, відповідна обчисленому інтегралу.

Advanced Grapher підтримує наступні функції:

sin - синус
cos - косинус
tan - тангенс
cot - котангенс
atan - арктангенс
asin - арксінус
acos - арккосинус
abs - модуль
sqrt – коріть квадратний
ln – логарифм натуральний
lg – логарифм десятковий
exp - експонента
int – ціла частина
sign - сігнум
sinh – синус гіперболічний
cosh – косинус гіперболічний
tanh - тангенс гіперболічний
coth - котангенс гіперболічний
asinh - арксинус гіперболічний
acosh - арккосинус гіперболічний
atanh - арктангенс гіперболічний
acoth - арккотангенс гіперболічний

Для отримання детальнішої інформації потрібно в програмі Advanced Grapher наступні кроки :**Помощь $\Rightarrow$ Содержание.**

Самостійна робота

Використовуючи графічний редактор, побудувати графіки функцій:

1. $y = \frac{a}{b}x^2$, де a – місяць народження; b – день народження.

2. $y = \frac{ax+b}{cx+d}$, де a – місяць народження; b – день народження; c – число букв прізвища; d – число букв імені.

Якщо c парне, то $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$; c непарне, то $y=\dfrac{ax+b}{-cx+d}$.

3. $y=\sqrt[d]{ax+b}$, де a – місяць народження;

b – день народження;

d – число букв імені.

Якщо b парне, то $y=\sqrt[d]{ax+b}$;

b непарне, то $y=\sqrt[d]{ax-b}$.

4. $\log_b(ax+c)$, де a – місяць народження; b – день народження;

c – число букв прізвища;

Наступні завдання по побудові графіків функцій подані у таблиці. Порядковий номер варіанта відповідає номеру кожного студента у списку групи:

№	$y=\sin x$; $y=\cos x$ $y=\operatorname{tg} x$; $y=\operatorname{ctg} x$	$y=\arcsin x$; $y=\arccos x$ $y=\operatorname{arctg} x$; $y=\operatorname{arcctg} x$	$y=a^x$	$y=f(\lvert x\rvert)$; $y=\lvert f(x)\rvert$
1	$y=\sin\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)$ $y=\operatorname{tg}\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)+1$	$y=\arcsin(x+4)$ $y=\operatorname{arcctg}\left(\dfrac{1}{2}x+3\right)$	$y=2^{x+1}+1$	$y=\arccos\lvert x\rvert$ $y=\lvert x+1\rvert+\lvert x+2\rvert$
2	$y=2\cos\dfrac{1}{2}x+1$ $y=\operatorname{ctg}\left(x-\dfrac{2}{3}\right)$	$y=\arccos(x-3)$ $y=2\operatorname{arctg} x-1$	$y=-2^x$	$y=\lvert\operatorname{tg} x\rvert$ $y=x\lvert x\rvert-3\lvert x\rvert+2x-1$
3	$y=\dfrac{1}{2}\sin(x-1)$ $y=\operatorname{tg}\left(\dfrac{1}{2}x\right)-1$	$y=\arcsin\left(x-\dfrac{2}{5}\right)$ $y=3\operatorname{arcctg} x$	$y=-\left(\dfrac{1}{2}\right)^x$	$y=\lvert\operatorname{arctg} x\rvert$ $y=(2x-1)(\lvert x\rvert-2)$
4	$y=\cos\left(2x-\dfrac{\pi}{3}\right)+1$ $y=\operatorname{ctg}(3x-2)$	$y=\dfrac{1}{4}\arccos x+1$ $y=\operatorname{arctg}(3x+2)$	$y=3^{2x+1}$	$y=\sin\lvert x\rvert$ $y=\lvert x+3\rvert(x-4)$
5	$y=\sin 2x-1$ $y=1-\operatorname{tg}\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$	$y=-\arcsin 3x$ $y=\operatorname{arcctg}(1-3x)$	$y=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{x+1}$	$y=\lvert\cos x\rvert$ $y=\left\lvert x^2-3\lvert x\rvert\right\rvert$

