Ковтонюк М. М.

Бак С. М.

РОБОЧИЙ ЗОШИТ СТУДЕНТА

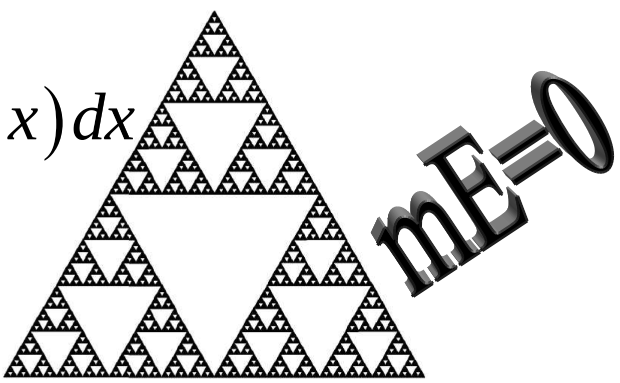
з математичного аналізу

V – VI семестри

Метричні простори. Порівняння і вимірювання множин. Інтеграл Лебега

(за вимогами кредитно-модульної системи)

$$(L)\int_E f(x)\,dx$$



Вінниця 2017

Індивідуальний робочий зошит студента

Дисципліна: математичний аналіз

Розділи: Метричні простори. Міра множини. Вимірні функції. Інтеграл Лебега.

Укладачі: доктор педагогічних наук, кандидат фізико-математичних наук,
професор **Ковтонюк М. М.**
кандидат фізико-математичних наук,
доцент **Бак С. М.**

Рецензенти: кандидат фізико-математичних наук,
доцент **Тимошенко О. З.**

Затверджено і рекомендовано до використання у навчальному процесі рішенням кафедри математики та інформатики ВДПУ імені Михайла Коцюбинського, протокол №1 від 28 серпня 2017 року.

Передмова

Робочий зошит з математичного аналізу призначений для використання студентами денної і заочної форм навчання фізико-математичних спеціальностей при вивченні тем «Метричні простори», «Міра множини», «Вимірні функції», «Інтеграл Лебега» в умовах кредитно-модульного навчання.

У **Робочому** зошиті подано робочий план студента з вказаних тем, за яким весь загальний обсяг матеріалу поділено на один загальний і два змістові модулі, наведено розрахунки рейтингових балів за видами поточного контролю.

Модуль складається з практичних занять з добіркою типових завдань для аудиторного і самостійного опрацювання та зразки текстів самостійної і контрольної робіт.

Після модуля подано зразок контрольної роботи із типовими завданнями. Для допомоги у виконанні самостійної роботи в зошиті подано список рекомендованої літератури і шкалу оцінювання знань згідно з ECTS.

Розподіл балів, які отримують студенти
4 курс, 5 семестр
Розподіл рейтингових балів за видами діяльності

№	Вид діяльності	Коефіцієнт вартості (бали)	Кількість робіт	Результат (бали)
1.	Практичні заняття	1	7	7
2.	Домашні завдання	2	6	12
3.	Контрольна робота	20	1	20
4.	Колоквіум	20	1	20
Всього за 5-й семестр (бали сумуються з наступним семестром)				**59**

Розподіл балів, які отримують студенти
4 курс, 6 семестр
Розподіл рейтингових балів за видами діяльності

№	Вид діяльності	Коефіцієнт вартості (бали)	Кількість робіт	Результат (бали)
1.	Творче завдання	33	1	33
2.	Практичні заняття	1	16	16
3.	Домашні завдання	2	16	32
4.	Самостійна робота	20	1	20
3.	Контрольна робота	20	1	20
4.	Колоквіум	20	1	20
Всього за 6-й семестр (бали сумуються з попереднім семестром)				**141**

Розподіл балів, які отримують студенти
4 курс
Розподіл рейтингових балів за видами діяльності

№	Вид діяльності	Коефіцієнт вартості (бали)	Кількість робіт	Результат (бали)
1.	Творче завдання	33	1	33
2.	Практичні заняття	1	23	23
3.	Домашні завдання	1	44	44
4.	Самостійні роботи	20	1	20
5.	Контрольна робота	20	2	40
6.	Колоквіум	20	2	40
Всього за 5-6-й семестр:				**200 (80%)**
Екзамен				**50 (20%)**
Підсумковий рейтинговий бал				**250 (100%)**
Нормований рейтинговий бал				**100**

МОДУЛЬ 1.

🕮 Практичне заняття №1

Тема: Поняття метричного простору. Наділення множини метрикою. Основні властивості метрики.

✍**1.** [20, с. 25-26] *Нехай* $d:\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to[0;+\infty)$. *Чи буде* d *відстанню в* $\mathbb{R}$*, якщо* $d(x;y)$ *за означенням дорівнює:*

а) $\sqrt{|x-y|}$; б) $|x-y|^2$;

в) $|x^3-y^3|$; д) $\sin^2(x-y)$;

г) $\operatorname{arctg}|x-y|$; є) $\min\{1,|x-y|\}$;

е) $\ln(1+|x-y|)$; ж) $|x^3-y^3|(2x^2+y^2)$;

з) $\dfrac{\ln(1+|x-y|)}{1+\ln(1+|x-y|)}$; и) $\dfrac{2|x-y|}{\sqrt{(1+x^2)(1+y^2)}}$.

✍**2.** [20, с.26] *Чи буде функція* $d(x,y)=d((x_1,x_2),(y_1,y_2))$ *відстанню в* $\mathbb{R}^2$*, якщо* $d(x,y)$ *за означенням дорівнює:*

а) $2|x_1-y_1|+|x_2-y_2|$; б) $\min\{|x_1-y_1|,|x_2-y_2|\}$;

в) $\begin{cases}|x_2-y_2|, & \text{якщо } x_1=y_1,\\ |x_2|+|y_2|+|x_1-y_1|, & \text{якщо } x_1\neq y_1;\end{cases}$ г) $\left(\max\{|x_1-y_1|,|x_2-y_2|\}\right)^2$;

д) $\max\{2|x_1-y_1|,3|x_2-y_2|\}$; е) $\sqrt{2(x_1-y_1)^2+3(x_2-y_2)^2}$;

є) $\sqrt{\max\{|x_1-y_1|,|x_2-y_2|\}}$;

ж) $\sqrt{2(x_1-y_1)^2+(x_1-y_1)(x_2-y_2)+(x_2-y_2)^2}$;

з) $\sqrt{(x_1-y_1)^2+2(x_1-y_1)(x_2-y_2)+(x_2-y_2)^2}$;

и) $\left(\sqrt{|x_1-y_1|}+\sqrt{|x_2-y_2|}\right)^2$?

✍**3.** [20, с. 27] *Чи буде функція*

$$d(x,y)=d((x_1,x_2,\ldots,x_n),(y_1,y_2,\ldots,y_n))$$

відстанню в $\mathbb{R}^n$*, якщо* $d(x,y)$ *за означенням дорівнює:*

а) $\max\limits_{i=\overline{1,n}}|x_i-y_i|$; б) $\sum\limits_{i=2}^{n}|x_i-y_i|$;

в) $\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i\left|x_i-y_i\right|$, де $\alpha_i>0$ для $i=\overline{1,\,n}$; г) $\min\limits_{i=\overline{1,\,n}}\left|x_i-y_i\right|$;

д) $\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i\left|x_i-y_i\right|^2}$, де $\alpha_i>0$ для $i=\overline{1,\,n}$?

✍**4.** [14, с. 356] *Довести, що множина* $B(E)$ *всіх обмежених на множині* E *дійсних функцій, є метричним простором з метрикою* $d(x;\,y)=\sup\limits_{t\in E}\left|x(t)-y(t)\right|$.

✍**5.** [20, с.27] *Чи буде функція* $d(f,\,g)$ *відстанню в* $C_{[0;\,1]}$, *якщо* $d(f,\,g)$ *за означенням дорівнює:*

а) $\max\limits_{x\in[0;\,1]}\left|f(x)-g(x)\right|$; б) $\min\limits_{x\in[0;\,1]}\left|f(x)-g(x)\right|$;

в) $\int\limits_0^1 e^x\left|f(x)-g(x)\right|dx$; г) $\sqrt{\int\limits_0^1 x\big(f(x)-g(x)\big)^2\,dx}$;

д) $\ln\left(1+\int\limits_0^1\left|f(x)-g(x)\right|dx\right)$; е) $\int\limits_0^1\left|f(x)-g(x)\right|dx$;

є) $\max\limits_{x\in[0;\,1]}\left|f'(x)-g'(x)\right|$?

✍**6.** [3, с. 171] *В просторі* $C^n_{[a;\,b]}$ *функцій, які мають неперервні похідні до* n*-го порядку, довести, що функції*

а) $d(x;\,y)=\sum\limits_{k=0}^{n}\max\limits_{[a;\,b]}\left|x^{(k)}(t)-y^{(k)}(t)\right|$;

б) $d(x;\,y)=\sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{\max\limits_{[a;\,b]}\left|x^{(k)}(t)-y^{(k)}(t)\right|}{k!}$;

в) $d(x;\,y)=\max\limits_{0\le k\le n}\left(\max\limits_{t\in[a;\,b]}\left|x^{(k)}(t)-y^{(k)}(t)\right|\right)$

визначають метрику в $C^n_{[a;\,b]}$ *і показати еквівалентність цих трьох метрик.*

✍**7.** [20, с. 27] *Довести, що функції*

а) $d_1(m,\,n)=\dfrac{|m-n|}{mn}$; б) $d_2(m,\,n)=\begin{cases}0, & \text{якщо } m=n,\\ 1+\dfrac{1}{\min\{m,\,n\}}, & \text{якщо } m\neq n\end{cases}$

задають відстані у множині $\mathbb{N}$. *Чи існують такі натуральні числа* m *і* n $(m \neq n)$, *для яких* $d_1(m, n) = d_2(m, n)$?

✍**8.** [20, с. 27] *Довести, що функція*

$$d(x, y) = d((x_1, x_2), (y_1, y_2)) := \\ = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \frac{2(x_1 - y_1)(x_2 - y_2)}{\alpha + 1} + \frac{(x_2 - y_2)^2}{2\alpha + 1}},$$

де $\alpha > 0$, *задає відстань у множині* $\mathbb{R}^2$.

✍**9.** [20, с. 28] *Дослідити, при яких значеннях* p, q *функція*

$$d(x, y) = d((x_1, x_2), (y_1, y_2)) := \\ = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + p(x_1 - y_1)(x_2 - y_2) + q(x_2 - y_2)^2}$$

задає відстань у множині $\mathbb{R}^2$.

10. [20, с. 28] *Дослідити, при яких значеннях* p, q, r *функція*

$$d(x, y) = d((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)) := \\ = \sqrt{p(x_1 - y_1)^2 + q(x_2 - y_2)^2 + r(x_3 - y_3)^2}$$

задає відстань у множині $\mathbb{R}^3$.

✍**11.** [20, с. 28] *Довести, що функція*

$$d(x, y) = d((x_1, x_2, x_3, x_4), (y_1, y_2, y_3, y_4)) :=$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{4} (x_i - y_i)^2 + 2(x_1 - y_1)(x_2 - y_2)\cos\varphi + 2(x_3 - y_3)(x_4 - y_4)\cos\varphi \right)^{\frac{1}{2}},$$

де $0 < \varphi < \pi$, *задає відстань у множні* $\mathbb{R}^4$.

✍**12.** [20, с. 29] *Довести, що функція*

$$d(x, y) = d((x_1, x_2, ..., x_n), (y_1, y_2, ..., y_n)) := \\ = \left(\sum_{i=1}^{n} q_i |x_i - y_i|^p \right)^{\frac{1}{p}},$$

де $p \geq 1$, $q_i > 0$ $\left(i = \overline{1, n}\right)$, *задає відстань у множині* $\mathbb{R}^n$.

✍**13.** [20, с. 29] *Довести, що функція*

$$d(f, g) := \left(\int_a^b q(x) |f(x) - g(x)| dx \right)^{\frac{1}{p}},$$

де $f, g, q \in C_{[a;\,b]}$, $p \geq 1$ *і для всіх* $x \in [a;\, b]$ $q(x) > 0$*, задає відстань у множині* $C_{[a;\,b]}$.

✍**14.** [14, с.356] *Довести, що множина* l_2 *всіх послідовностей* $x = (x_1, x_2, ..., x_n, ...)$ *дійсних чисел, для яких* $\sum_{n=1}^{\infty} x_n^2 < +\infty$*, є метричним простором з метрикою*

$$d(x;\, y) = \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} (x_n - y_n)^2},\;\; x, y \in l_2.$$

Знайти відстань між послідовностями $\left(\dfrac{n+1}{2^n}\right)$ і $\left(\dfrac{1}{2^n}\right)$.

✍**15.** [14, с. 360] *Чи буде на множині всіх числових послідовностей* $x = (x_1, x_2, ..., x_n, ...)$, $x_n \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$ *метрикою функція*

$$d(x;\, y) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \frac{|x_n - y_n|}{1 + |x_n - y_n|},\;\; y = (y_1, ..., y_n, ..)?$$

✍**16.** [20, с. 29] *Довести, що у множині* s *(множині всіх послідовностей дійсних чисел) відстань можна задати у такий спосіб*

$$d((x_n), (y_n)) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \frac{|x_n - y_n|}{1 + |x_n - y_n|},$$

де $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ *будь-який збіжний ряд з додатними членами.*

✍**17.** [20, с.30] *Наділіть координатну площину (система координат декартова прямокутна) метриками* d_i $\left(i = \overline{1, 5}\right)$ *такими, що множина точок* $M(x;\, y)$*, відстань яких до початку координат дорівнює* 1*, є:*

а) колом з центром у початку координат;

б) еліпсом з центром у початку координат і півосями 2 і 3;

в) квадратом з центром у початку координат;

г) ромбом з центром у початку координат і гострим кутом 60^0;

д) ромбом з центром у початку координат і відношенням діагоналей $2:3$.

✍**18.** [20, с.30] *Наділіть координатну площину (система координат декартова з кутом* φ *між координатними осями) метриками*

$d_i\ \left(i=\overline{1,5}\right)$ *такими, що множина точок* $M(x;\, y)$, *відстань яких до початку координат дорівнює* 1, *є:*
а) колом з центром у початку координат;
б) еліпсом з центром у початку координат і півосями 1 і 2;
в) квадратом з центром у початку координат;
г) ромбом з центром у початку координат і гострим кутом 60^0;
д) ромбом з центром у початку координат і відношенням діагоналей $1:2$.

✍**19.** [20, с. 31] *Наділіть координатну площину (система координат декартова прямокутна) метриками* $d_i\ \left(i=\overline{1,5}\right)$ *такими, що множина точок* $M(x;\, y)$, *відстань яких до початку координат дорівнює* 1, *є:*
а) сферою з центром у початку координат;
б) еліпсоїдом обертання навколо осі Oz з центром початку координат і півосями 1, 2;
в) трьохосним еліпсоїдом з центром у початку координат і півосями 1, 2, 3;
г) поверхнею правильного октаедра з центром у початку координат;
д) поверхнею правильного гексаедра з центром у початку координат.

🕮 Практичне заняття №2–3
Тема: Основні властивості метрики.

✍**1.** [20, с. 31] *На координатній площині (система координат декартова прямокутна) з'ясувати геометричний зміст множини*

$$\left\{(x,\, y)\,|\, d_i\left((x,\, y),\, (1,1)\right)=d_i\left((x,\, y),\, (2,\, 2)\right)\right\}\ \left(i=\overline{1,3}\right),$$

де:

а) $d_1\left((x_1,\, y_1),\, (x_2,\, y_2)\right)=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$;

б) $d_2\left((x_1,\, y_1),\, (x_2,\, y_2)\right)=|x_1-x_2|+|y_1-y_2|$;

в) $d_3\left((x_1,\, y_1),\, (x_2,\, y_2)\right)=\max\left\{|x_1-x_2|,\, |y_1-y_2|\right\}$.

✍**2.** [20, с. 32] *Нехай* $C_{[0;\,1]}$ *наділена рівномірною метрикою. Розв'язати рівняння:*

а) $d\left(x^2+2x-3,\, x^2+bx+c\right)=1$;

б) $d\left(x^2+2x-3,\, ax^2+c\right)=1$;

в) $d\left(x^2+2x-1,\, ax^2+bx\right)=1$.

✍**3.** [20, с. 32] *Нехай $C_{[0;1]}$ наділена евклідовою метрикою. Розв'язати рівняння:*

а) $d\left(x^2+x-1,\ ax^2+x-2\right)=1;$

б) $d\left(2x^2+x-1,\ 2x^2+bx-2\right)=1;$

в) $d\left(2x^2+x+1,\ x^2+3x+c\right)=\dfrac{1}{\sqrt{5}}.$

✍**4.** [20, с. 42] *Нехай множина $\mathbb{R}$ наділена природною метрикою, тобто для будь-яких $x, y\in\mathbb{R}$ $d(x, y)=|x-y|$. Скориставшись числовою прямою як геометричною інтерпретацією цього метричного простору і тим фактом, що геометричне відношення „точка c лежить між точками a і b" виражається через поняття відстані так: „$d(a, b)=d(a, c)+d(c, b)$", кожну метричну задачу на прямій можна формулювати у просторі $\mathbb{R}$ (звичайно такі задачі розв'язуються з врахуванням основних властивостей дійсних чисел):*

а) у метричному просторі $\mathbb{R}$ з природною метрикою знайти точки, сума відстаней яких до двох заданих точок a і b дорівнює d_0;

б) у метричному просторі $\mathbb{R}$ з природною метрикою знайти відстань точки $x_0=1$ до множини $A=\left\{x \mid x^{\lg^2 x+\lg x-4}>10^4\right\}$;

в) у метричному просторі $\mathbb{R}$ з природною метрикою знайти відстань між множинами

$$A_1=\left\{x \mid \sqrt{-x^2+4x-3}<x-2\right\},$$
$$A_2=\left\{x \mid \lg(x+8)\geq\lg\left(x^2-3x-4\right)\right\};$$

г) у метричному просторі $\mathbb{R}$ з природною метрикою знайти діаметр множини

$$A=\left\{x \mid \arccos x\leq\frac{\pi}{2},\ 0,2^{\cos 2x}-\frac{1}{25^{\cos^2 x}}<4\cdot 125^{-\frac{1}{2}}\right\}.$$

✍**5.** [20, с. 46] *Нехай множина $\mathbb{R}^2$ наділена метрикою*

$$d\left((x_1, y_1), (x_2, y_2)\right)=\max\left\{|x_1-x_2|, |y_1-y_2|\right\}.$$

На координатній площині подати множину тих точок з $\mathbb{R}^2$, які рівновіддалені від точок $(-1; 0), (1; 0)$.

✍**6.** [20, с. 54] *Довести, що у метричному просторі* (X, d) *для будь-яких* $x_1, x_2, ..., x_n \in X$ *виконується нерівність*

$$d(x_1, x_2) \le \sum_{k=1}^{n-1} d(x_k, x_{k+1}).$$

✍**7.** [20, с.54] *Довести, що функція* $d: \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$, *для якої* $d(a, b) = 0$, *якщо* $a = b$, *і* $d(a, b) = \frac{1}{3^k}$, *якщо* $a \ne b$, *де* k *– найбільший показник степеня* 3, *на який ділиться* $a - b$, *наділяє множину* $\mathbb{Z}$ *метрикою. Переконатись, що для будь-яких* $a, b, c \in \mathbb{Z}$ *виконується нерівність*

$$d(a, b) \le \max\{d(a, c), d(c, b)\}.$$

З'ясувати, яку метричну властивість має множина

$$\{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{Z}, a \not\equiv b (\mathrm{mod}\, 3)\}.$$

✍**8.** [20, с. 55] *Довести, що коли* d *метрика на множині* X, *то функції*

$$\frac{d}{1+d}, \ \ln(1+d), \ d^\alpha \ (0 < \alpha < 1),$$

є метриками на цій множині.

✍**9.** [20, с. 55] *На множині* $\mathbb{R}$ *задані метрики:*

а) $d(x, y) = |x - y|$; б) $d(x, y) = |\mathrm{arctg}\, x - \mathrm{arctg}\, y|$;

в) $d(x, y) = \min\{1, |x - y|\}$; г) $d(x, y) = \ln(1 + |x - y|)$;

д) $d(x, y) = \frac{|x - y|}{1 + |x - y|}$; е) $d(x, y) = |x - y|^\alpha \ (0 < \alpha < 1)$.

У кожній з цих метрик знайти множину точок, відстані яких до точки $x = 0$ *дорівнює* 1.

✍**10.** [20, с.55] *Нехай* (X, d) *– метричний простір і* f *– відображення множини* Y *у множину* X. *Довести, що функція* $d_f(x, y) = d(f(x), f(y))$ *наділяє метрикою множину* Y *тоді і тільки тоді, коли* f *ін'єктивне відображення.*

✍**11.** [20, с.55] *Нехай* (X, d) *– метричний простір і* f *– відображення* X *на* X. *Довести, що функція* $d_f(x, y) = d(f(x), f(y))$ *належить* $M(X)$ *тоді і тільки тоді, коли* f *бієктивне відображення.*

✍**12.** [20, с. 55] *Довести, що коли*

$$d_1, d_2, ..., d_n \in M(X) \text{ і } \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n \in \mathbb{R}^+, \text{то функція}$$

$$d(x, y) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i d_i(x, y)$$

також метрика на множині X.

✍**13.** [20, с.56] *Нехай кожна з множин* $\mathbb{R}^-$ *і* $\mathbb{R}^+$ *наділені метрикою*

$$d(x, y) = \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right|$$

($x, y \in \mathbb{R}^-$ *або* $x, y \in \mathbb{R}^+$*). Наділити метрикою множину* $\mathbb{R}^- \bigcup \mathbb{R}^+$ *так, щоб відстань між точками як множини* $\mathbb{R}^-$ *так і множини* $\mathbb{R}^+$ *не змінювалась. Знайти множину тих точок метричного простору* $\mathbb{R}^- \bigcup \mathbb{R}^+$*, відстань між якими дорівнює* 1.

✍**14.** [20, с.56] *Нехай* $(X_1, d_1), (X_2, d_2)$ – *метричні простори. Довести, що множину* $X_1 \times X_2$ *можна наділити такими метриками:*

а) $d((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = \sqrt{d_1^2(x_1, y_1) + d_2^2(x_2, y_2)}$;

б) $d((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = d_1(x_1, y_1) + d_2(x_2, y_2)$;

в) $d((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = \max\{d_1(x_1, y_1), d_2(x_2, y_2)\}$.