6	$y=\frac{4}{3}\cos\left(\frac{4}{3}x-\frac{\pi}{3}\right)$ $y=-\operatorname{ctg}\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$	$y=\arccos\left(\frac{1}{2}x+3\right)$ $y=\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{3}x-1\right)$	$y=1-\left(\frac{3}{4}\right)$	$y=\arcsin\lvert x\rvert$ $y=\left\lvert 2-\lvert x^2-3x+2\rvert\right\rvert$
7	$y=\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)+1$ $y=\operatorname{tg}\left(\frac{2\pi}{3}x+\frac{\pi}{3}\right)$	$y=\arcsin(2x-3)$ $y=\operatorname{arcctg}\left(x-\frac{1}{2}\right)$	$y=(4)^{x+1}$	$y=\lvert x\rvert-3$ $y=\left\lvert 1-\lvert\ln x\rvert\right\rvert$
8	$y=\frac{3}{2}\cos\left(\frac{2}{3}x+1\right)$ $y=\frac{2}{3}\operatorname{ctg}\frac{1}{2}x$	$y=-\arccos 4x$ $y=\operatorname{arctg}\frac{4}{3}x$	$y=2\cdot 10^x$	$y=\operatorname{tg}\lvert x\rvert$ $y=x^2-2\lvert x\rvert+5$
9	$y=\sin(2x-1)+1$ $y=2\operatorname{tg}\frac{1}{3}x-\frac{\pi}{6}$	$y=\frac{1}{2}\arcsin x$ $y=\operatorname{arcctg} x+2$	$y=\frac{1}{2}\cdot 3^x$	$\log_{\frac{1}{3}}\lvert x\rvert$ $y=2x^2+\lvert x+1\rvert+x$
10	$y=\cos(x+2)-1$ $y=2\operatorname{ctg}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$	$y=\frac{2}{3}\arccos\frac{2}{3}x$ $y=\operatorname{arctg}\left(x+\frac{2}{3}\right)$	$y=2{,}5^x$	$y=\lvert\operatorname{arcctg} x\rvert$ $y=\left\lvert\lvert x-1\rvert-x\right\rvert$
11	$y=\sin\left(3x-\frac{\pi}{6}\right)$ $y=\frac{1}{3}\operatorname{tg}\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)$	$y=-2\arcsin 2x$ $y=\operatorname{arcctg}\frac{4}{3}x+4$	$y=\frac{2}{3}\cdot 2^x$	$y=\lvert\operatorname{ctg} x\rvert$ $y=\left\lvert 2x^2-4\lvert x\rvert-3\right\rvert$
12	$y=1-2\cos\frac{1}{3}x$ $y=\operatorname{ctg} 3x-2$	$y=2\arccos\left(\frac{1}{2}x-3\right)$ $y=\frac{2}{3}\operatorname{arctg}\frac{2}{3}x$	$y=2\cdot 3^{2x-1}$	$y=\lvert x^2-4x\rvert$ $y=\left\lvert(\lvert x\rvert-3)^2-2\right\rvert$
13	$y=\sin\left(\frac{\pi}{3}-2x\right)$ $y=\operatorname{tg}\left(\frac{1}{3}x-1\right)$	$y=\arcsin x+2$ $y=\operatorname{arcctg} x-\frac{\pi}{3}$	$y=3^{\frac{1}{2}x-1}$	$y=\operatorname{arctg}\lvert x\rvert$ $y=\frac{x}{\lvert x-1\rvert}$

14	$y=\cos\frac{4}{3}x-2$ $y=\frac{2}{3}\operatorname{tg}x+2$	$y=3-\arccos x$ $y=\frac{1}{2}\operatorname{arctg}2x$	$y=1-\frac{1}{2}\cdot 3$	$y=\frac{1}{\lvert x\rvert}$ $y=\left\lvert\frac{\lvert x\rvert+2}{\lvert x\rvert-1}\right\rvert$
15	$y=\frac{1}{3}\sin x-2$ $y=\operatorname{ctg}\left(\frac{1}{3}x+2\right)$	$y=\frac{1}{2}\arcsin x+1$ $y=\frac{1}{3}\operatorname{arcctg}(2x-3)$	$y=-2^{x-1}$	$y=\cos\lvert x\rvert$ $y=\frac{\lvert x\rvert}{x-2}$
16	$y=\frac{1}{3}\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)+2$ $y=-\operatorname{tg}3x$	$y=2\arccos(2x+3)+4$ $y=2\operatorname{arctg}x$	$y=-\left(\frac{1}{8}\right)^{x}$	$y=\operatorname{arcctg}\lvert x\rvert$ $y=\lvert x^2-\lvert x\rvert-2\rvert$
17	$y=-\frac{4}{3}\sin x-1$ $y=\operatorname{ctg}\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$	$y=\arcsin x-2$ $y=\frac{1}{3}\operatorname{arcctg}\left(\frac{1}{4}x-1\right)$	$y=3^{\frac{1}{2}x+1}$	$y=\sqrt{\lvert x\rvert-3}$ $y=(\lvert x\rvert-1)(2+\lvert x\rvert)$
18	$y=2\sin(2x-1)$ $y=\operatorname{ctg}(2x-1)+\frac{7}{3}$	$y=\frac{1}{3}\arccos x$ $y=\frac{1}{2}\operatorname{arctg}x+\frac{1}{3}$	$y=-2\cdot 3^{2x+}$	$y=3^{\lvert x\rvert}$ $y=-3\left\lvert(\lvert x\rvert-3)^2-2\right\rvert$
19	$y=3\cos\left(\pi x-\frac{1}{2}\right)+1$ $y=\operatorname{tg}\frac{3}{2}x-1$	$y=\frac{4}{3}\arcsin x$ $y=\operatorname{arcctg}(x-3)$	$y=3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{x}$	$y=\lvert\arccos x\rvert$ $y=\frac{\lvert x-2\rvert+\lvert x+2\rvert}{4}$
20	$y=\sin\left(x+\frac{1}{2}\right)+2$ $y=1-\operatorname{tg}(x+2)$	$y=\arccos(3x+1)$ $y=\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{2}{3}x-\frac{1}{4}\right)$	$y=-2\cdot 10^{x}$	$y=\sqrt{\lvert 2-x\rvert}$ $y=\left\lvert\frac{1-\lvert x\rvert}{1+\lvert x\rvert}\right\rvert$
21	$y=2\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$ $y=\operatorname{tg}x-\frac{2}{3}$	$y=\arcsin(3x-1)$ $y=\operatorname{arcctg}(2x-3)$	$y=\left(\frac{1}{2}\right)^{x-1}$	$y=\operatorname{ctg}\lvert x\rvert$ $y=\lvert x-1\rvert+\lvert x-2\rvert-$ $-\lvert x-3\rvert$
22	$y=2\sin\left(\frac{1}{2}x-\frac{\pi}{6}\right)$	$y=-\arccos\frac{1}{4}x$	$y=3^{2x-1}$	$\log_2\lvert x\rvert$ $y=x^2-4\lvert x\rvert+3$