✍**15.** [20, с. 56] *Нехай множина* $\mathbb{R}$ *наділена метриками*

$$d_1(x, y) = |x - y|, \ \ d_2(x, y) = \min\{1, |x - y|\}.$$

Зобразити на координатній площині (прямокутна декартова) множини точок простору $\mathbb{R}^2$*:*

а) $\sqrt{d_i^2(0, x) + d_j^2(0, y)} = 1, \ i, j = 1, 2;$

б) $d_i(0, x) + d_j(0, y) = 1, \ i, j = 1, 2;$

в) $\max\{d_i(0, x), d_j(0, y)\} = 1, \ i, j = 1, 2.$

✍**16.** [20, с. 57] *Нехай множина* $\mathbb{R}$ *наділена метрикою*

$$d(x, y) = \ln(1 + |x - y|).$$

Знайти ті точки в $\mathbb{R}$*, сума відстаней яких до точок* 1 *і* 2 *дорівнює* 1.

✍**17.** [20, с. 57] *Нехай множина* $\mathbb{R}$ *наділена природною метрикою. Побудувати графіки функцій* $f_i(x) = d(x, A_i) \left(i = \overline{1, 6}\right)$*, де* $x \in \mathbb{R}$*:*

а) $A_1=\left\{t \mid \log_{0,5}\left(t^2+2\right)+2<0\right\}$;

б) $A_2=\left\{t \mid \log_{|t-1|}\frac{1}{2}\ge 1\right\}$;

в) $A_3=\left\{t \mid \sin t-\cos t>0\right\}$;

г) $A_4=\mathbb{N}$;

д) $A_5=\mathbb{Z}$

е) $A_6=\mathbb{Q}$.

✍**18.** [20, с. 57] *Нехай множина* $\mathbb{R}$ *наділена природною метрикою. Знайти відстань між множинами:*

$$A_1=\left\{x \mid x^{\log_5(8x)}=16\sqrt[3]{x^4}\right\},$$

$$A_2=\left\{x \mid \cos 10x\cos x=\cos 11x\right\}.$$

✍**19.** [20, с. 57] *Нехай множина* $\mathbb{R}$ *наділена природною метрикою. Знайти діаметри множин:*

а) $A=\left\{x \mid 2^x+1<3\cdot 2^{\frac{x-1}{2}}\right\}$;

б) $A=\left\{x \mid \log_{0,5}(5x+10)<\log_{0,5}\left(x^2+6x+8\right)\right\}$;

в) $A=\left\{x \mid \sin 2x>\cos x\right\}\bigcap[0;\,2\pi]$;

г) $A=\left\{x \mid \dfrac{27^x-3^{2x+1}+2\cdot 3^x}{\sqrt{1-x^2}}\ge 0\right\}$;

д) $A=\left\{x \mid \dfrac{2x^2-7x+3}{\log_2|x-1|}<0\right\}$.

✍**20.** [20, с. 58] *Нехай* $\mathbb{R}^2$ *наділено метрикою*

$$d\left(\left(x_1,\,y_1\right),\left(x_2,\,y_2\right)\right)=\left|x_1-x_2\right|+\left|y_1-y_2\right|.$$

На координатній площині подати множину тих точок з $\mathbb{R}^2$*, які рівновіддалені від точок* $(-1;\,0),\,(1;\,0)$.

✍**21.** [20, с. 58] *Нехай* $\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^+$ *наділено метрикою*

$$d\left(\left(x_1,\,y_1\right),\left(x_2,\,y_2\right)\right)=\frac{\left|x_1-x_2\right|}{x_1x_2}+\frac{\left|y_1-y_2\right|}{y_1y_2}.$$

На координатній площині подати множину тих точок з $\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^+$*, які рівновіддалені від точок* $(1;1),\,(2;\,2)$.

✍**22.** [20, с. 58] *Нехай* $\mathbb{R}^2$ *наділено природною метрикою. Знайти діаметри множин:*

а) $\left\{(x,\,y) \mid \left|x^2-x\right|<y<1\right\}$;

б) $\left\{(x,\,y) \mid x^2-2|x|+y^2\le 0\right\}$;

в) $\{(x,\ y)\mid |y-x|<1,\ |y|\le 2\}$; г) $\left\{(x,\ y)\mid \log_{x^2+y_2}(x+y)>1\right\}$;

д) $\{(x,\ y)\mid \log_{xy} x>1,\ x^2+y^2\le 2\}$; е) $\{(x,\ y)\mid 4x^2+3y^2<2\}$;

є) $\{(x,\ y)\mid 4x^2-3y^2=2\}$; ж) $\{(x,\ y)\mid (x^2+y^2+2x+2y+1=0)\}$;

з) $\left\{(x,\ y)\mid y=\sin\dfrac{1}{x},\ |x|<\dfrac{2}{\pi}\right\}$.

✍**23.** [20, с. 58] *Нехай* $\mathbb{R}^2$ *наділено природною метрикою. На координатній площині подати множину тих точок з* $\mathbb{R}^2$, *які рівновіддалені від множин:*

$$A_1=\{(x,\ y)\mid x^2+y^2=1\},\quad A_2=\{(x,\ y)\mid x=2\}.$$

✍**24.** [16, *с. 366*, 14, *с. 16*] *Знайти відстань між множинами* A *і* B *з* $\mathbb{R}^n$, *якщо:*

а) $A=\{(x;\ y)\mid y=x^2\}$, $B=\{(x;\ y)\mid y=2-x\}$;

б) $A=\{(x;\ y)\mid y=-x^2-4x-3\}$, $B=\{(x;\ y)\mid y=x^2-10x+21\}$;

в) $A=\{(x;\ y)\mid x^2+4y^2=8\}$, $B=\{(x;\ y)\mid x+2\sqrt{3}y=8\}$;

г) $A=\{(x;\ y;\ z)\mid z=x^2+y^2\}$,

$B=\{(x;\ y;\ z)\mid (x-2)^2+(y-2)^2+z^2=1\}$;

д) $A=\left\{(x;\ y;\ z)\mid z=\sqrt{x^2+y^2}\right\}$,

$B=\{(x;\ y;\ z)\mid z-1=-(x-2)^2-(y-2)^2\}$;

е) $A=\{(x;\ y;\ z)\mid x=y=z\}$, $B=\{(x;\ y;\ z)\mid x+y=1,\ z=0\}$.

✍**25.** [16, с. 367] *В множині* A *знайти найвіддаленішу і найближчу точки (якщо вони існують) від множини* B, *якщо:*

а) $A=\left\{(x;\ y)\mid \dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}=1\right\}$, $B=\{(x;\ y)\mid 3x+y-9=0\}$;

б) $A=\{(x;\ y)\mid x^2+2xy+y^2+4y=0\}$, $B=\{(x;\ y)\mid 3x-6y+4=0\}$;

в) $A=\{(x;\ y)\mid 2x^2-4xy+2y^2-x-y=0\}$,

$B=\{(x;\ y)\mid 9x-7y+16=0\}$;

г) $A=\{(x;\ y;\ z)\mid x^2+2y^2+4z^2=8\}$, $B=\{(0;\ 0;\ 3)\}$;

д) $A=\left\{(x;\ y;\ z)\,|\ \dfrac{x^2}{4}+y^2+z^2=1\right\},\ \ B=\{(0;\ 0;\ 0)\}.$

✍**26.** [20, с.59] *Довести, що метричні простори* $\left(C_{[0;\,1]},\ d_1\right)$, $\left(C_{[0;\,2]},\ d_2\right)$*, де для будь-яких* $x_1(t),\ x_2(t)\in C_{[0;\,1]}$

$$d_1\left(x_1(t),\ x_2(t)\right)=\sqrt{\int_0^1\left(x_1(t)-x_2(t)\right)^2dt},$$

а для довільних $y_1(t),\ y_2(t)\in C_{[0;\,2]}$

$$d_2\left(y_1(t),\ y_2(t)\right)=\sqrt{\int_0^2\left(y_1(t)-y_2(t)\right)^2dt},$$

ізометричні.

🕮 Практичне заняття №4

Тема: Топологія метричного простору. Околи. Відкриті і замкнені множини. Межа множини.

✍**1.** [20, с. 78] *Нехай* $C_{[0;\,\pi]}$ *наділено евклідовою метрикою. Чи належать точки:*

а) $f_1(x)=x;$

б) $f_2(x)=1-\left|\dfrac{2}{\pi}x-1\right|;$

в) $f_3(x)=\dfrac{1}{2};$

г) $f_4(x)=-\dfrac{4x^2}{\pi^2}+\dfrac{4x}{\pi}$

кулі $B(\sin x,1)$? *Яка з цих точок є найближчою до центра кулі?*

✍**2.** [20, с. 78] *Множина* $\mathbb{R}$ *наділена метрикою*

$$d(x,\ y)=\ln\left(1+|x-y|\right).$$

Знайти переріз двох куль $B\left(0,\ \dfrac{1}{2}\right)$ *і* $B\left(\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{2}\right)$.

✍**3.** [20, с. 79] *Нехай множина* $\mathbb{N}$ *наділена метрикою: для будь-яких* $m,\ n\in\mathbb{N}$

$$d(m,\ n)=\begin{cases}0, & \text{якщо } m=n,\\ 1+\dfrac{1}{\min\{m,\ n\}}, & \text{якщо } m\neq n.\end{cases}$$

Довести, що кожна куля у цьому метричному просторі містить або одну, або безліч точок.

✍**4.** [20, с. 79] *Довести, що у метричному просторі:*

а) для довільних різних точок існують неперервні кулі з центрами у цих точках;

б) множина точок обмежена тоді і тільки тоді, коли існує куля, яка містить всі точки цієї множини;

в) для двох куль з непорожнім перерізом існує куля, яка є підмножиною кожної з цих куль.

✍**5.** [20, с.79] *Довести, що у метричному просторі $C_{[0;1]}$ з рівномірною метрикою точка $f_1(x)=x^2-x-1$ є внутрішньою точкою множини $A=\left\{f \mid f\in C_{[0;1]},\ f(x)<x\right\}$, а точка $f_2(x)=x$ є межовою і граничною для цієї ж множини.*

✍**6.** [20, с.79] *Знайти для множини A множини $A^0, \partial A, A', \overline{A}, \overline{CA}, (CA)^0$, якщо A множина точок метричного простору $\mathbb{R}^2$ з евклідовою метрикою означається так:*

а) $A=\left\{(x,\ y)\mid -1\le x\le 1,\ -1\le y\le 1\right\}$;

б) $A=\left\{(x,\ y)\mid x^2+y^2-2x+2y-2\le 0\right\}$;

в) $A=\left\{(x,\ y)\mid x,\ y\in\mathbb{Q}\right\}$.

✍**7.** [20, с. 79] *Знайти для множини A множини $\partial A, \partial A\setminus A$, якщо A множина точок або метричного простору $\mathbb{R}$, або метричного простору $\mathbb{R}^2$ (обидва з евклідовою метрикою) означається так:*

а) $A=\left\{(-1)^n+\frac{1}{n}\mid n\in\mathbb{N}\right\}$;

б) $A=\left\{x\mid x\in\mathbb{R},\ \sin\frac{1}{x}=0\right\}$;

в) $A=\left\{x\mid x\in[0;1],\ x\in\mathbb{Q}\right\}$;

г) $A=\left\{(x,\ y)\mid x^2+y^2=\frac{1}{n},\ n\in\mathbb{N}\right\}$;

д) $A=\left\{(x,\ y)\mid x^2+y^2+2x-2y-2=\frac{4n+1}{n^2},\ n\in\mathbb{N}\right\}$;

е) $A=\left\{\left(x,\ \frac{1}{n}\right)\mid x\in\mathbb{R},\ n\in\mathbb{N}\right\}$;

є) $A=\left\{\left(\frac{1}{n},\ y\right)\mid n\in\mathbb{N},\ |y|\le\frac{1}{n}\right\}$;

ж) $A=\left\{\left(\frac{1}{n},\ y\right)\mid n\in\mathbb{N},\ |y|\le n\right\}$;

з) $A=\left\{(x,\ y)\mid x,\ y\in\mathbb{R},\ \sin\frac{1}{x+y}=0\right\}$;

и) $A=\left\{(x,\ y)\mid mx^2+ny^2=1,\ m,\ n\in\mathbb{N}\right\}$.

✍**8.** [20, с. 80] *Нехай множини* $\mathbb{R}$ *та* $\mathbb{R}^2$ *наділені евклідовою метрикою. Означити множини, які мають:*
а) одну граничну точку;
б) дві граничні точки;
в) три граничні точки.

✍**9.** [20, с. 80] *Довести, що для будь-якої множини* A *точок метричного простору множини* $\partial A, A', \overline{A}$ *– замкнені.*

✍**10.** [20, с. 80] *Довести, що для будь-якої множини* A *точок метричного простору такі три властивості еквівалентні:*

а) $A' \subset A$; б) $A = \overline{A}$;
в) $\partial A \subset A$; г) для будь-якого $x \notin A$ $d(x, A) > 0$.

а підставі цього сформулювати три еквівалентних означення замкненої множини.

✍**11.** [20, с. 80] *Довести, що для будь-якої множини* A *точок метричного простору* $\overline{A} = A \bigcup \partial A$, $\overline{A} = \bigcap\limits_{F \supset A} F$, *тобто замикання* $\overline{A}$ *множини* A *є перерізом всіх замкнених множин, які містять* A, $\overline{A} = \{x \mid x \in X, d(x, A) = 0\}$.

✍**12.** [20, с. 81] *Довести, що для будь-якої множини* A *точок метричного простору* $A^0 = A \setminus \partial A$, *крім того* $A^0 = \bigcup\limits_{G \subset A} G$, *тобто внутрішність* A^0 *множини* A *є об'єднанням всіх відкритих множин, які містяться в* A.

✍**13.** [20, с. 81] *Довести, що для будь-яких множин* A *і* B *точок метричного простору:*

а) $\operatorname{diam} A = \operatorname{diam} \overline{A}$;

б) $d(x_0, A) = d(x_0, \overline{A})$;

в) $d(A, B) = d(\overline{A}, B) = d(A, \overline{B}) = d(\overline{A}, \overline{B})$.

Чи завжди правильні рівності

$$d(x_0, A) = d(x_0, A^0), \ d(A, B) = d(A^0, B^0)?$$

✍**14.** [20, с. 81] *Довести, що для будь-яких множин* A *і* B *точок метричного простору* $\overline{A \bigcup B} = \overline{A} \bigcup \overline{B}$, $\overline{A \bigcap B} = \overline{A} \bigcap \overline{B}$, $\partial(A \bigcup B)$, $\partial(A \bigcap B)$, $\partial(A \setminus B)$ *– підмножини множини* $\partial A \bigcup \partial B$.

✍**15.** [20, с. 81] *Довести, що коли* G *– відкрита, а* F *– замкнена множини точок метричного простору, то* $G\setminus F$ *– відкрита множина.*

✍**16.** [20, с. 81] *Дослідити, до якого класу множин належать множини:*

а) $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{n};\, \frac{n+1}{n}\right)$; б) $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{n+1};\, 1\right]$.

✍**17.** [20, с. 82] *Нехай маємо метричний простір* $C_{[0;\,1]}$ *з рівномірною метрикою. До якого класу множин належать множини:*

а) $\left\{ f \mid f \in C_{[0;\,1]},\ f(x) < f_0(x) \right\}$, де $f_0(x) \in C_{[0;\,1]}$ – фіксована неперервна на відрізку $[0;1]$ функція;

б) $\left\{ f \mid f \in C_{[0;\,1]},\ f(x) > f_0(x) \right\}$;

в) $\left\{ f \mid f \in C_{[0;\,1]},\ \alpha < f(x) < \beta,\ \alpha,\, \beta \in \mathbb{R} \right\}$;

г) $\left\{ f \mid f \in C_{[0;\,1]},\ \alpha \le f(x) \le \beta,\ \alpha,\, \beta \in \mathbb{R} \right\}$;

д) $\left\{ f \mid f \in C_{[0;\,1]},\ f(0) = 0,\ f(1) = 1,\ \max\limits_{0 \le x \le 1} \left| f(x) \right| \le 1 \right\}$.

✍**18.** [20, с. 82] *Нехай на множині* X *задано дві метрики* d_1 *і* d_2*, причому існує* $\lambda > 0$ *таке, що для будь-яких* $x, y \in X$ $d_2(x, y) \le \lambda d_1(x, y)$*. Довести, що:*

а) будь-яка множина точок з X відкрита відносно метрики d_2 є відкритою відносно метрики d_1;

б) будь-яка множина точок з X замкнена відносно метрики d_2 є замкненою відносно метрики d_1.

✍**19.** [20, с. 82] *Нехай на множині* X *задано дві метрики* d_1 *і* d_2*, причому існують додатні числа* λ_1, λ_2 *такі, що для будь-яких* $x, y \in X$ $\lambda_1 d_1(x, y) \le d_2(x, y) \le \lambda_2 d_1(x, y)$*. Довести, що:*

а) будь-яка множина точок з X відкрита відносно однієї метрики є відкритою і відносно другої;

б) будь-яка множина точок з X замкнена відносно однієї метрики є замкненою і відносно другої.

✍**20.** [20, с. 82] *Нехай на множині* $\mathbb{R}^2$ *задано три метрики*

$$d_1\big((x_1,\, y_1),\, (x_2,\, y_2)\big) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2};$$

$$d_1\big((x_1,\, y_1),\, (x_2,\, y_2)\big) = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|;$$

$$d_1\big((x_1,\, y_1),\, (x_2,\, y_2)\big) = \max\{|x_1 - x_2|,\, |y_1 - y_2|\}.$$

Довести, що:

а) будь-яка множина точок з $\mathbb{R}^2$ відкрита відносно однієї з цих метрик є відкритою і відносно інших;

б) будь-яка множина точок з $\mathbb{R}^2$ замкнена відносно однієї з цих метрик є замкненою і відносно інших.

✍**21.** [16, с. 296] *Дослідити на щільність і ніде не щільність множину* A *в просторі* E*, якщо:*

а) $E = C_{[a;\, b]}$:

1) A – множина всіх неперервних кусково-лінійних функцій;
2) A – множина всіх многочленів степеня не вище n;

б) $E = \mathbb{R},\ r \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ і

1) $A = \{x = m + nr \mid m,\, n \in \mathbb{Z}\}$; 2) $A = \left\{x = m + nr \mid \dfrac{m}{2},\, \dfrac{n}{2} \in \mathbb{Z}\right\}$;

в) $E = [0;1]$, A – множина чисел, розклад яких в правильний десятковий дріб не містить цифр:

1) 4 і 5; 2) 4 і 6.

✍**22.** [16, с. 296] *З'ясувати, якою буде в просторі* E *множина* A *– відкритою чи замкненою, якщо:*

а) $E = C_{[a;\, b]}$ і A – множина:

1) всіх многочленів;
2) всіх многочленів степеня не вище k;
3) всіх многочленів степеня k;
4) всіх функцій $x(t)$: $\forall t \in [a;\, b]\ |x(t)| < L$;

б) $E = \mathbb{R},\ d(x;\, y) = \dfrac{|x - y|}{1 + |x - y|},\ A = [a;\, +\infty)$;

в) $E = \mathbb{Q},\ d(x;\, y) = |x - y|,\ A = (2;\, 3) \cap \mathbb{Q}$.

✍**23.** [17, с. 30] Побудуємо на площині множину A наступним чином: розділимо квадрат $[0;1] \times [0;1]$ прямими $x = \dfrac{1}{3},\ x = \dfrac{2}{3},\ y = \dfrac{1}{3}$,

$y=\dfrac{2}{3}$ на дев'ять однакових квадратів та викинемо центральний відкритий квадрат $\left(\dfrac{1}{3};\dfrac{2}{3}\right)\times\left(\dfrac{1}{3};\dfrac{2}{3}\right)$. Потім кожний з восьми замкнених квадратів, що залишилися, ділимо на дев'ять однакових квадратів і викидаємо всі центральні відкриті квадрати. Продовжуємо цей процес необмежено. Множину, яка залишиться після зчисленного числа кроків, позначимо A (вона називається „*килимом Серпінського*”). Довести, що A – ніде не щільна досконала множина.

✍**24.** [17, с. 31] Побудуємо на площині множину B наступним чином: розділимо квадрат $[0;1]\times[0;1]$ прямими $x=\dfrac{1}{3}$, $x=\dfrac{2}{3}$, $y=\dfrac{1}{3}$, $y=\dfrac{2}{3}$ на дев'ять однакових квадратів. Чотири замкнені квадрати при вершинах основного квадрата назвемо квадратами першого рангу, а їх об'єднання позначимо B_1. Потім кожний із квадратів першого рангу розділимо на дев'ять однакових замкнених квадратів, і ті з них, які знаходяться при вершинах відповідного квадрата першого рангу, назвемо квадратами другого рангу. Об'єднання всіх шістнадцяти замкнених квадратів другого рангу позначимо B_2. Продовжуємо цей процес необмежено. Зрозуміло, що $B_1\supset B_2\supset B_3\supset\ldots$. Спільну частину всіх B_k назвемо „*цвинтарем Серпінського*” і позначимо через B:

$$B=\bigcap_k B_k\,.$$

Довести, що B – ніде не щільна досконала множина. Дослідити його арифметичну структуру.

🕮 Практичне заняття №5
Тема: Збіжність у метричних просторах.

✍**1.** [20, с. 104] *Довести, що коли послідовність точок метричного простору збігається, то збігається до тієї самої границі і будь-яка її підпослідовність.*

✍**2.** [20, с. 104] *Довести, що якщо послідовність* (x_n) *точок метричного простору* (X, d) *збіжна до деякої точки* $x_0 \in X$, *то числова множина* $\{d(x_n, x_0) \mid n \in \mathbb{N}\}$ *обмежена.*

✍**3.** [20, с. 105] *Довести, що точка* x_0 *є точкою дотикання множини* A *тоді і тільки тоді, коли існує послідовність* (x_n) *точок цієї множини, границя якої є точка* x_0. *Яку додаткову умову треба накласти на послідовність* (x_n), *щоб точка* x_0 *була граничною?*

✍**4.** [20, с. 105] *Довести, що послідовність* $\left(\frac{n+1}{n}\right)$ *точок множини* $\mathbb{R}^+$ *відносно метрик:*

а) $d(x, y) = |x - y|$;
б) $d(x, y) = \frac{|x-y|}{xy}$;
в) $d(x, y) = \operatorname{arctg}|x - y|$;
г) $d(x, y) = |\operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} y|$;
д) $d(x, y) = \ln(1 + |x - y|)$

є збіжною і $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = 1$.

✍**5.** [20, с. 105] *Довести, що послідовність* $\left(\left(\frac{3n-1}{2n}, \frac{n+2}{n}\right)\right)$ *точок метричного простору* $\mathbb{R}^2$ *з евклідовою метрикою збігається до точки* $\left(\frac{3}{2}, 1\right)$.

✍**6.** [20, с. 105] *Довести, що послідовність* $\left(\left(\frac{n+1}{n}, \frac{n+1}{n}\right)\right)$ *точок метричного простору* $\mathbb{R}^2$ *відносно метрик:*

а) $d_1((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$;

б) $d_2((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|$;

в) $d_3\left(\left(x_1,\, y_1\right),\, \left(x_2,\, y_2\right)\right)=\max\left\{\left|x_1-x_2\right|,\, \left|y_1-y_2\right|\right\}$

збігається, а відносно метрики

г) $d_4\left(\left(x_1,\, y_1\right),\, \left(x_2,\, y_2\right)\right)=\begin{cases}\left|y_1-y_2\right|, & \text{якщо } x_1=x_2,\\ \left|y_1\right|+\left|y_2\right|+\left|x_1-x_2\right|, & \text{якщо } x_1\neq x_2\end{cases}$

розбігається.

✍**7.** [20, с. 106] *Знайти границі послідовностей точок метричного простору* $\mathbb{R}^2$ *з евклідовою метрикою:*

а) $\left(\left(\dfrac{1}{n},\, \dfrac{(n-1)^2}{(n+1)^3-(n-1)^3}\right)\right)$; б) $\left(\left(\dfrac{3-2n^3}{4+3n^3},\, \dfrac{(n+1)^4-n^4}{n^4+3}\right)\right)$;

в) $\left(\left(\sqrt{\dfrac{n}{2}\left(\dfrac{1}{n^3}+\dfrac{2}{n^3}+\ldots+\dfrac{n}{n^3}\right)},\, \dfrac{1}{n+1}\sin\dfrac{\pi(n+1)}{n+2}\right)\right)$;

г) $\left(\left(n\cdot tg\dfrac{2}{n},\, \dfrac{1}{n^2+1}\sum\limits_{k=1}^{n}k\right)\right)$; д) $\left(\left(\dfrac{1-2+3-4+\ldots-2n}{\sqrt{n^2+1}},\, n\cdot arctg\dfrac{5}{n^2}\right)\right)$;

е) $\left(\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n},\, \dfrac{a^n+1}{a^n+2}\right)\right)$, $a>1$;

є) $\left(\left(\dfrac{\sqrt[3]{n^3+2n+1}}{n+1},\, \dfrac{\sqrt[4]{n^5+2}-\sqrt[3]{n^2+1}}{\sqrt[5]{n^4+2}-\sqrt{n^3+1}}\right)\right)$;

ж) $\left(\left(\left(1+\dfrac{2}{n}\right)^n,\, \left(1-\dfrac{3}{5n}\right)^n\right)\right)$; з) $\left(\left(\left(\dfrac{2n}{2n+1}\right)^n,\, n\left(\ln(2n+3)-\ln 2n\right)\right)\right)$;

и) $\left(\left(n\left(\sqrt[n]{a}-1\right),\, n\left(\sqrt[n]{a}-\sqrt[n+1]{a}\right)\right)\right)$, $a>0$;

і) $\left(\left(\dfrac{(n+2)!+(n+1)!}{(n+3)!};\, \dfrac{n!+(n+1)!}{(n+2)!+(n+3)!}\right)\right)$;

к) $\left(\left(\dfrac{2^n+1}{2^n+5};\, \dfrac{\lg\left(n^2+n-1\right)}{\lg\left(n^{10}+n^5+1\right)}\right)\right)$.

✍**8.** [20, с.107] *Довести, що послідовність* $\left(\dfrac{n}{n+x}\right)$ *точок метричного простору* $C_{[0;\,1]}$ *з рівномірною метрикою збігається до точки* $f_0(x)\equiv 1$ *на відрізку* $[0;1]$.

✍**9.** [20,с.107] *Перевірити, чи збігається послідовність* $\left(\frac{nx}{1+n^2x^2}\right)$ *точок метричного простору* $C_{[0;\,1]}$ *з рівномірною метрикою.*

✍**10.** [20, с.108] *Довести, що послідовність* $\left(\frac{nx}{1+n^2x^2}\right)$ *точок метричного простору* $C_{[0;\,1]}$ *з евклідовою метрикою збігається до точки* $f_0(x)\equiv 0$ *на відрізку* $[0;1]$.

✍**11.** [20, с.107] *Знайти границі послідовностей* (x_n) *точок метричного простору* $C_{[a;\,b]}$ *з рівномірною метрикою:*

а) $\left(\frac{x^{n+1}}{n+1}-\frac{x^{n+2}}{n+2}\right)$, $x_n\in C_{[0;\,1]}$;

б) $\left(x^n-x^{2n}\right)$, $x_n\in C_{[0;\,0{,}5]}$;

в) $\left(\frac{nx}{1+n+x}\right)$, $x_n\in C_{[0;\,1]}$;

г) $\left(\sqrt{x^2+\frac{1}{n^2}}\right)$, $x_n\in C_{[-1;\,1]}$;

д) $\left(\frac{x^n}{1+x^n}\right)$, $x_n\in C_{[2;\,3]}$;

е) $\left(\frac{\sin nx}{n}\right)$, $x_n\in C_{[-2;\,2]}$;

є) $\left(x\operatorname{arctg} nx\right)$, $x_n\in C_{[0{,}5;\,2]}$;

ж) $\left(e^{-(x-n)^2}\right)$, $x_n\in C_{[-2;\,2]}$;

з) $\left(n\left(\sqrt[n]{x}-1\right)\right)$, $x_n\in C_{[1;\,2]}$;

и) $\left(\sqrt[n]{1+x^n}\right)$, $x_n\in C_{[0;\,2]}$.

✍**12.** [20, с.108] *Довести, що якщо послідовність* (f_n) *точок множини* $C_{[a;\,b]}$ *збігається відносно рівномірної метрики, то вона збігається і відносно евклідової метрики.*

✍**13.** [20, с.108] *Знайти границі послідовностей* (x_n) *точок метричного простору* $C_{[a;\,b]}$ *з евклідовою метрикою:*

а) $\left(x^{2n}\right)$, $x_n\in C_{[0;\,1]}$;

б) $\left(\sqrt{x^2+\frac{1}{\sqrt{n}}}\right)$, $x_n\in C_{[-1;\,1]}$;

в) $\left(nxe^{-nx}\right)$, $x_n\in C_{[0;\,1]}$;

г) $\left(\frac{\ln nx}{n^\alpha x}\right)$, $x_n\in C_{[1;\,2]}$, $\alpha>0$;

д) $\left(n\sin\frac{x}{n}\right)$, $x_n\in C_{[0;\,\pi]}$.

14. [20, с. 108] *Описати всі збіжні послідовності метричного простору з метрикою: для будь-яких* $m,\, n \in \mathbb{N}$

$$d(m, n) = \frac{|m-n|}{mn}.$$

15. [20, с.109] *Нехай маємо метричний простір* (X, d). *Довести, що функції*

а) $d_1(x, y) = \dfrac{d(x, y)}{1 + d(x, y)}$;

б) $d_2(x, y) = \min\{d(x, y), 1\}$;

в) $d_3(x, y) = \ln(1 + d(x, y))$

є метрики, еквівалентні метриці d.

16. [20, с.109] *Нехай маємо сімейство метричних просторів* $\left(C_{[0;1]}, d_p\right)$, *де для будь-яких* $f, g \in C_{[0;1]}$

$$d_p(f, g) = \left(\int_0^1 \left| f(x) - g(x) \right|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}, \quad p \geq 1.$$

а) Довести, що кожна послідовність точок з $C_{[0;1]}$ збіжна у рівномірній метриці буде збіжною у середньому при будь-якому p.

б) Побудувати послідовність точок з $C_{[0;1]}$, яка збігається у середньому при будь-якому p, але не збігається рівномірно.

в) Побудувати послідовність точок з $C_{[0;1]}$, яка збігається у середньому при $p = 1$ і розбігається у середньому при $p = 2$.

г) Побудувати послідовність точок з $C_{[0;1]}$, яка збігається у середньому при $p = 1$ і розбігається у кожній точці відрізка $[0;1]$.

17. [20, с.109] *Нехай* $C^n_{[0;1]}$ *– множина всіх функцій, які є неперервними разом зі своїми похідними до* n*-го порядку включно на відрізку* $[0;1]$. *Довести, що функції* d_1, d_2, d_3 *є еквівалентними метриками:*

$$d_1(f, g) = \sum_{k=0}^{n} \max_{0 \leq x \leq 1} \left| f^{(k)}(x) - g^{(k)}(x) \right|,$$

$$d_2(f, g) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \max_{0 \leq x \leq 1} \left| f^{(k)}(x) - g^{(k)}(x) \right|,$$

$$d_3(f, g) = \max_{k=0,1,\dots,n} \max_{0 \leq x \leq 1} \left| f^{(k)}(x) - g^{(k)}(x) \right|.$$

✍**18.** [16, с. 287] *Дослідити на збіжність в метричному просторі* E *послідовності* (x_n), *якщо:*

а) $E = c_0$:

1) $x_n = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, 0, 0, \ldots\right)$; 2) $x_n = (1, 2, 3, \ldots, n, 0, 0, \ldots)$;

3) $x_n = \left(\underbrace{1, 1, 1, \ldots, 1}_{n}, 0, 0, \ldots\right)$; 4) $x_n = (n, n-1, n-2, \ldots, 1, 0, 0, \ldots)$;

5) $x_n = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \ldots\right)$; 6) $x_n = (0, 0, 0, \ldots, 0, 1, 0, 0, \ldots)$;

7) $x_n = \left(\underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{n}, 1, 1, \ldots\right)$; 8) $x_n = \left(\underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{n-1}, 1, \underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{n-1}, 1, 0, 0, \ldots\right)$;

б) $E = m$:

1) $x_n = \left(\underbrace{1, 0, 1, 0, \ldots, 1, 0}_{2n}, 2, 2, \ldots\right)$; 2) $x_n = (1, 2, 3, \ldots, n, n, n, \ldots)$;

3) $x_n = \left(n, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, 0, 0, \ldots\right)$; 4) $x_n = \left(\underbrace{1, 1, 1, \ldots, 1}_{n-1}, n, 1, 1, \ldots\right)$;

5) $x_n = \left(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \ldots, \frac{n}{n+1}, 2, 2, \ldots\right)$; 6) $x_n = \left(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \ldots, \frac{n}{n+1}, 1, 1, \ldots\right)$;

в) $E = c$ (*множина всіх збіжних послідовностей дійсних чисел*):

1) $x_n = \left(\underbrace{1, 0, 1, 0, \ldots, 1, 0}_{2n}, 2, 2, \ldots\right)$; 2) $x_n = (1, 2, 3, \ldots, n, n, n, \ldots)$;

3) $x_n = \left(n, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, 0, 0, \ldots\right)$; 4) $x_n = \left(\underbrace{1, 1, 1, \ldots, 1}_{n-1}, n, 1, 1, \ldots\right)$;

5) $x_n = \left(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \ldots, \frac{n}{n+1}, 2, 2, \ldots\right)$; 6) $x_n = \left(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \ldots, \frac{n}{n+1}, 1, 1, \ldots\right)$.

🕮 Практичне заняття №6

Тема: Компактні і зв'язні множини в метричних просторах.

✍**1.** [20, с. 132] *Довести, що на числовій прямій (метричному просторові $\mathbb{R}$ з природною метрикою):*

а) кожен відрізок $[a;b]$ є компактною множиною;

б) кожен інтервал $(a;b)$ є відносно компактною множиною;

в) інтервали вигляду $(-\infty;a),(a;+\infty)$ і вся числова пряма не є відносно компактними множинами.

✍**2.** [20, с. 132] *Довести, що у метричному просторі $\mathbb{R}^2$ з евклідовою метрикою:*

а) множина $\{(x,\ y)\mid x^2+y^2\le 1\}$ – компактна множина;

б) множина $\{(x,\ y)\mid |x|+|y|<1\}$ – відносно компактна, але не компактна;

в) множина $\{(x,\ y)\mid |x|\le 1\}$ не є відносно компактною множиною.

✍**3.** [20, с. 133] *Довести, що у метричному просторі $\mathbb{R}^3$ з евклідовою метрикою множина*

$$\{(x,\ y,\ z)\mid a\le x\le b,\ c\le y\le d,\ e\le z\le f\}$$

є компактною.

✍**4.** [20, с. 133] *З'ясувати, які із вказаних множин точок простору $C_{[0;1]}$ з рівномірною метрикою є компактними множинами:*

а) $A_1=\{ax^2\mid |a|\le 1\}$;

б) $A_2=\{ax+b\mid |a|\le 1\}$;

в) $A_3=\{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n\mid |a_i|\le 1,\ i=\overline{0,\ n}\}$;

г) $A_4=\{a\sin x\mid a\in\mathbb{Q},\ |a|\le 1\}$;

д) $A_5=\{a\sin x+b\cos x\mid a\in\mathbb{R},\ b\in\mathbb{Q},\ |a|\le 1,\ |b|\le 1\}$;

е) $A_6=C_{[0;1]}$;

є) A_7 – множина всіх многочленів;

ж) A_8 - множина всіх многочленів, всі коефіцієнти яких за модулем не перевищують 1;

з) $A_9=\{f\mid f\in C_{[0;1]},\ |f(x)|\le M\}$;

и) $A_{10}=\{f\mid f(0)=f(1)=0,\ |f(x)|\le 1\}$;

і) $A_{11}=\left\{x(t)\,|\,x(t)\le c\right\}$;

й) $A_{12}=\left\{x(t)\in C_{[0;1]}\,|\,x(t)\le c,\, x'(t)\le c\right\}$;

к) $A_{13}=\left\{x(t)\in C^2_{[0;1]}\,|\,|x(t)|\le c,\, |x'(t)|\le c,\, |x''(t)|\le\right\}$;

л) $A_{14}=\left\{x(t)\in C^2_{[0;1]}\,|\,|x(t)|\le c,\, |x''(t)|\le\right\}$;

м) $A_{15}=\left\{x(t)\in C^2_{[0;1]}\,|\,|x'(t)|\le c,\, |x''(t)|\le\right\}$.

✍**5.** [20, с. 133] *Довести, що будь-яка замкнена підмножина компактної множини є компактною.*

✍**6.** [20, с. 133] *Довести, що будь-яка нескінченна підмножина компакту має принаймні одну граничну точку.*

✍**7.** [20, с. 134] *Довести, що множина K є компактною тоді і тільки тоді, коли її нескінченна підмножина має граничну точку, яка належить K.*

✍**8.** [20, с.134] *Довести, що об'єднання скінченого числа компактних множин є компактна множина. Чи може об'єднання двох відносно компактних (але не компактних) множин бути компактом?*

✍**9.** [20, с.134] *Довести, що переріз будь-якого сімейства компактних множин є компактна множина. Чи може пеереріз двох відносно компактних множин бути компактом?*

✍**10.** [20, с. 134] *Нехай маємо два метричних простори $(X,\, d_1)$ і $(Y,\, d_2)$, і нехай $A\subset X,\, B\subset Y,\, A\ne\varnothing,\, B\ne\varnothing$. Довести, що у метричному просторі $(X\times X,\, d)$, де для будь-яких $(x_1,\, y_1),(x_2,\, y_2)\in X\times Y$*

$$d\left((x_1,\, y_1),(x_2,\, y_2)\right)=\sqrt{d_1^2(x_1,\, x_2)+d_2^2(y_1,\, y_2)},$$

множина $A\times B$ є компактною тоді і тільки тоді, коли A і B – компактні множини.

✍**11.** [20, с. 134] *Довести, що будь-яка обмежена множина точок метричного простору $\mathbb{R}^2$ з евклідовою метрикою є відносно компактною множиною.*

✍**12.** [20, с. 134] *З'ясувати, які з множин точок метричного простору $\mathbb{R}$ з природною метрикою компактні:*

а) $\left\{x\,|\,5x-20\le x^2\le 8x\right\}$; б) $\left\{x\,|\,\sqrt[4]{10+x}-\sqrt{2-x}>0\right\}$;

в) $\left\{x \mid (x-1)(3-x)(x-2)^2 > 0\right\}$; г) $\left\{x \mid \left(\frac{2}{5}\right)^{\log_{0,25}\left(x^2-5x+8\right)} \le 2,5\right\}$;

д) $\left\{x \mid \frac{1}{2} + \log_9 x - \log_3 5x > \log_{\frac{1}{3}}(x+3)\right\}$;

е) $\left\{x \mid \log_2\left(4^x - 12\right) \le x,\ \log_2\left(4^x - 12\right) \ge 0\right\}$;

є) $\left\{x \mid \log_{\frac{1}{2}}\left(1-|x|\right) > \frac{1}{2}\right\}$; ж) $\left\{x \mid \sin^2 x - \sin x \le 0,\ |x| \le 10\right\}$;

з) $\left\{x \mid tg^2 x + 4tg\, x - 5 > 0,\ |x| \le 10\right\}$; и) $\left\{x \mid \sin^2 x - 5\sin x \cos x + 2 > 0\right\}$.

✍**13.** [20, с.135] *З'ясувати, які з множин точок метричного простору* $\mathbb{R}^2$ *з евклідовою метрикою компактні:*

а) $\left\{(x,\ y) \mid x + y \le 1,\ x - y \le 1,\ x \ge 10\right\}$;

б) $\left\{(x,\ y) \mid x^2 - |x| + 1 = |y| \le 1\right\}$;

в) $\left\{(x,\ y) \mid |x| + |y| \le 1,\ y - |y| = x - |x|\right\}$;

г) $\left\{(x,\ y) \mid |y| = \frac{|x|}{x} - x^2\right\}$;

д) $\left\{(x,\ y) \mid \left|x^2 - x\right| < y \le 1\right\}$;

е) $\left\{(x,\ y) \mid x^2 - 2|x| + y^2 \le 0\right\}$;

є) $\left\{(x,\ y) \mid \log_{|y|} |x| \ge 0,\ \max\{|x|,\ |y|\} \le 2\right\}$;

ж) $\left\{(x,\ y) \mid \sin^2 \pi x + \sin^2 \pi y = 0,\ \max\{|x|,\ |y|\} \le 2\right\}$;

з) $\left\{(x,\ y) \mid \sin^2 \pi\left(x^2 + y^2\right) = 1\right\}$;

и) $\left\{(x,\ y) \mid \sin|x| \le y \le 1\right\}$.

✍**14.** [20, с.136] *З'ясувати, які з множин точок метричного простору* $\mathbb{R}^3$ *з евклідовою метрикою компактні:*

а) $\left\{(x,\ y,\ z) \mid x \ge 0,\ y \ge 0,\ z \ge y,\ x + y + z \le 1\right\}$;

б) $\left\{(x,\ y,\ z) \mid |x| + |y| + |z| = 1\right\}$;

в) $\left\{(x,\ y,\ z) \mid \max\{|x|,\ |y|,\ |z|\} \le 1\right\}$;

г) $\left\{(x,\ y,\ z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \le 1,\ x > 0\right\}$;

д) $\{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + 2z^2 \le 1, y \ge 0\}$;

е) $\{(x, y, z) \mid \max\{|x|, |y|, |z|\} \le 1, |x| + |y| + |z| \ge 1\}$;

є) $\{(x, y, z) \mid z \ge x^2 + 2y^2\}$;

ж) $\left\{(x, y, z) \mid \dfrac{|z|}{\sqrt{x^2 + y^2}} \le 1, x^2 + y^2 \le 1\right\}$;

з) $\{(x, y, z) \mid xyz \ge 0, |x| + 2|y| + 3|z| \le 1\}$;

и) $\{(x, y, z) \mid z^2 - 1 - x^2 - y^2 > 0\}$.

✍**15.** [20, с. 136] *Довести, що у просторі l_2 є обмежені і замкнені множини, які не є компактними.*

✍**16.** [20, с. 136]*Будемо називати сімейство $\{F_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ замкнених підмножин метричного простору X центрованим, якщо переріз будь-якого скінченого числа множин цього сімейства є непорожнім. Довести, що множина K точок метричного простору X є компактною тоді і тільки тоді, коли будь-яке центроване сімейство його замкнених підмножин має непорожній переріз.*

✍**17.** [20, с. 137] *Довести, що метричний простір X є компакт тоді і тільки тоді, коли з будь-якого сімейства замкнених підмножин множини X, переріз яких є порожня множина, можна вибрати скінченне число підмножин із порожнім перерізом.*

✍**18.** [20,с.137] *Переконайтесь, що множина $K = \{0\} \cup$ $\cup \left\{\dfrac{1}{2^{n-2}} \mid n = 2, 3, \ldots\right\}$ точок метричного простору $\mathbb{R}$ з природною метрикою є компактною. З покриття*

$$\left\{\left(x_n - \frac{1}{10 \cdot 2^{n-1}};\ x_n + \frac{1}{10 \cdot 2^{n-1}}\right) \mid n \in \mathbb{N}\right\},$$

де $x_1 = 0,\ x_n = \dfrac{1}{2^{n-2}},\ n = 2, 3, \ldots,$ *виділіть скінченне підпокриття.*

✍**19.** [20, с. 137] *Довести, що у метричному просторі $\mathbb{R}^2$ з евклідовою метрикою сімейство*

$$\left\{B\left((x, y), \frac{2}{3}\right) \mid (x, y) \in \left\{(u, v) \mid d\left((0, 0), (u, v)\right) = \frac{1}{3}\right\}\right\}$$

є покриттям кулі $B\big((0,0),1\big)$. *Чи можна виділити з нього скінченне підпокриття? Чи буде це сімейство покриттям замкненої кулі* $\overline{B}\left((0,0),\dfrac{3}{5}\right)$*? Якщо так, то виділіть з нього скінченне підпокриття.*

✍**20.** [20, с. 137] *Нехай* (X, d) *– метричний простір. Назвемо множини*

$$A^{\varepsilon} := \{x \mid x \in X,\ d(x, A) < \varepsilon\},$$
$$A^{\varepsilon]} := \{x \mid x \in X,\ d(x, A) \le \varepsilon\},$$

де A *– не порожня множина простору* X *і* $\varepsilon > 0$, *відповідно відкритим і замкненим* ε*-облямуванням множини* A. *Довести, що множина* A^{ε} *відкрита і*

$$A^{\varepsilon} = \bigcup_{x\in A} B(x, \varepsilon),$$

а множина $A^{\varepsilon]}$ *замкнена і*

$$A^{\varepsilon]} = \bigcup_{x\in \overline{A}} \overline{B}(x, \varepsilon).$$

Довести, що функція

$$d^{*}(A, B) := \inf_{\varepsilon>0}\{\varepsilon \mid A \subset B^{\varepsilon]},\ B \subset A^{\varepsilon]}\}$$

визначена на множині $\Re\times\Re$, *де* $\Re$ *– сімейство непорожніх компактних підмножин простору* X, *задає метрику на цьому сімействі. Якому простору буде ізометричним простір* $(\Re, d^{*})$, *якщо* $\Re$ *– сімейство всіх одноелементних підмножин метричного простору* $\mathbb{R}$ *з природною метрикою?*

🕮 Практичне заняття №7
Тема: Зв'язні множини в метричних просторах.