	$y=\dfrac{2}{3}\operatorname{tg}x-1$	$y=\dfrac{1}{3}\operatorname{arctg}(3x+2)$		
23	$y=\cos(2x-1)+2$ $y=2\operatorname{ctg}\left(\dfrac{1}{2}x+\dfrac{\pi}{3}\right)$	$y=\arcsin\left(\dfrac{1}{2}x+1\right)$ $y=-\dfrac{1}{3}\operatorname{arcctg}x$	$y=-\left(\dfrac{1}{4}\right)^{x}$	$y=\lvert\sin x\rvert$ $y=x^2-x\lvert x\rvert$
24	$y=\dfrac{1}{2}\sin(2x+1)$ $y=\dfrac{1}{2}\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{4}x-\dfrac{\pi}{2}\right)$	$y=\arccos\left(x-\sqrt{2}\right)$ $y=\operatorname{arctg}x+2$	$y=-2^{x+1}$	$y=\lvert\arcsin x\rvert$ $y=\left\lvert\dfrac{x-3}{x-4}\right\rvert$
25	$y=1-\cos\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$ $y=\operatorname{tg}x+\dfrac{\pi}{4}$	$y=\arcsin(3x-1)+4$ $y=\operatorname{arcctg}\dfrac{1}{3}x$	$y=2^{x-1}$	$y=2\lvert x\rvert-1$ $y=\lvert x^2-7\lvert x\rvert+6\rvert$

Список рекомендованої літератури

1. Давидов М.О. Курс математичного аналізу. Ч. 1. – К.: Вища школа, 1979.
2. Дороговцев А.Я. Математичний аналіз. Ч.1 – К.: Либідь, 1993.
3. Кудрявцев Л.Д. Курс математического анализа. Т.1. – М.: Высшая школа, 1988.
4. Райков Д.А. Одномерный математический анализ. М.:Высшая школа, 1982.
5. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления, т.1,М.:Наука, 1970
6. Томусяк А.А., Трохименко В.С., Шунда Н.М. Математичний аналіз. Вступ до аналізу. – Вінниця, ВДПУ, 2001.
7. Зорич В.А. Математический анализ. Ч.1. – М.: Наука, 1981.
8. Шкіль М.І. Математичний аналіз. Ч.1, К.:Вища школа, 1978.
9. Dennis D. Berkey Calculus. – New York, 1988.
10. Thomas G. Calculus and analytic geometry. – Boston, 2000
11. Шунда Н.М., Томусяк А.А. Практикум з математичного аналізу. Вступ до аналізу. Диференціальне числення. – К.: Вища школа, 1993.
12. Виленкин Н.Я., Бохан К.А., Марон И.А. и др. Задачник по курсу математического анализа. Ч.1. – М.: Просвещение.
13. Ляшко И.И., Боярчук А.К., Гай Я.Г., Головач Г.П. Справочное пособие по математическому анализу. Ч.1. – К.: Высшая школа.
14. Вавилов В.В., Мельников И.И., Олейник С.Н, Паниченко П.И. Задачи по математике. Начала анализа. – М.:Наука, 1990. – 608 с.
15. Кудрявцев Л.Д. и др. Сборник задач по математическому анализу. Т.1. – М.: Физматгиз, 2003. – 496 с.
16. Запорожец Г.И. Руководство к решению задач по математическому аналізу. – М.: Высшая школа, 1966. – 460 с.
17. Мерзляк А.Г., Полонский В.Б., Рабинович Е.М., Якир М.С. Учимся решать задачи по началам анализа. – Киев: “Магістр – S”, 1998. – 416 с.
18. Рябушко А.П., Бархатов В.В., Державец В.В., Юруть И.Е. Сборник индивидуальных заданий по высшей математике. Часть 1. – Минск: Вышейшая школа, 1990. – 270 с.
19. Кузнецов Л.А. Сборник заданий по высшей математике (типовые расчеты). – М.: Высшая школа, 1983. – 175 с.

Навчальне видання

Ковтонюк Мар'яна Михайлівна
Бак Сергій Миколайович

РОБОЧИЙ ЗОШИТ СТУДЕНТА З МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ
І семестр
Вступ в математичний аналіз

Підписано до друку 1.09.2010 р. Формат 60х84/16.
Папір офсетний. Гарнітура Times.
Ум. друк. арк. 3,8
Наклад 300 примірників.
Віддруковано з оригіналів.

Видавництво Вінницького державного педагогічного університету
імені Михайла Коцюбинського.
21001, м.Вінниця, вул. Острозького,32