✍**1.** [20, с. 157] *Нехай маємо дві непорожні множини* A *і* B *точок метричного простору* X, *які не мають спільних елементів. Чи будуть вони роз'єднаними, коли:*

а) A і B – відкриті множини;

б) A і B – замкнені множини;

в) A – відкрита, а B – замкнена множина?

✍**2.** [20, с. 157] *Які із заданих множин точок метричного простору* $\mathbb{R}$ *з природною метрикою є роз'єднаними:*

а) $A = \{x \mid \sin x = 0\}$, $B = \{x \mid \cos x = 0\}$;

б) $A=\left\{x \mid \sin x=\frac{1}{2}\right\}$, $B=\left\{x \mid \cos^{-2} 2x-\sin^{-2} 2x=\frac{8}{3}\right\}$;

в) $A=\{x \mid \sin x+\cos x=0\}$, $B=\left\{x \mid \frac{4ctg\, x}{1+ctg^2 x}+\sin^2 2x+1=0\right\}$;

г) $A=\{x \mid \cos 2x\cos x=\sin 2x\sin x\}$,

$B=\left\{x \mid \frac{\sin^2 2x-4\sin^2 x}{\sin^2 2x+4\sin^2 x-4}+1=2tg^2 x\right\}$;

д) $A=\{x \mid \cos 2x=2\sin^2 x\}$,

$B=\left\{x \mid \cos\frac{x}{2}\cos\frac{3x}{2}-\sin x\sin 3x-\sin 2x\sin 3x=0\right\}$;

е) $A=\left\{x \mid \sin x>\frac{\sqrt{3}}{2}\right\}$, $B=\left\{x \mid \cos x>\frac{1}{2}\right\}$;

є) $A=\{x \mid \cos x<0\}$, $B=\{x \mid \sin(\cos x)>0\}$;

ж) $A=\left\{x \mid \cos x<-\frac{1}{2}\right\}$, $B=\left\{x \mid \min\{\sin x, \cos x\}\geq -\frac{1}{2}\right\}$;

з) $A=\{x \mid \cos x\geq |\sin x|\}$, $B=\{x \mid 1-\cos x<tg\, x-\sin x\}$;

и) $A=\left\{x \mid \cos^2 x<\frac{1}{4}\right\}$, $B=\{x \mid \cos(\arcsin x)<\sin(arctg\, x)\}$?

✍**3.** [20, с. 158] *Які із заданих множин точок метричного простору $\mathbb{R}^2$ з евклідовою метрикою є роз'єднаними:*

а) $A=\left\{(x, y) \mid \sin(x-y)=2\sin x\sin y,\ x+y=\frac{\pi}{2}\right\}$,

$B=\left\{(x, y) \mid \sin^2 x+\sin^2 y=\frac{1}{2},\ x-y=\frac{4\pi}{3}\right\}$;

б) $A=\{(x, y) \mid \sin(x+y)=0,\ \sin(x-y)=0\}$,

$B=\{(x, y) \mid \cos(x+y)=0,\ \cos(x-y)=0\}$;

в) $A=\{(x, y) \mid \sqrt{2}\cos x=1+\cos y,\ \sqrt{2}\sin x=\sin y\}$,

$B=\{(x, y) \mid \mathrm{tg}^2 x\cos 2y+\mathrm{tg}\, x\cos y+1=0,\ \mathrm{tg}^2 x\sin 2y+\mathrm{tg}\, x\sin y-1=0\}$;

г) $A=\{(x, y) \mid x^2+y^2=0\}$, $B=\{(x, y) \mid |x|+|y|=1\}$;

д) $A=\{(x, y) \mid x<1,\ y<1,\ x+y\geq 1\}$,

$B=\{(x, y) \mid x>1,\ y>1,\ x+y\le 3\}$;

е) $A=\{(x, y) \mid |x-1|+|x|+|y|=1\}$,

$B=\{(x, y) \mid x-y-1>0,\ x+y-1>0,\ x\le 2\}$;

є) $A=\{(x, y) \mid x>0,\ y>0,\ y-|y|=x-|x|,\ y\ne x\}$,

$B=\{(x, y) \mid x<0,\ y<0,\ y+|y|=x+|x|,\ y\ne x\}$;

ж) $A=\{(x, y) \mid |y-x|<1\}$, $B=\left\{(x, y) \mid y>-\dfrac{1}{4x}\right\}$;

з) $A=\{(x, y) \mid |y-x|>1\}$, $B=\{(x, y) \mid 2x^2+2y^2=1\}$;

и) $A=\left\{(x, y) \mid x^2+y^2=\dfrac{1}{(2n-1)^2},\ n\in\mathbb{N}\right\}$,

$B=\left\{(x, y) \mid x^2+y^2=\dfrac{1}{4n^2},\ n\in\mathbb{N}\right\}$?

✍**4.** [20, с. 159] *Довести, що коли зв'язна множина містить більше однієї точки, то вона немає ізольованих точок.*

✍**5.** [20, с. 159] *Довести, що множина E точок метричного простору X зв'язна тоді і тільки тоді, коли з двох роз'єднаних множин A і B, об'єднання яких дорівнює E, обов'язково або $A=\varnothing$, або $B=\varnothing$.*

✍**6.** [20, с. 159] *Довести, що якщо множина E точок метричного простору X зв'язна, то для будь-яких двох роз'єднаних підмножин A і B простору X таких, що $E\subset A\bigcup B$, обов'язково або $E\subset A$, або $E\subset B$.*

✍**7.** [20, с. 159] *Довести, що коли E зв'язна множина у метричному просторі X і $E\subset A\subset \overline{E}$, то A – зв'язна множина.*

✍**8.** [20, с. 159] *Нехай E_1, E_2 – замкнені множини у метричному просторі. Довести, що коли множини $E_1\bigcup E_2$ і $E_1\bigcap E_2$ зв'язні, то E_1 і E_2 зв'язні. Показати, що коли хоч одна з множин не є замкненою, то E_1 і E_2 не обов'язково зв'язні.*

✍**9.** [20, с. 159] *Довести, що об'єднання двох не порожніх зв'язних множин E_1 і E_2 у деякому метричному просторі є зв'язним тоді і тільки тоді, коли $\left(\overline{E_1}\bigcap E_2\right)\bigcup\left(E_1\bigcap \overline{E_2}\right)\ne\varnothing$.*

✍**10.** [20, с. 159] *Довести, що об'єднання зростаючої послідовності зв'язних множин є зв'язна множина.*

✍**11.** [20, с. 160] *Довести, що переріз спадної послідовності компактних зв'язних множин є зв'язна множина. Навести приклад, який показує, що умову компактності не можна замінити замкненістю кожного члена послідовності.*

✍**12.** [20, с. 160] *Довести, що об'єднання будь-якого сімейства зв'язних множин з непорожнім перерізом є зв'язна множина.*

✍**13.** [20, с. 160] *Довести, що у зв'язному метричному просторі* X *будь-яка непорожня підмножина, відмінна від* X, *має хоч одну межову точку.*

✍**14.** [20, с. 160] *Довести, що множина* E *точок простору* $\mathbb{R}$ *з природною метрикою, яка має більше одного елемента, зв'язна тоді і тільки тоді, коли з того, що* $x, y \in E$ *і* $x < z < y$ *випливає, що* $z \in E$.

✍**15.** [20, с. 160] *Довести, що відкрита множина* G *точок простору* $\mathbb{R}^2$ *з евклідовою метрикою зв'язна тоді і тільки тоді, коли будь-які дві точки цієї множини можна з'єднати ламаною, яка лежить в* G, *і кожен відрізок якої паралельний одній із осей координат.*

✍**16.** [20, с. 160] *З'ясувати, які з множин точок метричного простору* $\mathbb{R}$ *з природною метрикою є зв'язними:*

а) $\left\{x \mid \frac{9x+1}{2} - \frac{9x+3}{3} < \frac{9x-3}{6}\right\}$; б) $\left\{x \mid \sqrt{\frac{1+x}{x}} + \frac{1}{x} = 5\right\}$;

в) $\left\{x \mid \lg^2 x^2 = 1\right\}$; г) $\left\{x \mid |x| + |x-1| = 1\right\}$;

д) $\left\{x \mid |x|^3 + |x-1|^3 = 9\right\}$; е) $\left\{x \mid \left|\frac{2}{x-4}\right| > 1\right\}$;

є) $\left\{x \mid \log_{0,5}(2x+6) > \log_{0,5}(x+8)\right\}$; ж) $\left\{x \mid x^2 \log_2 0,3 - 2\log_2 0,09 > 0\right\}$;

з) $\left\{x \mid \frac{\sin x}{1+\cos x} \geq 0,\ 0 \leq x < 6\right\}$; и) $\left\{x \mid 1 < x < 4,\ \sin x \cos x > \frac{1}{4}\right\}$.

✍**17.** [20, с. 161] *З'ясувати, які з множин точок метричного простору* $\mathbb{R}^2$ *з евклідовою метрикою є зв'язними, лінійно-зв'язними, відкритими, областями:*

а) $\left\{(x, y) \mid 2x + 2y = 1,\ 4x + 4y = 3\right\}$; б) $\left\{(x, y) \mid 8^x = 10y,\ 2^x = 5y\right\}$;

в) $\{(x,\,y)\,|\,2^x+2^y=5,\,2^{x+y}=4\}$; г) $\left\{(x,\,y)\,|\,x-y=2,\,-\dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{2}=-1\right\}$;

д) $\{(x,\,y)\,|\,y=|x^2-1|+|x^2-4|\}$; е) $\{(x,\,y)\,|\,y=\log_x x^2\}$;

є) $\{(x,\,y)\,|\,y=1+\lg|x-1|\}$; ж) $\{(x,\,y)\,|\,x^2-2|x|+y^2\le 0\}$;

з) $\{(x,\,y)\,|\,\log_{|y|}|x|>0\}$;

и) $\left\{(x,\,y)\,|\,\left(xy+x^2-3\right)^2\cdot 2^{\lg(xy)+\lg x}+\sqrt[3]{\dfrac{1}{2}\left(xy+\dfrac{1}{xy}\right)}\right\}$;

і) $\{(x,\,y)\,|\,x^2+y^2>1\}$; й) $\{(x,\,y)\,|\,x^2+y^2=1\}$;

к) $\{(x,\,y)\,|\,x^2+y^2\ne 1\}$; л) $\{(x,\,y)\,|\,x^2+y^2=0\}$;

м) $\{(x,\,y)\,|\,x^2+y^2<1\}\cup\{(x,\,y)\,|\,(x-2)^2+y^2<1\}$;

н) $\{(x,\,y)\,|\,x^2-y^2<1\}$; о) $\left\{(x,\,y)\,|\,y-\dfrac{1}{2}\sin\dfrac{\pi}{2x}<\dfrac{1}{4}\right\}$.

✍**18.** [20, с. 161] *З'ясувати, які з множин точок метричного простору $\mathbb{R}^3$ з евклідовою метрикою є зв'язними, областями:*

а) $\{(x,\,y,\,z)\,|\,2x-3y+5z=1,\,-4x+6y-5z+4=0\}$;

б) $\{(x,\,y,\,z)\,|\,x-2y+z-7=0,\,2x+y-z+2=0,\,x-3y+2z-11=0\}$;

в) $\{(x,\,y,\,z)\,|\,7x+4y+7z+1=0,\,2x-y-z+2=0,\,x+2y+3z-1=0\}$;

г) $\{(x,\,y,\,z)\,|\,x-3z+2=0,\ \textit{або}\ 2x-6z-7=0\}$;

д) $\{(x,\,y,\,z)\,|\,x>0,\,y>0,\,x+y<1\}$;

е) $\{(x,\,y,\,z)\,|\,x<0,\,y<0,\,z<0\ \textit{або}\ x+y+z>1\}$;

є) $\{(x,\,y,\,z)\,|\,x^2+y^2+z^2-6x+2y-10z+26=0,\,z=3\}$;

ж) $\{(x,\,y,\,z)\,|\,x^2+y^2=z^2,\,x+2y+3z=1\}$;

з) $\{(x,\,y,\,z)\,|\,x^2+y^2=z^2,\,x+1=0\}$;

и) $\{(x,\,y,\,z)\,|\,x^2+y^2=z^2\}$;

і) $\{(x,\,y,\,z)\,|\,x^2+y^2-z^2<1\}$;

й) $\{(x,\,y,\,z)\,|\,x^2+2y^2+3z^2<4\}$.

✍**19.** [20, с. 162] *Довести, що ,,килим Серпінського'' є зв'язна множина.*

Контрольна робота №1.

✍***1.Задано три функції***

$$d_1 : \mathbb{R}\times\mathbb{R}\to[0;+\infty),$$
$$d_2 : \mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2\to[0;+\infty),$$
$$d_3 : C_{[0;1]}\times C_{[0;1]}\to[0;+\infty).$$

Чи є метриками d_1 ***в*** $\mathbb{R}$***,*** d_2 ***в*** $\mathbb{R}^2$***,*** d_3 ***в*** $C_{[0;1]}$***, якщо:***

1. $d_1(x, y)=|\sin(x-y)|$;

2. $d_2((x_1, y_1),(x_2, y_2))=\sqrt{\max\{|x_1-x_2|, |y_1-y_2|\}}$;

3. $d_3(f, g)=\int\limits_0^1 |f(x)-g(x)|dx$;

4. $d_1(x,y)=\operatorname{arctg}|x-y|$;

5. $d_2((x_1, y_1),(x_2, y_2))=(x_1-x_2)^2+|y_1-y_2|$;

6. $d_3(f, g)=\dfrac{\int\limits_0^1 |f(x)-g(x)|dx}{1+\int\limits_0^1 |f(x)-g(x)|dx}$;

7. $d_1(x, y)=\min\{1, |x-y|\}$;

8. $d_2((x_1, y_1),(x_2, y_2))=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(x_1-x_2)(y_1-y_2)+\frac{1}{3}(y_1-y_2)^2}$;

9. $d_3(f, g)=\max\limits_{0\le x\le 1}|f(x)-g(x)|^2$;

10. $d_1(x, y)=|x^2-y^2|$;

11. $d_2((x_1, y_1),(x_2, y_2))=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(x_1-x_2)(y_1-y_2)+(y_1-y_2)^2}$;

12. $d_3(f, g)=\min\left\{1, \sqrt[3]{\int\limits_0^1 |f(x)-g(x)|dx}\right\}$;

13. $d_1(x, y)=|\operatorname{arctg}x-\operatorname{arctg}y|$;

14. $d_2((x_1, y_1),(x_2, y_2))=|x_1-x_2|+|y_1^2-y_2^2|$;

15. $d_3(f, g) = \sqrt{\max\limits_{0\le x\le 1}\left|f(x) - g(x)\right|}$;

16. $d_1(x, y) = \sqrt{\dfrac{|x-y|}{1+|x-y|}}$;

17. $d_2\left((x_1, y_1), (x_2, y_2)\right) = \ln\left(1 + \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}\right)$;

18. $d_3(f, g) = \int\limits_0^1 \left|f^2(x) - g(x)\right| dx$;

19. $d_1(x, y) = \left(2x^2 + y^2\right)|x - y|$;

20. $d_2\left((x_1, y_1), (x_2, y_2)\right) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + 4(y_1 - y_2)^2}$;

21. $d_3(f, g) = \max\limits_{0\le x\le \frac{1}{2}}\left|f(x) - g(x)\right| + \int\limits_{\frac{1}{2}}^{1}\left|f(x) - g(x)\right| dx$;

22. $d_1(x, y) = |\operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} y|$;

23. $d_2\left((x_1, y_1), (x_2, y_2)\right) = \min\left\{|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|\right\}$;

24. $d_3(f, g) = \ln\left(1 + \sqrt{\int\limits_0^1 \left|f(x) - g(x)\right|^2 dx}\right)$;

25. $d_1(x, y) = \operatorname{arctg}\dfrac{|x-y|}{1+|x-y|}$;

26. $d_2\left((x_1, y_1), (x_2, y_2)\right) = \sqrt{9(x_1 - x_2)^2 + 4(y_1 - y_2)^2}$;

27. $d_3(f, g) = \sin^2\left(\int\limits_0^1 \left|f(x) - g(x)\right| dx\right)$;

28. $d_1(x, y) = |x - y| + (x - y)^2$;

29. $d_2\left((x_1, y_1), (x_2, y_2)\right) = \sqrt{\dfrac{1}{5}(x_1 - x_2)^2 + \dfrac{2}{3}(x_1 - x_2)(y_1 - y_2) + (y_1 - y_2)^2}$;

30. $d_3(f, g) = \max\limits_{0\le x\le 1} e^x \left|f(x) - g(x)\right|$?

✍***2.Множина*** $\mathbb{R}^2$ ***наділена метриками***

$$d_1\left((x_1, y_1), (x_2, y_2)\right) = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|,$$

$$d_2\left((x_1, y_1), (x_2, y_2)\right) = |x_1 - x_2| + 2|y_1 - y_2|,$$

$$d_3\left(\left(x_1,\, y_1\right),\left(x_2,\, y_2\right)\right)=\sqrt{\left(x_1-x_2\right)^2+4\left(y_1-y_2\right)^2},$$
$$d_4\left(\left(x_1,\, y_1\right),\left(x_2,\, y_2\right)\right)=\max\left\{\left|x_1-x_2\right|,\left|y_1-y_2\right|\right\}.$$

Зобразити на координатній площині такі множини точок метричних просторів $\left(\mathbb{R}^2,\, d_i\right),\ i=\overline{1,\,4}$***:***

1. $B\left((0,0),\frac{1}{2}\right),\ \overline{B}\left((0,0),\frac{1}{2}\right),\ S\left((0,0),\frac{1}{2}\right),\ \left(\mathbb{R}^2,\, d_1\right);$

2. $B\left((0,0),\frac{1}{3}\right),\ \overline{B}\left((0,0),\frac{1}{3}\right),\ S\left((0,0),\frac{1}{3}\right),\ \left(\mathbb{R}^2,\, d_2\right);$

3. $B\left((0,0),1\right),\ \overline{B}\left((0,0),1\right),\ S\left((0,0),1\right),\ \left(\mathbb{R}^2,\, d_3\right);$

4. $B\left((0,0),2\right),\ \overline{B}\left((0,0),2\right),\ S\left((0,0),2\right),\ \left(\mathbb{R}^2,\, d_4\right);$

5. $B\left((-2,2),1\right),\ \overline{B}\left((-2,2),1\right),\ S\left((-2,2),1\right),\ \left(\mathbb{R}^2,\, d_1\right);$

6. $B\left((-1,1),1\right),\ \overline{B}\left((-1,1),1\right),\ S\left((-1,1),1\right),\ \left(\mathbb{R}^2,\, d_2\right);$

7. $B\left((2,-2),1\right),\ \overline{B}\left((2,-2),1\right),\ S\left((2,-2),1\right),\ \left(\mathbb{R}^2,\, d_3\right);$

8. $B\left((-2,1),\frac{2}{3}\right),\ \overline{B}\left((-2,1),\frac{2}{3}\right),\ S\left((-2,1),\frac{2}{3}\right),\ \left(\mathbb{R}^2,\, d_4\right);$

9. $B\left(\left(-1,\frac{1}{2}\right),3\right),\ \overline{B}\left(\left(-1,\frac{1}{3}\right),3\right),\ S\left(\left(-1,\frac{1}{2}\right),3\right),\ \left(\mathbb{R}^2,\, d_1\right);$

10. $B\left((-1,2),2\right),\ \overline{B}\left((-1,2),2\right),\ S\left((-1,2),2\right),\ \left(\mathbb{R}^2,\, d_2\right);$

11. $B\left((-1,3),1\right),\ \overline{B}\left((-1,3),1\right),\ S\left((-1,3),1\right),\ \left(\mathbb{R}^2,\, d_3\right);$

12. $B\left((-1,0),1\right),\ \overline{B}\left((-1,0),1\right),\ S\left((-1,0),1\right),\ \left(\mathbb{R}^2,\, d_4\right);$

13. $B\left((-1,1),3\right),\ \overline{B}\left((-1,1),3\right),\ S\left((-1,1),3\right),\ \left(\mathbb{R}^2,\, d_1\right);$

14. $B\left(\left(-1,\frac{1}{2}\right),1\right),\ \overline{B}\left(\left(-1,\frac{1}{2}\right),1\right),\ S\left(\left(-1,\frac{1}{2}\right),1\right),\ \left(\mathbb{R}^2,\, d_2\right);$

15. $B\left(\left(-\frac{1}{3},1\right),1\right),\ \overline{B}\left(\left(-\frac{1}{3},1\right),1\right),\ S\left(\left(-\frac{1}{3},1\right),1\right),\ \left(\mathbb{R}^2,\, d_3\right);$

16. $B\left((1,2),2\right),\ \overline{B}\left((1,2),2\right),\ S\left((1,2),2\right),\ \left(\mathbb{R}^2,\, d_4\right);$

17. $B\left((1,2),3\right),\ \overline{B}\left((1,2),3\right),\ S\left((1,2),3\right),\ \left(\mathbb{R}^2,\, d_1\right);$

18. $B\left((1,-2),3\right),\ \overline{B}\left((1,-2),3\right),\ S\left((1,-2),3\right),\ \left(\mathbb{R}^2,\, d_2\right);$

19. $B((3,2),3)$, $\overline{B}((3,2),3)$, $S((3,2),3)$, $(\mathbb{R}^2, d_3)$;

20. $B\left(\left(\frac{1}{2},2\right),3\right)$, $\overline{B}\left(\left(\frac{1}{2},2\right),3\right)$, $S\left(\left(\frac{1}{2},2\right),3\right)$, $(\mathbb{R}^2, d_4)$;

21. $B((-1,-2),3)$, $\overline{B}((-1,-2),3)$, $S((-1,-2),3)$, $(\mathbb{R}^2, d_1)$;

22. $B\left(\left(1,\frac{1}{2}\right),3\right)$, $\overline{B}\left(\left(1,\frac{1}{2}\right),3\right)$, $S\left(\left(1,\frac{1}{2}\right),3\right)$, $(\mathbb{R}^2, d_2)$;

23. $B\left(\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right),3\right)$, $\overline{B}\left(\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right),3\right)$, $S\left(\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right),3\right)$, $(\mathbb{R}^2, d_3)$;

24. $B((0,2),3)$, $\overline{B}((0,2),3)$, $S((0,2),3)$, $(\mathbb{R}^2, d_4)$;

25. $B((0,1),3)$, $\overline{B}((0,1),3)$, $S((0,1),3)$, $(\mathbb{R}^2, d_1)$;

26. $B((1,2),4)$, $\overline{B}((1,2),4)$, $S((1,2),4)$, $(\mathbb{R}^2, d_2)$;

27. $B((-3,2),3)$, $\overline{B}((-3,2),3)$, $S((-3,2),3)$, $(\mathbb{R}^2, d_3)$;

28. $B((3,-2),3)$, $\overline{B}((3,-2),3)$, $S((3,-2),3)$, $(\mathbb{R}^2, d_4)$;

29. $B((3,0),3)$, $\overline{B}((3,0),3)$, $S((3,0),3)$, $(\mathbb{R}^2, d_1)$;

30. $B((3,2),1)$, $\overline{B}((3,2),1)$, $S((3,2),1)$, $(\mathbb{R}^2, d_2)$.

✍***3. Нехай маємо метричний простір*** (X, d). ***Довести, що:***

1) у будь-якої послідовності (x_n) точок простору X не може бути більше однієї границі;

2) якщо послідовність (x_n) точок простору X збігається, то збігається будь-яка її підпослідовність;

3) якщо у збіжної послідовності (x_n) точок простору X у будь-який спосіб змінити скінченне число її членів, то збіжність не порушиться;

4) якщо послідовність (x_n) точок простору X збігається, то вона обмежена;

5) послідовність (x_n) простору X зібгається до точки x_0 тоді і тільки тоді, коли кожній кулі $B(x_0, r)$ належать всі члени послідовності, крім, можливо, їх скінченого числа;

6) якщо послідовність (x_n) точок простору X збігається і a – довільна, але фіксована точка цього простору, то числова множина $\{d(x_n, a) \mid n \in \mathbb{N}\}$ обмежена;

7) якщо всі члени збіжної послідовності (x_n) точок простору X належать деякій замкненій кулі, то і її границя належить цій кулі;
8) якщо послідовність (x_n) точок простору X збігається, то для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує номер n_0 такий, що для всіх n і m, які більші n_0, виконується нерівність $d(x_n, x_m) < \varepsilon$;
9) якщо M – множина точок простору X і a – гранична точка множини M, то існує послідовність (x_n) точок з M така, що $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$;
10) якщо M – множина точок простору X, а послідовність (x_n) точок з M збігається і $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$, то точка x_0 є точкою дотикання множини M.

🕮 Практичне заняття №8-9

Тема: Повні метричні простори.

✍**1.** [20, с. 163] *З'ясувати, чи будуть фундаментальними у просторі $\mathbb{R}$ з природною метрикою послідовності:*

а) $\left(\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k(k+1)}\right)$; б) $\left(\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{\sqrt{k}}\right)$.

✍**2.** [20, с. 188] *Довести, що послідовності:*

а) $\left(\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{2^{k-1}}\right)$; б) $\left(\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k!}\right)$;

в) $\left(\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k^2}\right)$; г) $\left(\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{\sin k}{2^k}\right)$

точок метричного простору $\mathbb{R}$ з природною метрикою є фундаментальними.

✍**3.** [20, с. 188] *Довести, що послідовності:*

а) $\left(\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k}\right)$; б) $\left(\dfrac{n^2+1}{n}\right)$;

в) $\left((-1)^{n-1}\left(2+\dfrac{3}{n}\right)\right)$; г) $\left(1+2\cdot(-1)^n+3\cdot(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}\right)$;

д) $\left(1+\dfrac{n}{n+1}\cos\dfrac{n\pi}{2}\right)$; е) $\left(1+n\sin\dfrac{n\pi}{2}\right)$;

є) $\left(\dfrac{n^2+1}{2}\cos\dfrac{2n\pi}{3}\right)$

точок метричного простору $\mathbb{R}$ *з природною метрикою не є фундаментальними.*

✍**4.** [20, с. 164] *З'ясувати, чи будуть фундаментальними у просторі* $C_{[0;1]}$ *з рівномірною метрикою послідовності:*

а) $\left(x^n\right)$; б) $\left(x^n - x^{n+1}\right)$.

✍**5.** [20, с. 189] *Довести, що послідовності:*

а) $\left(\dfrac{n^2}{n^2+x^2}\right)$; б) $\left(\sqrt{x^2+\dfrac{1}{n}}\right)$;

в) $\left(\sqrt{x+\dfrac{1}{n}}-\sqrt{x}\right)$; г) $\left(\sqrt{n}\sin\dfrac{x}{n\sqrt{n}}\right)$;

д) $\left(\dfrac{n}{x^2+n^2}arctg\sqrt{nx}\right)$

точок метричного простору $C_{[0;1]}$ *з рівномірною метрикою є фундаментальними.*

✍**6.** [20, с. 190] *Довести, що послідовності:* а) $\left(\dfrac{nx}{1+n^2x^2}\right)$; б) $\left(\sin\left(2^n x\right)\right)$ *точок метричного простору* $C_{[0;1]}$ *з рівномірною метрикою не є фундаментальними.*

✍**7.** [20, с. 191] *Довести, що якщо послідовність* $\left(x_n\right)$ *точок метричного простору* $\left(X, d\right)$ *є фундаментальною і* $y \in X$, *то числова послідовність* $\left(d\left(x_n, y\right)\right)$ *збігається.*

✍**8.** [20, с. 191] *Довести, що якщо послідовність* $\left(x_n\right)$ *точок метричного простору* $\left(X, d\right)$ *є фундаментальною, а послідовність* $\left(y_n\right)$ *точок цього ж простору така, що* $\lim\limits_{n\to\infty} d\left(x_n, y_n\right)=0$, *то послідовність* $\left(y_n\right)$ *теж фундаментальна, причому* $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y_0$ *тоді і тільки тоді, коли* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = y_0$.

✍**9.** [20, с. 191] *Довести, що якщо для послідовності* $\left(x_n\right)$ *точок метричного простору* $\left(X, d\right)$ *ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} d(x_n, x_{n+1})$$

збігається, то ця послідовність фундаментальна.

✍**10.** [20, с. 191] *Визначити, які з метричних просторів* (X, d) *є повними, якщо:*

а) $X = (0; 1)$, $d(x, y) = |x - y|$;

б) $X = \mathbb{Q}$, $d(x, y) = |x - y|$;

в) $X = \mathbb{R}$, $d(x, y) = \min(1, |x - y|)$;

г) $X = \mathbb{R}$, $d(x, y) = \sqrt{|\operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} y|}$;

д) $X = \mathbb{R}$, $d(x, y) = \min(1, \operatorname{arctg}|x - y|)$.

✍**11.** [20, с. 192] *Довести, що простір* $\mathbb{R}^2$ *буде повним відносно кожної з таких метрик:*

а) $d_1((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|$;

б) $d_2((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \min(|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|)$;

в) $d_3((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \sqrt{2(x_1 - x_2)^2 + 3(y_1 - y_2)^2}$;

г) $d_4((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = 2|x_1 - x_2| + 3|y_1 - y_2|$;

д) $d_5((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \max\left(\sqrt{|x_1 - x_2|}, |y_1 - y_2|\right)$.

✍**12.** [20, с. 193] *Довести, що при будь-якому* $\varphi \in (0; \pi)$ *метричний простір* $(\mathbb{R}^2, d_\varphi)$ *є повним, де*

$$d_\varphi((x_1, y_1), (x_2, y_2)) =$$
$$= \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + 2\cos\varphi (x_1 - x_2)(y_1 - y_2) + (y_1 - y_2)^2}$$

✍**13.** [20, с. 193] *Довести, що метричний простір* $(B(E), d)$*, де* $B(E)$ *– множина всіх визначених і обмежених на множині* E *функцій,*

$$d(f, g) = \sup_{x \in E} |f(x) - g(x)|,$$

є повним.

✍**14.** [20, с. 193] *Довести, що простір* l_2 *з метрикою*

$$d((x_n), (y_n)) = \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}(x_n - y_n)^2}, \text{ є неповним.}$$

✍**15.** [20, с. 193] *Довести, що простір* $C_{[a;\, b]}$ *з метрикою*

$$d(f,\, g) = \int_a^b |f(x) - g(x)|\, dx,$$

неповний.

✍**16.** [20, с. 193] *З'ясувати, чи є повним підпростір многочленів простору* $C_{[a;\, b]}$ *з рівномірною метрикою.*

✍**17.** [20, с. 193] *Нехай* $C^{(1)}_{[a;\, b]}$ *– множина всіх неперервно диференційовних на відрізку* $[a; b]$ *функцій. З'ясувати, чи є повним підпростір* $C^{(1)}_{[a;\, b]}$ *простору* $C_{[a;\, b]}$ *з рівномірною метрикою. Чи буде простір* $C_{[a;\, b]}$ *повним, якщо метрику у ньому задати у такий спосіб:*

$$d(f,\, g) = \max\left(\max_{a \le x \le b} |f(x) - g(x)|,\ \max_{a \le x \le b} |f'(x) - g'(x)|\right)?$$

✍**18.** [20, с. 194] *Довести, що будь-який повний підпростір метричного простору є замкнена множина. Чи буде вірним обернене твердження?*

✍**19.** [14, с.369] *Довести, що множина* $l^{(0)}_{\infty}$ *всіх послідовностей* $x = (x_1,\, x_2, ...,\, x_n, ...)$ *дійсних чисел з метрикою* $d(x,\, y) = \max\limits_n |x_n - y_n|,\ \ x, y \in l^{(0)}_{\infty}$ *є повним метричним простором.*

✍**20.** [14, с. 369] *Довести, що множина* s *всіх послідовностей* $x = (x_1,\, x_2, ...,\, x_n, ...)$ *дійсних чисел з метрикою*

$$d(x,\, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{|x_n - y_n|}{1 + |x_n - y_n|},$$

де $x,\, y \in s$, *є повним метричним простором.*

✍**21.** [14, с. 370] *Довести, що множина* $C^n_{[a,\, b]}$ *всіх функцій, які мають неперервні похідні до порядку* n, *з метрикою*

$$d(x,\, y) = \sum_{k=0}^{n} \max_{[a,\, b]} \left| x^{(k)}(t) - y^{(k)}(t) \right|,$$

де $x(t),\, y(t) \in C^n_{[a,\, b]}$, *є повним метричним простором.*

✍**22.** [14, с. 370] *Довести, що множина* $C^{\infty}_{[a,\, b]}$ *всіх нескінченно диференційовних функцій на відрізку* $[a,\, b]$ *з метрикою*

$$d(x, y)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n}\frac{\max\limits_{[a,b]}\left|x^{(n)}(t)-y^{(n)}(t)\right|}{1+\max\limits_{[a,b]}\left|x^{(n)}(t)-y^{(n)}(t)\right|},$$

де $x(t),\, y(t)\in C^{\infty}_{[a,b]}$, *є повним метричним простором.*

✍**23.** [14, с. 370] *Кажуть, що функція* $x(t)$ *задовольняє умові Гельдера степеня* α *на відрізку* $[a, b]$, *якщо існує така стала* $c>0$, *що для всіх* $t_1, t_2\in[a, b]$ *виконується нерівність*

$$\left|x(t_2)-x(t_1)\right|\le c\left|t_2-t_1\right|^{\alpha}.$$

Довести, що простір $H^{\alpha}_{[a,b]}$ *всіх функцій, які задовольняють умові Гельдера степеня* α *на відрізку* $[a, b]$ *з метрикою*

$$d(x, y)=\max_{[a,b]}\left|x(t)-y(t)\right|+\sup_{a\le t_1\le t_2\le b}\frac{\left|\left(x(t_2)-y(t_2)\right)-\left(x(t_1)-y(t_1)\right)\right|}{\left|t_2-t_1\right|^{\alpha}},$$

де $x(t),\, y(t)\in H^{\alpha}_{[a,b]}$, *є повним метричним простором.*

✍**24.** [14, с. 370] *Довести, що простір* $C(\mathbb{R})$ *всіх неперервних на числовій осі* $\mathbb{R}$ *з метрикою*

$$d(x, y)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\frac{\max\limits_{[-n,n]}\left|x(t)-y(t)\right|}{1+\max\limits_{[-n,n]}\left|x(t)-y(t)\right|}$$

є повним метричним простором.

🕮 Практичне заняття № 10

Тема: Відображення метричних просторів. Неперервні відображення.

✍**1.** [21, *с.205*] *Відображення* $\vec{f}:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ *означається в такий спосіб:*

$$(x, y)\mapsto(x^2-y^2, 2xy).$$

Знайти:

а) образи точок $(1,2)$, $(-2,1)$, *прообраз точки* $(1,2)$, *нерухомі точки;*

б) образи прямих $y=kx$, *кривих* $x^2+y^2=r^2$;

в) образ множини $X=\{(x, y)\,|\,0\le x\le 1, 0\le y\le 1-x\}$.

✍**2.** [21, *с.205*] *Відображення* $\vec{f}:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *означається в такий спосіб:*

$$(x,y) \mapsto (x\cos\alpha - y\sin\alpha,\ x\sin\alpha + y\cos\alpha),$$

де $\alpha \in \mathbb{R}$. *Довести, що відображення зберігає відстань і величини кутів. З'ясувати геометричний зміст цього відображення.*

✍**3.** [21, *с.205*] *Відображення* $\vec{f}:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *означається в такий спосіб:*

$$(x,y) \mapsto (x - \frac{2A}{A^2+B^2}(Ax+By+C), y - \frac{2B}{A^2+B^2}(Ax+By+C)),$$

де $A, B, C \in \mathrm{R}$, $A^2 + B^2 \neq 0$. *Довести, що відображення зберігає відстань. З'ясувати геометричний зміст цього відображення. Які точки при цьому відображенні залишаються нерухомими?*

✍**4.** [21, *с.205*] *Нехай на координатній площині маємо одиничне коло з центром у початку координат. Точки* M *і* N, *які лежать на промені* OM, *називають інверсними (симетричними) відносно одиничного кола, якщо* $OM \cdot ON = 1$. *Знайти аналітичне подання відображення, яке переводить точки площини в інверсні відносно кола точки.*

✍**5.** [21, *с.205*] *Площина повертається навколо точки* $A(-3,1)$ *на кут* $\frac{\pi}{4}$ *в додатному напрямі, після цього виконується гомотетія відносно точки* $B(1,5)$ *з коефіцієнтом 4. Побудувати аналітичне подання такого відображення.*

✍**6.** [21, *с.205*] *Яке з лінійних неоднорідних відображень* $x \mapsto a_1x + b_1y + c_1$, $y \mapsto a_2x + b_2y + c_2$ *переводить точки* $(1,1)$, $(0,2)$, $(2,-1)$ *відповідно у точки* $(0,6)$, $(3,7)$, $(-7,2)$.

✍**7.** [21, *с.205*] *Побудувати дробово-лінійне відображення вигляду*

$$x \mapsto \frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_3x + b_3y + c_3}, \quad y \mapsto \frac{a_2x + b_2y + c_2}{a_3x + b_3y + c_3},$$

яке переводить точки $(0,0)$, $(1,1)$, $(2,0)$, $(2,1)$ *відповідно у точки* $(-1,-2)$, $(4,5)$, $(3,6)$, $\left(\frac{5}{2},\frac{7}{2}\right)$.

✍**8.** [22, с.29] *Задано відповідність* $(x,y)\to(2x-y+1;-x+2y-1)$. *Переконайтесь, що ця відповідність задає відображення* $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$, *і, скориставшись матрицями* $A=\begin{pmatrix}2 & -1\\ -1 & 2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix}$, *запишіть це відображення формулою* $Y=AX+B$, *де* $X=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}$, $Y=\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\end{pmatrix}$. *Знайдіть а) образ точок* $(2;3),(-4;4)$; *б) образ бісектриси першого і третього координатних кутів, прямої* $x+y=3$, *параболи* $y=x^2$, *кола* $x^2+y^2=1$.

Розв'яжіть рівняння $Y=AX+B$ *відносно* x *і знайдіть:* ***а)*** *прообраз точок* $(2,3),(-11,11)$; ***б)*** *прообраз прямої* $x-y=2$, *параболи* $y=x^2$, *кола* $x^2+y^2=1$.

Вказівка. *Для знаходження образу кривої, заданої рівнянням, перейдіть до параметричного задання кривої* $x=\varphi(t),\ y=\psi(t)$, *знайдіть образ* $(\varphi(t),\psi(t))$ *і з рівнянь*

$$\begin{cases} 2\varphi(t)-\psi(t)+1=x,\\ -\varphi(t)+2\psi(t)-1=y\end{cases}$$

виключіть параметр t. *Для визначення типу кривої другого порядку*

$$a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_{10}x+2a_{20}y+a_{00}=0$$

Знайдіть $I_1=a_{11}+a_{22}$, $I_2=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}$, $I_2=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}$.

Якщо $I_2>0,\ I_1I_3<0$, *то маємо еліпс; якщо* $I_2<0,\ I_3\neq 0$, *то гіперболу; якщо* $I_2=0,\ I_3\neq 0$, *то параболу.*

✍**9.** [22, с.30] *Задано відповідність* $f(x)\to\int_0^1\left(x^2-f^2(x)\right)dx$. *Переконайтесь, що ця відповідність задає відображення* $F:C_{[0;1]}\to\mathbb{R}$. *Знайдіть образ точок* $f_1(x)=2x^2-1,\ f_2(x)=\sin\pi x$. *Опишіть множину точок виду* $f(x)=x^2+bx+c$, *які є прообразом нуля, тобто розв'яжіть рівняння* $F(f)=0$ *в класі функцій виду* x^2+bx+c.

✍**10.** [22, с.29] *Задано відповідність* $(x,y)\to t^2+(x+y)t+xy$. *Переконайтесь, що ця відповідність задає відображення* $F:\mathbb{R}^2\to C_{[0;1]}$. *Знайдіть образ точки* $(-1;1)$ *і прообраз функцій* $f_1(t)=t^2+3t-2,\ f_2(t)=t^2-5t+6.$

✍**11.** [22, с.31] *Нехай* (X,d) - *метричний простір і* a - *фіксована точка в* X. *Довести, що відображення* $f(x)=d(a,x)$ *не тільки неперервне, але й рівномірно неперервне в* X.

✍**12.** *Довести, що функціонали* $f\left(x(t)\right):C_{[a;b]}\to\mathbb{R}$ *(метрика рівномірна) неперервні, якщо:*

12.1 $f_1(x):=\int_a^b x(t)dt;$ ***12.2*** $f_2(x):=\min\limits_{[a;b]}x(t);$ ***12.3*** $f_2(x):=\max\limits_{[a;b]}x(t).$

✍**13.** [14, *с.377*] *Дослідити на неперервність відображення* $f:C_{[0;1]}\to C_{[0;1]}$ *(метрика рівномірна), якщо:*

13.1 $f(x)=\varphi x$, *де* $\varphi=\varphi(t)$ - *фіксована функція з* $C_{[0;1]}$, *а* $x=x(t)\in C_{[0;1]}$;

13.2 $f(x)=x^2$, *а* $x=x(t)\in C_{[0;1]}$; ***13.3*** $f\left(x(t)\right):=\int_0^t x(s)ds;$

13.4 $f\left(x(t)\right):=\int_0^t x^2(s)ds;$ ***13.5*** $f\left(x(t)\right):=\int_0^t \sin\left(t-x\right)x(s)ds.$

В. 1) неперервне; 2) неперервне; 3) неперервне; 4) ні; 5) неперервне.

✍**14.** [14, *с.378*] *Нехай* $X=\left\{x\in C^1_{[0;1]}\,\middle|\, x(0)=0\right\}$. *Дослідити на неперервність відображення* $f:X\to C_{[0;1]}$, *якщо* $f\left(x(t)\right):=\frac{x(t)}{t}$, $t\in\left[0;1\right]$, $f\left(x(0)\right):=\lim\limits_{t\to 0}\frac{x(t)}{t}$.

В. *ні.*

✍**15.** [6, *с.186*] *Довести, що оператори* $F:C_{[0;1]}\to C_{[0;1]}$ *(метрика рівномірна) є рівномірно неперервними, якщо:*

15.1 $F\left(f(x)\right):=\int\limits_0^x e^{xu}\sin\left(f(u)\right)du;$

15.2 $F\left(f(x)\right):=\int\limits_0^1 \sin\left(1+xf(u)\right)du;$

15.3 $F\left(f(x)\right):=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}\int\limits_0^1 f\left(\frac{xu}{n}\right)du.$

В. *1)* $d\left(F\left(f_1\right),F\left(f_2\right)\right)\le ed\left(f_1,f_2\right)$; *2)* $d\left(F\left(f_1\right),F\left(f_2\right)\right)\le d\left(f_1,f_2\right)$;
3) $d\left(F\left(f_1\right),F\left(f_2\right)\right)\le ed\left(f_1,f_2\right)$.

✍**16.** [22, с.31] *Довести, що відображення* $F\left(f(x)\right)=f'(x)$ *метричного простору* $C_{[0;1]}$ *з рівномірною метрикою в себе не є неперервним в точці* $f_0(x)=x^2$.

Вказівка. *Розгляньте послідовність* $f(x)=x^2-\frac{x^n}{n}$.

✍**17.** [6, *с.186*] *Нехай* $\left(X,d\right)$ *- метричний простір. Довести, що функція* $f:X\to R$ *є неперервною на* X *тоді і тільки, коли* $\forall a\in R$ *множини* $\left\{x\in X\mid f(x)<a\right\}$ *і* $\left\{x\in X\mid f(x)>a\right\}$ *відкриті в* $\left(X,d\right)$.

✍**18.** [17, *с.67*] *Нехай* f *- відображення простору* X *у простір* Y. *Довести, що для неперервності цього відображення необхідно і* *достатньо, щоб прообрази довільної замкненої множини простору Y була замкнена множина простору X.*

✍**19.** [17, *с.68*] *Довести, що неперервний образ зв'язної множини є зв'язна множина.*

✍**20.** [17, *с.68*] *Довести, що довільна лінійна зв'язна множина є зв'язна.*

Вказівка. *Множина E в евклідовому просторі називається лінійно зв'язною, якщо для довільних двох точок $x_1 \in E$ і $x_2 \in E$ існує жорданова крива, носій якої включається в E і містить точки x_1, x_2.*

✍**21.** [17, *с.68*] *Нехай f - взаємно однозначне відображення множини E метричного простору X на множину E_1 метричного простору Y. Чи є обернене відображення E_1 на E неперервне ? Якщо так, то довести, якщо ні, то навести контрприклад.*

✍**22.** [17, *с.68*] *Нехай f - взаємно однозначне неперервне відображення множини E на E_1. Довести, що якщо E не має ізольованих точок, то E_1 також не має ізольованих точок. Чи можна дане твердження перенести на випадок, коли f - неперервне відображення, але не є взаємно однозначним ?*

✍**23.** [17, *с.68*] *Чи правильне твердження: "Якщо f - неперервне відображення множини E на E_1 і якщо E_1 не має ізольованих точок, то E також не має ізольованих точок" ? Чи буде правильним аналогічне твердження, якщо f - взаємно однозначне неперервне відображення E на E_1 ?*

✍**24.** [17, *с.68*] *Нехай f - взаємно однозначне неперервне відображення компактної множини E на E_1. Довести, що якщо E_1 не має ізольованих точок, то E також не має ізольованих точок.*

🕮 Практичне заняття № 11

Тема: Стискуючі відображення. Теорема Банаха.

✍**1.** [21, *с.250*] *Знайдіть* $D(f)$, $E(f)$ *і нерухомі точки відображення* $f(x)$, *якщо:*

1.1 $f(x)=2+\sqrt{9-x}$; ***1.2*** $f(x)=\dfrac{5a^2}{\sqrt{a^2+x^2}}-\sqrt{a^2+x^2}$**,** *де* $a>0$;

1.3 $f(x)=\dfrac{1}{2}\sqrt{x^2-2x-3}-\dfrac{3}{2}$; ***1.4*** $f(x)=\sqrt{1-\sqrt{x^4-x^2}}+1$;

1.5 $f(x)=\dfrac{5}{3}\sqrt{2x^2+3x+9}-\dfrac{2}{3}x^2-1$.

✍**2.** [21, *с.250*] *Знайдіть нерухомі точки відображення:*

2.1 $\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ *за правилом* $y_1=2x_2+3x_2,\ y_2=-2x_1+3x_1^2$;

2.2 $\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ *за правилом* $y_1=x_2x_3,\ y_2=2x_1x_3\ \ y_3=3x_1x_2$;

2.3 $\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}^4$ *за правилом* $y_1=1-x_2-x_3-x_4,\ y_2=3-x_1-2x_3-x_4,$ $y_3=x_1+x_2,\ y_4=x_3+x_4$;

2.4 $\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}^4$ *за правилом* $y_1=1-x_2-x_3-x_4,\ y_2=4x_1+3x_3+x_4-4,$ $y_3=2-2x_1+3x_2+x_4,\ y_4=x_4$;

2.5 $\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}^4$ *за правилом* $y_1=a-x_2-x_3,\ y_2=b-x_1-x_4,$ $y_3=c-x_1-x_4,\ y_4=d-x_2-x_3$; *де* (a,b,c,d)*- фіксована точка* $\mathbb{R}^4$*;*

2.6 $\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ *за правилом* $\begin{cases} y_1=2-x_3-x_4-\ldots-x_n, \\ y_2=3-x_1-x_4-\ldots-x_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_{n-1}=n-x_1-x_2-\ldots-x_{n-2}, \\ y_n=1-x_1-x_2-\ldots-x_{n-1}. \end{cases}$

✍**3.** [6, *с.192*] *Перевірити, що в метричному просторі* $\left(\mathbb{R}^2, d\right)$ *з евклідовою метрикою:*

3.1 *відображення* $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *за правилом* $(x_1, x_2) \to (x_1 - 1, x_2 + 2)$ *не має нерухомих точок і не є стискуючим;*

3.2 *відображення* $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *за правилом* $(x_1, x_2) \to (x_1 \cos\varphi - x_2 \sin\varphi, x_1 \sin\varphi + x_2 \cos\varphi)$, *де* φ *- фіксований кут, має нерухому точку, однак не є стискуючим.*

✍**4.** [22, *с.45*] *Знайти область визначення і переконайтесь, що задана сім'я функцій є множиною нерухомих точок відображення* $C_{[a;b]}$ *в себе за правилом:*

4.1 $y \to y'' - x^2 - 1$; ***4.2*** $y \to -x^2(\ln x - 1)y'' + xy'$;

4.3 $y \to x^3 y''' + xy'$; ***4.4*** $y \to (1 + x^2)y'' + xy'$;

4.5 $y \to y'' - \dfrac{e^x}{1 + e^x}$.

Відповідні сім'ї функцій для перевірки:

1) $y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} - x^2 - 3$; *2)* $y = C_1 x + C_2 \ln x$;

3) $y = C_1 x + C_2 x \ln x + C_3 x \ln^2 x$; *4)* $y = C_1 x + C_2 \sqrt{1 + x^2}$;

5) $y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + \frac{1}{2} e^x \ln(1 + e^x) - \frac{1}{2} e^{-x} \ln(1 + e^x)$.

✍**5.** [22, *с.46*] *Переконайтесь, що відображення простору* $C_{[0;1]}$ *в себе за правилом:*

5.1 $f(x) \to e^x + \int_0^x e^{x-t} f(t)dt$; ***5.2*** $f(x) \to x - \int_0^x (x - t) f(t)dt$;

5.3 $f(x) \to x + 4\int_0^x (t - x) f(t)dt$; ***5.4*** $f(x) \to 1 + 2\int_0^x \cos(x - t) f(t)dt$;

5.5 $f(x) \to \sin x + 2\int_0^x \cos(x - t) f(t)dt$

мають нерухомі точки: 1) e^{2x}, *2)* $\sin x$, *3)* $\frac{1}{2}\sin 2x$, *4)* $1 + 2xe^x$, *5)* xe^x.

✍**6.** [22, *с.46*] *Чи є задані відображення стискуючими?*

6.1 $f(x)=x^2$ *на* $\left[0;\frac{1}{3}\right]$; ***6.2*** $f(x)=4x-4x^2$ *на* $[0;1]$;

6.3 $f(x)=x+\frac{1}{x}$ *на* $[1;+\infty)$;

6.4 $u=0,7x+0,8y,\ v=0,2x+0,05y$ *на* R^2*;*

6.5 $F(y)=\frac{1}{3}\int_0^x y(t)dt$ *на* $C_{[0;\,2]}$ *з рівномірною метрикою.*

✍**7.** [6, *с.192*] *В метричному просторі* $C_{[0;\,1]}$ *з рівномірною метрикою визначити, які з перетворень мають нерухомі точки, є стискуючими відображеннями:*

7.1 $x(t)\to -x(t)$; ***7.2*** $x(t)\to |x(t)|$;

7.3 $f\left(x(t)\right)=x\left(\frac{t}{2}\right)$; ***7.4*** $f\left(x(t)\right)=\int_0^t x(u)du,\ \ t\in[0;1]$;

7.5 $f\left(x(t)\right)=1+\int_0^t x(u)du,\ \ t\in[0;1]$;

7.6 $f\left(x(t)\right)=\int_0^t\left(\int_0^u x(v)dv\right)du=\int_0^t (t-u)x(u)du,\ \ t\in[0;1]$.

✍**8.** [6, *с.193*] *Нехай* $f:X\to X$ *- стискуюче відображення. Довести, що* f *- рівномірно неперервне на* X *.*

✍**9.** [6, *с.193*] *Довести, що в просторі* $(\mathbb{R},d)$ *з евклідовою метрикою відображення*

$$f(x):=x+\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}x,\ \ x\in\mathbb{R}$$

задовольняє умову

$$\forall\{x,y\}\subset\mathbb{R},\ x\neq y:\left|f(x)-f(y)\right|<|x-y|$$

і не має нерухомих точок.

✍**10.** [6, *c.193*] *Нехай функція* $f:[a;b]\to[a;b]$ *має похідну* $f'(x)$ *на відрізку* $[a;b]$. *Довести, що* f *є стискуючим відображенням в просторі* $([a;b],d)$ *з евклідовою метрикою тоді і тільки тоді, коли* $\exists\lambda\in[0;1):\sup\limits_{[a;b]}|f'(x)|\le\lambda$.

✍**11.** [6, *c.193*] *Нехай функція* $F\in C_{[a;b]\times R}$ *задовольняє умову:*

$$\exists m>0,\ \exists M\ge m, \forall x\in[a,b]\ i\ \forall\{y_1,y_2\}\subset\mathbb{R},\ y_1\ne y_2:$$

$$m\le\frac{F(x,y_1)-F(x,y_2)}{y_1-y_2}\le M\ .$$

Довести, що $\exists_!\ f\in C_{[a,b]}, \forall x\in[a,b]: F(x,f(x))=0$.

✍**12.** [6, *c.194*] *Нехай* (X,d) - *компактний метричний простір, а відображення* $f:X\to X$ *задовольняє умову:*

$$\forall\{x,y\}\subset X,\ x\ne y: d(f(x),f(y))<d(x,y).$$

Довести, що відображення f *має єдину нерухому точку.*

🕮 Практичне заняття № 12

Тема: Застосування принципу стискуючих відображень.

✍**1.** [21, *c.273*] *Доведіть, що послідовність, задана рекурентним співвідношенням, має границю і знайдіть її, якщо:*

1.1 $x_1=1,\quad x_n=\dfrac{x_{n-1}}{2+x_{n-1}};$ ***1.2*** $x_1=\sqrt{2},\quad x_n=\sqrt{2+x_{n-1}};$

1.3 $x_1=\dfrac{1}{2},\quad x_n=\dfrac{1}{2}+\dfrac{x_{n-1}^2}{2};$ ***1.4*** $x_1=5,\quad x_{n+1}=\dfrac{2+x_n^2}{2x_n}.$

✍**2.** [21, *c.273*] *Доведіть, що послідовність ланцюгових дробів:*

2.1 $2,\quad 2+\dfrac{1}{2},\quad 2+\dfrac{1}{2+\dfrac{1}{2}},\quad 2+\dfrac{1}{2+\dfrac{1}{2+\dfrac{1}{2}}},\quad \ldots,$

2.2 $$3,\quad 3+\frac{1}{3},\quad 3+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{3}},\quad 3+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{3}}},\quad \ldots$$

має границю і знайдіть її.

✍**3.** [21, *с.273*] *Переконайтесь, що система лінійних рівнянь має єдиний розв'язок, і знайдіть його з точністю до 0,01 методом послідовних наближень, взявши за нульове наближення точку* $(0;0;0)$, *якщо:*

3.1 $$\begin{cases} 10x-2y+z=9, \\ x+5y-z=8, \\ 4x+2y+8z=32, \end{cases}$$

3.2 $$\begin{cases} x+y+z=4, \\ x+5y-6z=5, \\ 3x-2y+7z=4, \end{cases}$$

3.3 $$\begin{cases} 10x+2y+3z=25, \\ 3x+6y-2z=10, \\ 5x+3y+9z=22, \end{cases}$$

3.4 $$\begin{cases} 7x-3y+2z=12, \\ 10x+5y-4z=22, \\ 8x+2y-5z=10. \end{cases}$$

✍**4.** [21, *с.275*] *Методом послідовних наближень розв'язати функціональні (інтегральні) рівняння:*

4.1 $$f(x)=1+\int_0^x f(t)dt, \quad f_0(x)\equiv 0;$$

4.2 $$f(x)=x-\int_0^x (x-t)f(t)dt, \quad f_0(x)\equiv 0;$$

4.3 $$f(x)=1-\int_0^x (x-t)f(t)dt, \quad f_0(x)\equiv 0;$$

4.4 $$f(x)=\frac{5}{6}x+\frac{1}{2}\int_0^x xtf(t)dt, \quad f_0(x)\equiv 0;$$

4.5 $$f(x)=\frac{1}{2}\int_0^1 f(t)dt+e^x-\frac{1}{2}(e-1), \quad f_0(x)\equiv 0.$$

Контрольна робота №1 (продовження)

✍**1.** ***Задано дві функції*** $f_1,\ f_2 \in C_{[a;\,b]}$***. Знайти відстань між ними у просторах*** $\left(C_{[a;\,b]},\, d_1\right), \left(C_{[a;\,b]},\, d_2\right)$***, де***

$$d_1(f_1,\ f_2) = \max_{a\le x\le b}\left| f_1(x) - f_2(x)\right|,$$

$$d_2(f_1,\ f_2) = \int_a^b \left| f_1(x) - f_2(x)\right| dx, \text{ якщо:}$$

1. $f_1(x) = 2\log_2^3 x + 36\log_2 x,\ f_2(x) = 15\log_2^2 x, \left(C_{[4;\,16]},\, d\right);$

2. $f_1(x) = 2\sin 2x,\ f_2(x) = -\cos 4x, \left(C_{\left[0;\,\frac{\pi}{2}\right]},\, d\right);$

3. $f_1(x) = 2^x,\ f_2(x) = -2^{-x+1}, \left(C_{[-1;\,2]},\, d\right);$

4. $f_1(x) = xe^{|x+1|},\ f_2(x) = 3e^{|x+1|}, \left(C_{[-2;\,4]},\, d\right);$

5. $f_1(x) = 2\,\mathrm{ctg}\,x,\ f_2(x) = \sqrt{3} - \mathrm{tg}\,x, \left(C_{\left[\frac{\pi}{6};\,\frac{\pi}{3}\right]},\, d\right);$

6. $f_1(x) = 2^{3x+1} + 3\cdot 2^{x+2},\ f_2(x) = 9\cdot 2^{2x}, \left(C_{[-1;\,1]},\, d\right);$

7. $f_1(x) = 2\ln^3 x + 12\ln x,\ f_2(x) = 9\ln^2 x, \left(C_{\left[e^{\frac{3}{4}};\,e^3\right]},\, d\right);$

8. $f_1(x) = \sin x,\ f_2(x) = -\cos 2x, \left(C_{[0;\,\pi]},\, d\right);$

9. $f_1(x) = 2\left(3^{3x} + 3^x\right),\ f_2(x) = 4\cdot e^{3x}, \left(C_{[-1;\,1]},\, d\right);$

10. $f_1(x) = 3\cos^3 x,\ f_2(x) = -\sin^3 x, \left(C_{\left[0;\,\frac{\pi}{2}\right]},\, d\right);$

✍**2.** ***Довести, що:***

1) простір $\mathbb{R}^2$ з евклідовою метрикою повний;

2) простір $\mathbb{N}$ з метрикою

$$d(m,\ n) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } m = n, \\ 1 + \dfrac{1}{m+n}, & \text{якщо } m \ne n, \end{cases}$$ повний;

3) простір $C_{[a;\,b]}$ з евклідовою метрикою неповний;

4) простір $\mathbb{Z}$ з евклідовою метрикою повний;
5) простір $\mathbb{R}$ з метрикою $d(x, y) = |arctg\, x - arctg\, y|$ неповний;
6) простір $C_{[a;\, b]}$ з рівномірною метрикою повний;
7) простір $\mathbb{Q}$ з евклідовою метрикою неповний;
8) простір $\mathbb{N}$ з метрикою
$d(m, n) = \dfrac{|m-n|}{mn}$, неповний;
9) простір $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ з евклідовою метрикою неповний;
10) простір $\mathbb{N}$ з метрикою

$$d(m, n) = \begin{cases} 0, & якщо\ m = n, \\ 1 + \dfrac{1}{\min\{m, n\}}, & якщо\ m \neq n, \end{cases}$$ повний.

⌛ Завдання № 3 – 5 (зразок).

3. Довести, що оператори $F : C_{[0;1]} \to C_{[0;1]}$ (метрика рівномірна) є рівномірно неперервними, якщо $F(f(x)) := \int\limits_0^x e^{xu} \sin(x(u))du$.

4. В метричному просторі $C_{[0;\,1]}$ з рівномірною метрикою визначити, які з перетворень мають нерухомі точки, є стискуючими відображеннями $x(t) \to -x(t)$.

5. Методом послідовних наближень розв'язати функціональні (інтегральні) рівняння $f(x) = 1 + \int\limits_0^x f(t)dt, \quad f_0(x) \equiv 0.$

Список рекомендованої літератури

1. Берман Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа. – М.: Изд-во физ.-мат. Литературы, 1958. – 436 с.
2. Виленкин Н.Я.,Бохан К.А., Марон И.А. и др. Задачник по курсу математического анализа. – М.: Просвещение, 1971.–Ч.2.– 336 с.
3. Давыдов Н.А.,Коровин П.П.,Никольский В.Н. Сборник задач по математическому анализу. – М.: Просвещение, 1973. – 256 с.
4. Давидов М.О. Курс математичного аналізу. – К.: Вища школа, 1979. – Ч. 1, 2. – 366 с.

5. Давидов М.О. Курс математичного аналізу. – К.: Вища школа, 1979. – Ч. 3. – 384 с.
6. Дороговцев А.Я. Математический анализ: Сборник задач. – К.: Вища школа, 1987. – 408 с.
7. Дюженкова Л.І., Колесник Т.В., Ляшенко М.Я., Михалін Г.О., Шкіль М.І. Математичний аналіз у задачах і прикладах. К.: Вища школа, 2003. – Ч. 2. – 470с.
8. Запорожец Г.И. Руководство к решению задач по математическому анализу. – М.: Высшая школа, 1966. – 460 с.
9. Зорич В.А. Математический анализ. – М.: Наука, Ч.1. – М.: Наука, 1981.–543 с., 1984. – Ч.2. – 640 с.
10. Ильин В.А., Садовничий В.А., Сендов Б.Х. Математический анализ. – М.: Изд-во МГУ, 1985. – 662 с.
11. Колмогоров А.М., Фомін С. В. Елементи теорії функцій і функціонального аналізу. – К.: Вища школа, 1974. – 456 с.
12. Кудрявцев Л.Д. Курс математического анализа. – М.: Высшая школа, 1989. – Т.2.
13. Кудрявцев Л.Д. Курс математического анализа. – М.: Высшая школа, 1989. – Т.1, 2, 3.
14. Кудрявцев Л.Д., Кутасов А.Д., Чехлов В.И., Шабунин М.И. Сборник задача по математическому анализу. Интегралы. Ряды. – М.: Наука, 1986. – 528 с.
15. Ляшко И.И., Боярчук А.К., Гай Я.Г., Головач Г.П. Справочное пособие по математическому анализу. – К.: Высшая школа, 1979. – Ч.2.
16. Ляшко И.И., Боярчук А.К., Александрович И.Н., Молодцов А.И., Рублев Б.В. Сборник задач и упражнений по математическому анализу. – М.: Изд. Дом „Вильямс”, 2001. – Ч.1. – 432 с.
17. Очан Ю.С. Сборник задач по математическому анализу. – М.: Просвещение, 1981. – 272 с.
18. Рябушко А.П., Бархатов В.В., Державец В.В., Юруть И.Е. Сборник индивидуальных заданий по высшей математике. – Минск: Вышейшая школа, 1990. – Ч. 2. – 360 с.
19. Рябушко А.П., Бархатов В.В., Державец В.В., Юруть И.Е. Сборник индивидуальных заданий по высшей математике. – Минск: Вышейшая школа, 1990. – Ч. 3.
20. Томусяк А.А., Ковтонюк М.М., Шунда Н.М. Метричні простори. – Вінниця: ВДПУ, 2002. – 296 с.

21. Ковтонюк М.М., Томусяк А.А. Основи функціонального аналізу. Навчальний посібник для студентів фізико-математичних факультетів педагогічних університетів. – Вінниця: “Едельвейс і К”, 2011. – 574 с.
22. Шунда Н.М., Томусяк А.А., Войцеховський А.П. Математичний аналіз. Метричні простори. – Вінниця, 1987.–48с.

Модуль 2.

🕮 Практичне заняття № 13

Тема: Еквівалентні множини

Запитання для самопідготовки:

1. Як можна порівнювати множини?
2. Що називають взаємно однозначною відповідністю між множинами?
3. Які множини називаються еквівалентними? Запишіть основні властивості еквівалентних множин.

Приклад 1. *Довести, що множина всіх дільників натурального числа* $n = p_1^{r_1} \cdot p_2^{r_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{r_k}$ *(канонічний розклад натурального числа) і множина* $Y_1 \times Y_2 \times \ldots \times Y_k$, *де* $N(Y_1) = r_1 + 1$, $N(Y_2) = r_2 + 1, \ldots,$ $N(Y_k) = r_k + 1$, *еквівалентні. Знайти кількість дільників цього числа.*

Розв’язання. Нехай

$$X = \left\{ p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_k^{\alpha_k} \left(\ \alpha_i = 0, 1, \ \ldots, \ r_i \ \wedge \ i = 1, 2, \ldots, k \right\} \right. -$$

множина всіх дільників числа n, а $Y = Y_1 \times Y_2 \times \ldots \times Y_k$ – прямий добуток k скінченних множин, причому будемо вважати, що $Y_1 = \{0, 1, \ldots, r_1\}$, $Y_2 = \{0, 1, \ldots, r_2\}, \ldots,$ $Y_k = \{0, 1, \ldots, r_k\}$. Кожному елементу множини X $p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k}$ поставимо у відповідність елемент $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k)$ з множини Y,тобто побудуємо відображення $f: X \to Y$ за таким правилом: $f\left(p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k} \right) = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k)$. Якщо $p_1^{\alpha_1'} \cdot p_2^{\alpha_2'} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k'}$ і $p_1^{\alpha_1''} \cdot p_2^{\alpha_2''} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k''}$ два різні дільники числа n, то існує таке i, що $\alpha_i' \neq \alpha_i''$. Тоді образи цих елементів

$$f\left(p_1^{\alpha_1'} \cdot p_2^{\alpha_2'} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k'} \right) = (\alpha_1', \alpha_2', \ldots, \alpha_k'),$$

$$f\left(p_1^{\alpha_1''} \cdot p_2^{\alpha_2''} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k''} \right) = (\alpha_1'', \alpha_2'', \ldots, \alpha_k'')$$

різні, оскільки у них не збігаються принаймні i-ті компоненти. Отже, відображення f - взаємно-однозначне. Нарешті, будь-який елемент $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k)$ з множини Y при цьому відображенні є образом елемента $p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot ... \cdot p_k^{\alpha_k}$ з множини X. Таким чином, ми встановили взаємно-однозначну відповідність між множинами X і Y, і тому вони еквівалентні. Число елементів множини Y легко підрахувати

$$N(Y) = N(\ Y_1 \times Y_2 \times ... \times Y_k\ ) = (r_1+1) \cdot (r_2+1) \cdot\ .\ .\ . \cdot\ (r_k+1).$$

Отже, число дільників числа $n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot ... \cdot p_k^{\alpha_k}$, включаючи, звичайно, 1 і саме число n, дорівнює $(r_1+1)(r_2+1)...(r_k+1)$.

Приклад 2. *Скільки разів буде використана кожна з цифр при записі всіх натуральних чисел від 1 до* 10^n *?*

Розв‘язання. Наприклад, при $n=1$ цифри 1,2,...,9 будуть використовуватись по одному разу, а цифра 0 не буде використовуватись жодного разу, при $n=2$ цифри 1,2,...,9 будуть використовуватись по 20 разів, а цифра 0 - 9 разів. Підрахуємо, скільки разів при записі всіх натуральних чисел від 1 до 10^n буде використана цифра 1. З цією метою подамо кожне число, яке містить хоч одну цифру 1 з допомогою n цифр (1 – у вигляді $\underbrace{00...0}_{n-1}1$, 10 – у вигляді $\underbrace{00...0}_{n-2}10$,...), і позначимо через $X_{n_0, n_1, ..., n_9}$, де $n_0,\ n_2, .\ .\ ., n_9 = 0, 1, .\ .\ .,\ n_1 = 1, 2, ...,\ \sum_{k=0}^{9} n_k = n$, множину тих чисел, кожне з яких містить у своєму записі n_0 цифр 0, n_1 цифр 1, ..., n_9 цифр 9. Нехай, крім того, $Y_{n_0, n_1, ..., n_9}$ – множина всіх перестановок з повторенням з n елементів, серед яких є n_0 елементів 1-го типу, n_1 елементів 2-го типу, ..., n_9 елементів 10-го типу. Побудуємо відображення $f: Y_{n_0, n_1, ..., n_9} \to X_{n_0, n_1, ..., n_9}$ у такий спосіб: образом кожної перестановки y з множини $Y_{n_0, n_1, ..., n_9}$ є перестановка (число) x з n цифр, серед яких 0 записано на n_0 місць, на яких у перестановці y стоять елементи 1-го типу, 1 записано на n_1 місць, на яких у перестановці y стоять елементи 2-го типу, ..., 9 записано на n_9 місць, на яких у перестановці y стоять елементи 10-го типу. Таке відображення є взаємно однозначною відповідністю, і тому $X_{n_0,n_1,\ldots,n_9} \sim Y_{n_0,n_1,\ldots,n_9}$. Звідси маємо, що

$$N\left(X_{n_0,n_1,\ldots,n_9}\right) = N\left(Y_{n_0,n_1,\ldots,n_9}\right) = \frac{n!}{n_0!\cdot n_1!\cdot\ldots\cdot n_9!},$$

а число цифр 1, які буде використано при записі всіх натуральних чисел від 1 до 10^n, дорівнює

$$N_1 = \sum_{\substack{n_0,n_2,\ldots,n_9=0,1,2,\ldots \\ n_1=1,2,\ldots \\ n_0+n_1+\ldots+n_9=n}} \frac{n_1\cdot n!}{n_0!\cdot n_1!\cdot\ldots\cdot n_9!} = n \sum_{\substack{n_0,k,n_2,\ldots,n_9=0,1,\ldots \\ n_0+k+n_2+\ldots+n_9=n}} \frac{(n-1)!}{n_0!\cdot k!\cdot n_2!\cdot\ldots\cdot n_9!} =$$

$$= n\cdot\underbrace{\left(1+1+\ldots+1\right)}_{10\ \textit{разів}} = n\cdot 10^{n-1}.$$

Очевидно, що $N_2 = N_3 = \ldots = N_9 = n\cdot 10^{n-1}$. Залишилось підрахувати N_0. Оскільки кількість всіх цифр, які будуть використані при записі всіх натуральних чисел від 1 до 10^n дорівнює

$$N = 9+9\cdot 2\cdot 10+9\cdot 3\cdot 10^2+\ldots+9\cdot n\cdot 10^{n-1} = 9\cdot\left(1+x+\ldots+x^n\right)'\Big|_{x=10} =$$

$$= 9\cdot\left(\frac{x^{n+1}-1}{x-1}\right)'_{x=10} = 9\cdot\frac{nx^{n+1}-(n+1)x^n+1}{(x-1)^2}\Bigg|_{x=10} =$$

$$= \frac{n\cdot 10^{n+1}-(n+1)\cdot 10^n+1}{9},$$

то $$N_0 = N-9n\cdot 10^{n-1} = n\cdot 10^{n-1}-\frac{10^n-1}{9}.$$

✍**1. [12, с. 110]** *Довести, що множина натуральних чисел і множина чисел, кратних 3, еквівалентні.*

✍**2. [12, с. 110]** *Довести, що множина натуральних чисел еквівалентна множині цілих чисел.*

✍**3. [12, с. 111]** *Довести, що множина точок відрізка* $[0;1]$ *еквівалентна множині точок будь-якого відрізка* $[a;b]$.

✍**4. [12, с. 110]** *Довести, що множина точок довільного інтервала* $(a;\,b)$ *еквівалентна множині* $\mathbb{R}$.

✍**5. [12, с. 113]** *Довести, що* $(0;1]\sim(0;1)$.

✍**6. [12, с. 124]** Переконатись, що відображення $f:\mathbb{N}\to Y$, де

6.1. $Y=\left\{\dfrac{2n}{n+1}\mid n\in\mathbb{N}\right\},\ f(n)=\dfrac{2n}{n+1}$.

6.2. $Y=\left\{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\mid n\in\mathbb{N}\right\},\ f(n)=\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$.

6.3. $Y=\left\{\dfrac{n^2-n+1}{n^2+n+1}\mid n\in\mathbb{N}\right\},\ f(n)=\dfrac{n^2-n+1}{n^2+n+1}$.

6.4. $Y=\left\{-n^2+n+2\mid n\in\mathbb{N}\right\},\ f(n)=-n^2+n+2$.

6.5. $Y=\left\{-n^3+3n\mid n\in\mathbb{N}\right\},\ f(n)=-n^3+3n$.

6.6. $Y=\left\{\dfrac{2n}{n^3+1}\mid n\in\mathbb{N}\right\},\ f(n)=\dfrac{2n}{n^3+1}$.

6.7. $Y=\left\{n+\sin n\mid n\in\mathbb{N}\right\},\ f(n)=n+\sin n$.

6.8. $Y=\left\{n^2-\ln n^2\mid n\in\mathbb{N}\right\},\ f(n)=n^2-\ln n^2$.

6.9. $Y=\left\{\left(n^2+1\right)e^{-n^2}\mid n\in\mathbb{N}\right\},\ f(n)=\left(n^2+1\right)e^{-n^2}$.

6.10. $Y=\left\{(1+n)^{\frac{1}{n}}\mid n\in\mathbb{N}\right\},\ f(n)=(1+n)^{\frac{1}{n}}$.

є взаємно-однозначною відповідністю між множинами $\mathbb{N}$ і Y.

✍**7. [11, с. 9]** *Встановити взаємно однозначну відповідність між множиною $\mathbb{N}$ всіх натуральних чисел і множиною S всіх додатних парних чисел.*

✍**8. [11, с. 9]** *Встановити взаємно однозначну відповідність між множиною $\mathbb{N}$ всіх натуральних чисел і множиною T всіх парних чисел.*

✍**9. [11, с. 9]** *Встановити взаємно однозначну відповідність між множиною $\mathbb{Q}^+$ всіх додатних раціональних чисел та множиною $\mathbb{N}$ всіх натуральних чисел.*

✍**10. [11, с. 9]** *Знайти взаємно однозначне відображення відрізка $[0;1]$ на відрізок $[a;b]$.*

✍**11. [11, с. 9]** *Знайти взаємно однозначне відображення інтервалу $(0;1)$ на всю числову пряму.*

✍**12. [11, с. 9]** *Знайти взаємно однозначне відображення числової прямої на інтервал $(a;b)$:*

12.1 $\mathbb{R}\sim(0;1)$; 12.2 $\mathbb{R}\sim(-1;3)$;

12.4 $\mathbb{R}\sim\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$; 12.4 $\mathbb{R}\sim(a;b)$.

✍**13. [11, с. 9]** *Побудувати взаємно однозначне відображення відрізка на інтервал:*

13.1 $[0;1]\sim(0;1)$; 13.2 $[2;6]\sim(2;6)$;

13.3 $[-1;4]\sim(0;1)$; 13.4 $[a;b]\sim(a;b)$.

✍**14. [11, с. 9]** *Побудувати взаємно однозначне відображення відрізка на всю числову вісь.*

14.1 $[0;1]\to\mathbb{R}$; 14.2 $[2;4)\to\mathbb{R}$;

14.3 $[2;5]\to\mathbb{R}$; 14.4 $[-2;2)\to\mathbb{R}$.

✍**15. [11, с. 9]** *Знайти взаємно однозначну відповідність між відрізком і променем:*

15.1 $[0;1]\to[0;+\infty)$; 15.2 $[-\pi;\pi]\to[2;+\infty)$;

15.3 $[0;1]\to[2;+\infty)$; 15.4 $[a;b)\to[6;+\infty)$.

✍**16. [11, с. 9]** *Знайти взаємно однозначну відповідність між променем і інтервалом.*

16.1 $[0;+\infty)\to(0;1)$; 16.2 $[-\pi;+\infty)\to(0;3)$;

16.3 $[-3;+\infty)\to(2;4)$; 16.4 $[c;+\infty)\to(a;b)$.

✍**17. [11, с. 9]** *Знайти взаємно однозначну відповідність між променем і* $(-\infty;+\infty)$*:*

17.1 $[0;+\infty)\to\mathbb{R}$; 17.2 $[-5;+\infty)\to\mathbb{R}$;

17.3 $[\pi;+\infty)\to\mathbb{R}$; 17.4 $[c;+\infty)\to\mathbb{R}$.

✍**18. [12, с. 10]** *Побудувати взаємно однозначне відображення кола одиничного радіусу на відрізок* $[0;1]$.

✍**19. [12, с. 10]** *Встановити взаємно однозначну відповідність між відкритим одиничним кругом та замкненим одиничним кругом.*

✍**20. [12, с. 10]** *Встановити взаємно однозначну відповідність між колом і прямою.*

✍**21. [12, с. 14]** *Довести за допомогою теореми про еквівалентність проміжної множини (Кантора-Бернштейна) еквівалентність замкненого круга і відкритого круга того ж радіуса на площині.*

✍**22. [12, с. 14]** *Довести за допомогою теореми про еквівалентність проміжної множини (Кантора-Бернштейна) еквівалентність площини і замкненого квадрата на площині.*

🕮 Практичне заняття № 14
Тема: Потужність множини. Зчисленні множини

Запитання для самопідготовки:

1. Що таке потужність множини? Як порівнюються потужності множин?
2. Дайте означення зчисленної множини. Сформулюйте основні властивості зчисленних множин.
3. Яку потужність має множина раціональних чисел?

Приклад1. *Множина всіх простих чисел є зчисленною.*

Розв'язання. Нехай P – множина всіх простих чисел. Оскільки $P \subset \mathbb{N}$, то її зчисленність буде обгрунтована, якщо буде встановлено, що P- нескінченна множина. Припустимо, що $P = \{2,\ 3,\ 5,\ ...,p\}$, де p- найбільше просте число. Тоді всі натуральні числа, більші p будуть складені, тобто $\forall n > p \quad \exists$ просте число p' таке, що n ділиться на p'. Розглянемо число $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot ... \cdot p + 1$. З одного боку, це число більше, ніж p, а, з другого боку, воно не ділиться на жодне просте число. Отримане протиріччя свідчить про те, що множина P - нескінченна. Отже, множина простих чисел є зчисленною, як нескінченна підмножина множини натуральних чисел.

✍**1.** *Знайти потужність множини:*

1.1. $X = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{n-1}{n};\ \dfrac{2n+1}{n}\right) \setminus \bigcup\limits_{n=3}^{\infty}\left(\dfrac{n+1}{n};\ \dfrac{2n-1}{n}\right).$

1.2. $X = \bigcup\limits_{k=0}^{m}\bigcup\limits_{n=3}^{m}\left[\dfrac{kn+1}{n};\ \dfrac{(k+1)n-1}{n}\right]\Delta[k;\ k+1].$

1.3. $X = \bigcup\limits_{n=3}^{\infty}\left[\dfrac{2n+1}{n};\ \dfrac{3n-1}{n}\right]\Delta\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{2n-1}{n};\ \dfrac{3n+1}{n}\right).$

1.4. $X = \bigcup\limits_{n=3}^{\infty}\left[-\dfrac{n+1}{n};\ -\dfrac{1}{n}\right]\Delta\bigcup\limits_{n=3}^{\infty}\left[-\dfrac{n+1}{n};\ 0\right].$

✍**2. [12, с. 141]** *Які з множин є зчисленними?*

2.1. $\left\{\ \dfrac{n-1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\ \right\}.$ 2.2. $\left\{\ 3\cos\dfrac{n\pi}{2} - \dfrac{n-1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\ \right\}.$

2.3. $\left\{\ 2\sin\dfrac{n\pi}{4} + \cos\dfrac{n\pi}{2} + 1 \mid n \in \mathbb{N}\ \right\}.$ 2.4. $\left\{\ \left[\ \dfrac{5^n}{n!}\ \right] \mid n \in \mathbb{N}\ \right\}.$

2.5. $\left\{ n^2 \sin\frac{n\pi}{4} \mid n\in\mathbb{N} \right\}$.   2.6. $\left\{ 1+i^n \mid n\in\mathbb{N}\right\}$.

2.7. $\left\{ (1+i)^n \mid n\in\mathbb{N} \right\}$.   2.8. $\left\{ \left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2}\right)^n \mid n\in\mathbb{N} \right\}$.

2.9. $\left\{ \begin{pmatrix} 0,5 & 0,5 \\ -0,5 & 1,5 \end{pmatrix}^n \mid n\in\mathbb{N}\right\}$.   2.10. $\left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0,5 & 1 & -0,5 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}^n \mid n\in\mathbb{N} \right\}$.

Відповідь: 1); 2); 5); 7); 9). *Вказівка.* Показати, що $A^n = A+(n-1)B$, де $A=\begin{pmatrix} 0,5 & 0,5 \\ -0,5 & 1,5 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -0,5 & 0,5 \\ -0,5 & 0,5 \end{pmatrix}$.

✍**3. [12, с. 142]** *Довести, що зчисленними є множини:*

3.1. Всіх чисел, кратних 10.

3.2. $\left\{x \mid x\in\mathbb{R} \ \wedge \ \sqrt{\cos 2x}=\sqrt{2}\sin x \right\}$.

3.3. $\left\{x \mid x\in\mathbb{R} \ \wedge \log_{\sqrt{2}\sin x}(1+\cos x)=2 \right\}$.

3.4. Всіх раціональних точок відрізка $[a;b]$.

3.5. Нескінченна множина попарно неперекривних інтервалів на числовій прямій;

3.6. Всіх трьохелементних підмножин множини натуральних чисел є зчисленні.

2) *Вказівка*. Розв'язати рівняння $\sqrt{\cos 2x}=\sqrt{2}\cdot\sin x$ і подати задану множину у вигляді $\left\{ \frac{\pi}{6}+2k\pi\left(\ k\in Z \right. \right\} \cup \left\{ \frac{5\pi}{6}+2k\pi \ \left(\ k\in Z \right. \right\}$; 3) *Вказівка*. Розв'язати рівняння $1+\cos x=2\sin^2 x$ при умові, що $1+\cos x>0$ і $0<\sqrt{2}\sin x<1$ або $1+\cos x>0$ і $\sqrt{2}\sin x>1$, і подати задану множину у вигляді $\left\{\frac{\pi}{3}+2k\pi \ \left(\ k\in Z \right.\right\}$; 5) *Вказівка*. Врахувати, що кожен інтервал містить хоч одне раціональне число; 6) **Розв'язання.** Нехай $\Re_3 = \left\{ \ \{n_1,n_2,n_3\} \ \left(\ n_1,n_2,n_3\in N \right. \right\}$. Побудуємо відображення $f:\Re_3\to(0;1)$ у такий спосіб: кожній трьохелементній множині $\{n_1,n_2,n_3\}$ віднесемо число з $(0;1)$, подання якого у вигляді нескінченного десяткового дробу містить три одинички відповідно на

n_1, n_2, n_3 місцях після коми, а всі інші його цифри нулі, тобто число $\frac{1}{10^{n_1}}+\frac{1}{10^{n_2}}+\frac{1}{10^{n_3}}$. Очевидно, що f є взаємно однозначною відповідністю між множиною $\Re_3$ і деякою підмножиною множини раціональних чисел. Оскільки елементами цієї підмножини є числа $\frac{111}{10^3}$, $\frac{111}{10^4}$, $\frac{111}{10^5}$, . . . (образи підмножин $\{1,2,3\}$, $\{2,3,4\}$, $\{3,4,5\}$, ...), то множина $f(\Re_3)$ є зчисленною, як нескінченна множина зчисленної множини. А, отже, і множина $\Re_3$ зчисленна.

✍**4. [11,с.13]** *Яка потужність множини всіх трикутників на площині, вершини яких мають раціональні координати? Відповідь:* a.

✍**5. [11,с.13]** *Яка потужність множини всіх раціональних функцій з цілими коефіцієнтами у чисельнику та знаменнику? Відповідь:* a.

✍**6. [11,с.13]** *Довести, що множина всіх кіл на площині, радіуси яких раціональні і координати центрів яких також раціональні числа, зчисленна.*

✍**7. [11,с.13]** *Дано нескінченну множину E невід'ємних чисел. Позначимо через s верхню межу сум чисел для будь-яких скінченних підмножин в E. Довести, що якщо $s<+\infty$, то в E є не більше зчисленної множини чисел, відмінних від нуля.*

✍**8. [11,с.13]** *Чи правильне твердження:„якщо E – нескінченна множина чисел, розміщена на промені $(0;+\infty)$, то знайдеться таке число $b>0$, що множина $E\bigcap(b;+\infty)$ буде нескінченною"? Відповідь:* ні.

✍**9. [11,с.13]** *Нехай E – зчисленна множина точок на прямій. Чи можна змістити цю множину на величину b (тобто замінити всі точки $x\in E$ точками $x+b$) так, щоб отримана в результаті зсуву множина E_b не перетиналась з E? Відповідь:* так.

✍**10. [12, с. 143]** *Нехай X множина точок числової прямої така, що відстань між будь-якими її точками більша одиниці. Довести, що ця множина скінченна або зчисленна.*

✍**11. [12, с. 144]** *Довести, що будь-яка множина ізольованих точок координатної площини є скінченною або зчисленною.*

✍**12. [12, с. 144]** *Довести, що множина точок розриву будь-якої функції, визначеної і монотонної на відрізку $[a;b]$, є скінченною або зчисленною.*

✍**13. [12, с. 144]** *Довести, що множина точок строгого екстремуму будь-якої функції, визначеної на всій числовій прямій, є скінченною або зчисленною.*

✍**14. [12, с. 144]** *Довести, що коли множина X нескінченна, а множина Y скінчена або зчисленна, то $X \cup Y \sim X$.*

✍**15. [12, с. 144]** *Довести, що коли множина X нескінченна і незчисленна, а множина Y скінченна або зчисленна, то $X \setminus Y \sim X$. <u>Вказівка.</u> Врахувати, що $X \setminus Y$ є нескінченна і незчисленна, і що $X = (X \setminus Y) \cup (X \cap Y)$.*

🕮 Практичне заняття № 15

Тема: Континуальні множини

Запитання для самопідготовки:

1.Дайте означення континуальної множини. Сформулюйте основні властивості континуальних множин.

2. Яку потужність має множина дійсних чисел?

3. Яку потужність має множина всіх послідовностей натуральних чисел?

4. У чому полягає гіпотеза континууму?

5. Чи існують множини, потужність яких більша, ніж потужність континууму. Наведіть приклад.

✍**1. [11, с. 14]** *Яка потужність множини всіх кругів площини?*

✍**2. [11, с. 14]** *На площині побудовано деяку множину кіл, які попарно не перетинаються. Чи може ця множина бути незчисленною?*

✍**3. [11, с. 14]** *На площині побудовано деяку множину літер „Т”, які попарно не перетинаються (розміри можуть бути різними). Чи можна множину цих літер вважати незчисленною?*

✍**4. [11, с. 15]** *На площині побудовано деяку множину літер „Г”, які попарно не перетинаються. Чи може ця множина бути незчисленною?*

✍**5. [12, с. 163]** *Переконатись, що континуальними є множини:*

5.1. $[0\,;+\infty)$.

5.2. $\left[0\,;\frac{1}{n}\right)$, де $n \in \mathbb{N}$.

5.3. $(0\,;\,1] \cup [2\,;\,3)$.

5.4. $\bigcup_{n=1}^{\infty}\left[0\,;\frac{n}{n+1}\right]$.

5.5. $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}(-n\ ;\ 0)$. 5.6. $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{n}\ ;\ \frac{n+1}{n}\right)$.

5.7. $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n-1}{n}\ ;\ \frac{2n+(-1)^{n-1}}{n}\right)$. 5.8. $\left([0\ ;\ 1]\cup(2\ ;\ 3]\right)\setminus\left[\frac{1}{2}\ ;\ 2\right]$.

5.9. $\bigcup\limits_{n=2}^{\infty}\left[\frac{1}{n}\ ;\ n\right)\setminus[1\ ;+\infty)$.

5.10. $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\left(1\ ;\ \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\right)\setminus\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{2n}\ ;\ \frac{2n+1}{n}\right)$.

Вказівка. 10) Врахувати, що послідовність $\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\right)$ зростаюча, а послідовності $\left(\frac{n+1}{2n}\right)$, $\left(\frac{2n+1}{n}\right)$ спадні, причому їх границі дорівнюють відповідно e, $\frac{1}{2}$, 2

✍**6. [12, с. 164]** *Переконатись, що континуальними є множини:*

6.1. $X_1=\left\{x\mid x\in\mathbb{R}\ \wedge\ \left|x^2-4\right|+\left|x^2-5\right|=1\right\}$.

6.2. $X_2=\left\{x\mid x\in\mathbb{R}\ \wedge\ \left|x^2-2\right|+\left|x^2-9\right|=7\right\}$.

6.3. $X_3=\left\{x\mid x\in\mathbb{R}\ \wedge\ \sqrt{x^2-6x+9}+\sqrt{x^2+8x+16}=7\right\}$.

6.4. $X_4=\left\{x\mid x\in\mathbb{R}\ \wedge\ \sqrt{x+6-4\sqrt{x+2}}+\sqrt{x+11-6\sqrt{x+2}}=1\right\}$.

6.5. $X_5=\left\{x\mid x\in\mathbb{R}\ \wedge\ \max(arctgx, arcctgx)\le\frac{\pi}{3}\right\}$.

6.6. $X_6=\left\{x\mid x\in\mathbb{R}\ \wedge\ \min(\sin x,\cos x)\ge-\frac{1}{2}\right\}$.

6.7. $X_7=\left\{x\mid x\in\mathbb{R}\ \wedge\ \max(\log_3 x,\log_{\frac{1}{2}} x)\le 3\right\}$.

6.8. $X_8=\left\{x\mid x\in\mathbb{R}\ \wedge\ 2^{(tgx(}<2\right\}$.

6.9. $X_9=\left\{x\mid x\in\mathbb{R}\ \wedge\ \sin|x|+\sin x>0\right\}$.

6.10. $X_{10}=\left\{x\mid x\in\mathbb{R}\ \wedge\ \cos x>|\sin x|\right\}$.

Вказівка. Показати, що: 1) $X_1=\left[-\sqrt{5};-2\right]\cup\left[2;\sqrt{5}\right]$;
2) $X_2=(-\infty;-3]\cup[3;+\infty)$; 3) $X_3=[-4;3]$; 4) $X_4=[2;7]$;

5) $X_5 = \left[\frac{1}{\sqrt{3}}\ ;\ \sqrt{3}\right]$; 6) $X_6 = \bigcup\limits_{k\in Z}\left[-\frac{\pi}{6}+2k\pi\ ;\ \frac{2\pi}{3}+2k\pi\right]$;

7) $X_7 = \left[\frac{1}{8}\ ;\ 27\right]$; 8) $X_8 = \bigcup\left(-\frac{\pi}{4}+n\pi\ ;\ \frac{\pi}{4}+n\pi\right)$;

9) $X_9 = \bigcup\limits_{k=0}^{\infty}\big(2k\pi\ ;\ (2k+1)\pi\big)$; 10) $X_{10} = \bigcup\limits_{k\in Z}\left(-\frac{\pi}{4}+2k\pi\ ;\ \frac{\pi}{4}+2\mathrm{k}\pi\right)$.

✍**7. [12, с. 165]** *Переконатись, що континуальними є множини:*

7.1. $X_1 = \left\{\ (x,y)\mid x\in\mathbb{R}\ \wedge\ y=x^2\ \right\}$.

7.2. $X_2 = \left\{\ (x,y)\mid x\in\mathbb{R}\ \wedge\ y=tgx\ \right\}$.

7.3. $X_3 = \left\{\ (x,y)\mid x\in\mathbb{R}\ \wedge\ y=\sqrt{2-x^2}\ \right\}$.

7.4. $X_4 = \left\{\ (x,y)\mid x\in\mathbb{R}\ \wedge\ y=\arcsin(x-2)\ \right\}$.

7.5. $X_5 = \left\{\ (x,y)\mid x\in\mathbb{R}\ \wedge\ y=\arccos\frac{|x-2|}{2}\ \right\}$.

7.6. $X_6 = \left\{\ (x,y)\mid x\in\mathbb{R}\ \wedge\ y=\log_2\big(2-|x|\big)\ \right\}$.

7.7. $X_7 = \left\{\ (x,y)\mid x\in\mathbb{R}\ \wedge\ y=\log_{\frac{1}{2}}\big(4|x|-2\big)\ \right\}$.

7.8. $X_8 = \left\{\ (x,y)\mid x\in\mathbb{R}\ \wedge\ y=\arcsin\frac{1}{x}\ \right\}$.

7.9. $X_9 = \left\{\ (x,y)\mid x\in\mathbb{R}\ \wedge\ y=arctg\frac{1}{x}\ \right\}$.

7.10 $X_{10} = \left\{\ (x,y)\mid x\in\mathbb{R}\ \wedge\ y=arctg(ctgx)\ \right\}$.

Вказівка. Показати, що: 1) $X_1\sim\mathbb{R}$; 2) $X_2\sim\bigcup\limits_{n\in Z}\left(-\frac{\pi}{2}+n\pi\ ;\frac{\pi}{2}+n\pi\right)$;

3) $X_3\sim\left[-\sqrt{2}\ ;\ \sqrt{2}\right]$; 4) $X_4\sim[1\ ;\ 3]$; 5) $X_5\sim[0\ ;\ 4]$; 6) $X_6\sim(-2\ ;\ 2)$;

7) $X_7\sim\left(-\infty\ ;\ -\frac{1}{2}\right)\cup\left(\frac{1}{2}\ ;\ +\infty\right)$; 8) $X_8\sim(-\infty\ ;\ -1]\cup[1\ ;\ +\infty)$;

9) $X_9\sim(-\infty\ ;\ 0)\cup(0\ ;\ +\infty)$; 10) $X_{10}\sim\bigcup\limits_{k\in Z}\big(k\pi\ ;\ (k+1)\pi\big)$.

✍**8. [12, с. 166]** *Переконатись, що континуальними є множини:*

8.1. $X_1 = \left\{\ (x,y)\mid x,y\in\mathbb{R}\ \wedge\ |x|+|y|=1\ \right\}$.

8.2. $X_2 = \left\{\ (x,y)\mid x,y\in\mathbb{R}\ \wedge\ |x-1|+|y+1|=1\ \right\}$.

8.3. $X_3 = \{\ (x,y) \mid x,y \in \mathbb{R}\ \wedge\ \max(|x|,\ |y|) = 1\ \}$.

8.4. $X_4 = \{\ (x,y) \mid x,y \in \mathbb{R}\ \wedge\ \max(|x|,\ 2|y|) = 1\ \}$.

8.5. $X_5 = \{\ (x,y) \mid x,y \in \mathbb{R}\ \wedge\ x^2 + y^2 - 2x + 2y - 2 = 0\ \}$.

8.6. $X_6 = \left\{\ (x,y) \mid x,y \in \mathbb{R}\ \wedge\ \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} = 1\ \right\}$.

8.7. $X_7 = \left\{\ (x,y) \mid x,y \in \mathbb{R}\ \wedge\ \dfrac{x^2}{4} - \dfrac{y^2}{9} = 1\ \right\}$.

8.8. $X_8 = \{\ (x,y) \mid x,y \in \mathbb{R}\ \wedge\ x^2 = y^2 + x^4\ \}$.

8.9. $X_9 = \{\ (x,y) \mid x,y \in \mathbb{R}\ \wedge\ x^6 - x^4 + y^2 = 0\ \}$.

8.10. $X_{10} = \{\ (x,y) \mid x,y \in \mathbb{R}\ \wedge\ x^4 - y^4 + x^2 + 2y^2 = 0\ \}$.

Вказівка. Показати, що: 1) $X_1 = \{(x,y) \mid 0 \le x < 1\ \wedge x + y = 1\} \cup$ $\cup \{(x,y) \mid 0 \le x < 1\ \wedge x - y = 1\} \cup \{(x,y) \mid -1 \le x < 0\ \wedge\ -x + y = 1\ \} \cup$ $\cup \{(x,y) \mid -1 \le x < 0\ \wedge\ -x - y + 1 = 0\}$; 3) $X_3 = \{(x,-1) \mid -1 \le x \le 1\ \} \cup$ $\cup \{(x,1) \mid -1 \le x \le 1\ \} \cup \{(-1;y) \mid -1 \le y \le 1\ \} \cup \{(1;y) \mid -1 \le y \le 1\ \}$;

$$7)\ X_7 = \left\{(x,y) \mid x \le -1\ \wedge\ y\ =\ \frac{3}{2}\sqrt{x^2 - 4}\ \right\} \cup$$

$$\cup \left\{(x,y)\ \mid x \le -2\ \wedge\ y\ =\ -\frac{3}{2}\sqrt{x^2 - 4}\ \right\} \cup$$

$$\cup \left\{(x,y)\ \mid 2 \le x\ \wedge\ y\ =\ \frac{3}{2}\sqrt{x^2 - 4}\ \right\} \cup$$

$$\cup \left\{(x,y) \mid 2 \le x\ \wedge\ y\ =\ -\frac{3}{2}\sqrt{x^2 - 4}\ \right\};$$

$$8)\ X_8 = \left\{\ (x,y)\ \mid -1 \le x \le 1\ \wedge\ y = \sqrt{x^2 - x^4}\ \right\} \cup$$

$$\cup \left\{\ (x,y)\ \mid -1 \le x \le 1\ \wedge\ y = -\sqrt{x^2 - x^4}\ \right\};$$

$$10)\ X_{10} = \left\{(x,y)\ \mid x \in \mathbb{R}\ \wedge\ y = -\sqrt{1 + \sqrt{1 + x^2 + x^4}}\ \right\} \cup$$

$$\cup \left\{(x,y)\ \mid x \in \mathbb{R}\ \wedge\ y = \sqrt{1 + \sqrt{1 + x^2 + x^4}}\ \right\} \cup \{(0,0)\}.$$

✍**9. [12, с. 166]** *Довести, що континуальними є множини:*

9.1. $X_1 = \{ (x,y) \mid x,y \in \mathbb{R} \wedge 0 \le x \le 1 \wedge 0 \le y \le 1 \}$.

9.2. $X_2 = \{ (x,y) \mid x,y \in \mathbb{R} \wedge x^2 + y^2 \le 1 \}$.

9.3. $X_3 = \{ (x,y) \mid x,y \in \mathbb{R} \wedge |x+y| \le |x| - y \}$.

9.4. $X_4 = \{ (x,y) \mid x,y \in \mathbb{R} \wedge \big||x| - x\big| \ge \big|y + |y|\big| \}$.

9.5. $X_5 = \{ (x,y) \mid x,y \in \mathbb{R} \wedge |x+y| + |x-y| \le 4 \}$.

9.6. $X_6 = \left\{ (x,y) \mid x,y \in \mathbb{R} \wedge \sin\left(\pi\sqrt{x^2+y^2}\right) \ge 0 \right\}$.

9.7. $X_7 = \{ (x,y) \mid x,y \in \mathbb{R} \wedge |xy| \le |x| + |y| \}$.

9.8. $X_8 = \{(x,y) \mid x,y \in \mathbb{R} \wedge \{x\} > \{y\}\}$, де $\{x\}$ – дробова частина x.

9.9. $X_9 = \left\{ (x,y) \mid x,y \in \mathbb{R} \wedge \{x\} + \{y\} \le \dfrac{1}{2} \right\}$.

9.10. $X_{10} = \{ (x,y) \mid x,y \in \mathbb{R} \wedge [x] \ge [y] \}$, де $[t]$- ціла частина t.

Вказівка. Показати, що: 1) $[0;1] \subset X_1 \subset \mathbb{R}^2$; 2) $[-1;1] \subset X_2 \subset \mathbb{R}^2$; 3) $\{(x,y) \mid 2 \le x \le 3 \wedge y = -1\} \subset X_3 \subset \mathbb{R}^2$; 4) $[0;\ 1] \subset X_4 \subset \mathbb{R}^2$; 5) $[-2;\ 2] \subset X_5 \subset \mathbb{R}^2$; 6) $[-1\ ;\ 1] \subset X_6 \subset \mathbb{R}^2$; 7) $[0\ ;\ 1] \subset X_7 \subset \mathbb{R}^2$; 8) $[0\ ;\ 1] \subset X_8 \subset \mathbb{R}^2$; 9) $\left[0\ ; \dfrac{1}{2}\right] \subset X_9 \subset \mathbb{R}^2$; 10) $[0;1] \subset X_{10} \subset \mathbb{R}^2$.

✍**10. [12, с. 167]** *Довести, що континуальними є множини:*

10.1. Всіх квадратних тричленів з дійсними коефіцієнтами.

10.2. Всіх кіл на площині.

10.3. Всіх кіл на площині, координати центрів яких є раціональними.

10.4. Всіх кіл на площині з ірраціональним радіусом.

10.5. Всіх кіл на площині з раціональним радіусом.

10.6. Всіх еліпсів на площині, осі яких паралельні осям координат.

10.7. Всіх парабол на площині, осі яких паралельні осі ординат.

10.8. Всіх гіпербол на площині, осі яких паралельні осям координат.

10.9. Всіх трикутників на площині.

10.10. Всіх многокутників на площині.

🕮 Практичне заняття №16
Тема: Міра множини на прямій

Запитання для самопідготовки:

1. Означення міри відкритої обмеженої множини на числовій прямій, властивості міри відкритої множини.
2. Означення міри замкнутої обмеженої множини на числовій прямій, властивості міри замкнутої множини.
3. Означення зовнішньої і внутрішньої міри Лебега.
4. Означення вимірної множини за Лебегом.

✍**1.** *Нехай E – обмежена множина. Якщо Δ – інтервал, що містить цю множину $(\Delta \supset E)$, то $m^*E + m_*C_\Delta E = m\Delta$. Довести.*

✍**2.** *Довести, що скінченна множина точок вимірна за Лебегом і її міра дорівнює нулю.*

✍**3.** *Довести, що міра множини всіх раціональних чисел з відрізка $[a; b]$ дорівнює нулю.*

✍**4.** *Відрізок $[0; 1]$ поділимо на 4 рівні частини і вилучимо з нього другий інтервал. Кожен з 3-х відрізків, що залишилися, поділимо знову на 4 рівні частини і вилучимо з кожного другий інтервал і т.д. Одержимо множину E. Знайти міру множини E.*

✍**5.** *Побудувати замкнену множину міри $0,5$, яку отримують з відрізка $[0; 1]$ вилученням п'яти інтервалів.*

✍**6.** *Довести, що множина $E = [0; 1] \cup \{2; 3; 4\}$ вимірна і знайти її міру Лебега.*

✍**7. [11, с.47]** *Побудувати на відрізку $[0; 1]$ ніде не щільну досконалу множину, лінійна міра якої дорівнює $0,9$.*

✍**8. [11, с.47]** *Побудувати на відрізку $[0; 1]$ ніде не щільну досконалу множину, лінійна міра якої $a < 1$.*

✍**9. [11, с.47]** *Чи можна побудувати на відрізку $[0; 1]$ ніде не щільну досконалу множину, лінійна міра якої дорівнює 1?*

✍**10. [11, с.47]** *Довести, що будь-яка вимірна множина E на прямій (не обов'язково обмежена) така, що $0 < mE = p \le +\infty$, містить обмежену вимірну підмножину міри q, де q – довільне задане додатне число, менше, ніж p.*

✍**11. [11, с.47]** *Нехай* E *– вимірна множина на прямій така, що* $0 < mE = p \le +\infty$, *а* q *– довільне задане додатне число, менше, ніж* p. *Довести, що існує обмежена досконала множина* $M \subset E$ *така, що* $mM = q$.

✍**12. [11, с.47]** *Довести, що будь-яка вимірна множина* E *додатної міри має потужність континууму.*

✍**13. [11, с.47]** *Чи може дорівнювати нулю міра множини, яка містить хоча б одну внутрішню точку?*

✍**14. [11, с.47]** *Чи можна побудувати на відрізку* $[a; b]$ *замкнену множину лінійної міри* $b-a$, *відмінну від усього відрізка?*

✍**15. [11, с.48]** *Нехай* E *– множина всіх тих точок відрізка* $[0; 1]$, *у двійковому розкладі яких на всіх парних місцях стоять нулі. Довести, що* E *ніде не щільна і її міра дорівнює нулю.*

✍**16. [11, с.48]** *Нехай множина* E *на відрізку* $[0; 1]$ *має міру нуль. Чи повинно її замикання* $\overline{E}$ *бути множиною міри нуль?*

✍**17. [11, с.48]** *Яка будова і яка міра множини тих точок відрізка* $[0; 1]$, *які допускають розклад в десятковий дріб без використання цифри 7?*

✍**18. [11, с.48]** *Яка будова і яка міра множини тих точок відрізка* $[0; 1]$, *десятковий розклад яких неможливий без цифри 7?*

✍**19. [11, с.48]** *Яка будова і яка міра множини тих точок прямої, які допускають розклад в десятковий дріб без використання цифри 7 після коми?*

✍**20. [11, с.48]** *Яка будова і яка міра множини тих точок відрізка* $[0; 1]$, *в розкладі яких в нескінченний десятковий дріб містяться всі цифри від 1 до 9?*

✍**21. [11, с.48]** *Яка будова і яка міра множини тих точок відрізка* $[0; 1]$, *які допускають десятковий розклад без комбінації цифр 2,2,2, які стоять поряд?*

🕮 Практичне заняття №17

Тема: Міра множини в просторі $\mathbb{R}^n$

Запитання для самопідготовки:

1. Повторити питання з попереднього заняття.
2. Властивості міри Лебега (порівняти з властивостями міри Жордана, записати у вигляді порівняльної таблиці).

✍**1. [11, с.49]** *Довести, що якщо* E_1 *і* E_2 *– вимірні множини в евклідовому просторі, то* $mE_1 + mE_2 = m\left(E_1 \cup E_2\right) + m\left(E_1 \cap E_2\right)$.

✍**2. [11, с.49]** *Довести, що довільної скінченої або зчисленної сукупності* $\left\{E_i\right\}$ *– вимірних множин в евклідовому просторі має місце нерівність* $\sum_i mE_1 \le m\left(\bigcup_i E_i\right) + \sum_{i<j} m\left(E_i \cap E_j\right)$.

✍**3. [11, с.49]** *Побудуємо на площині множину* A *наступним чином: розділимо квадрат* $[0;1]\times[0;1]$ *прямими* $x=\frac{1}{3}$, $x=\frac{2}{3}$, $y=\frac{1}{3}$, $y=\frac{2}{3}$ *на дев'ять однакових квадратів і викинемо центральний відкритий квадрат (тобто квадрат* $\left(\frac{1}{3};\frac{2}{3}\right)\times\left(\frac{1}{3};\frac{2}{3}\right)$*). Потім кожний із восьми квадратів, які залишилися, ділимо на дев'ять однакових квадратів і викидаємо всі центральні відкриті квадратики. Далі продовжуємо цей процес необмежено. Множину, яка залишиться після зчисленного числа кроків, позначимо через* A *(вона називається „килимом Серпінського"). Яка плоска міра множини* A*?*

✍**4. [11, с.47]** *Побудуємо на площині множину* B *наступним чином: розділимо замкнений квадрат* $[0;1]\times[0;1]$ *прямими* $x=\frac{1}{3}$, $x=\frac{2}{3}$, $y=\frac{1}{3}$, $y=\frac{2}{3}$ *на дев'ять однакових квадратів. Чотири замкнених квадрати, які знаходяться при вершинах основного квадрата, назвемо квадратами першого рангу, а їх об'єднання позначимо через* B_1*. Потім кожний із квадратів першого рангу розділимо на дев'ять однакових квадратиків, і ті з них, які знаходяться при вершинах квадратів першого рангу, назвемо квадратами другого рангу, а їх об'єднання позначимо через* B_2*. Далі продовжуємо цей процес необмежено. Очевидно, що* $B_1 \supset B_2 \supset B_3 \supset \ldots$ *Спільну частину всіх* B_k *назвемо „кладовищем Серпінського" і позначимо через* $B=\bigcap_k B_k$*. Яка плоска міра множини* B*?*

✍**5. [11, с.47]** *„Канторовим гребінцем" називається множина* E *на площині* Oxy*, яка складається з усіх точок* $M\left(x;y\right)$*, координати* *яких задовольняють наступні умови:* $x \in [0;1]$, $y \in P_0$, *де* P_0 – *множина Кантора на осі* Oy. *Яка плоска міра множини* E?

✍**6. [11, с.47]** *Довести, що будь-яка обмежена вимірна множина* E *на прямій, яка має додатну лінійну міру* p, *містить вимірну підмножину міри* q, *де* q – *довільне задане додатне число, менше, ніж* p.

✍**7. [11, с.47]** *Довести, що будь-яка обмежена вимірна множина* E *на площині, яка має додатну плоску міру* p, *містить вимірну підмножину* M *плоскої міри* q, *де* q – *довільне задане додатне число, менше, ніж* p.

✍**8. [11, с.47]** *Довести, що плоску множину* $M \subset E$ *(див. попередню задачу) можна вибрати досконалою.*

✍**9. [11, с.47]** *Побудувати на квадраті* $[0;1]\times[0;1]$ *ніде не щільну досконалу множину, плоска міра якої дорівнює заданому невід'ємному числу* $a<1$.

✍**10. [11, с.49]** *В замкненому паралелепіпеді* I *з ребрами одиничної довжини задані* n *вимірних множин* $A_1, A_2, ..., A_n$, *сума мір яких більша, ніж* $n-1$: $mA_1 + mA_2 + ... + mA_n > n-1$. *Довести, що* $\bigcap\limits_{1\le i\le n} A_i$ *має додатну міру.*

✍**11. [11, с.49]** *Нехай* $\{E_n\}$ – *послідовність вимірних множин на відрізку* $[0;1]$, *яка має ту властивість, що для будь-якого* $\varepsilon > 0$ *знайдеться таке* k, *що* $mE_k > 1-\varepsilon$. *Довести, що міра об'єднання* E *цих множин дорівнює* 1.

✍**12. [11, с.49]** *Нехай* $\{E_n\}$ – *спадна послідовність вимірних множин в евклідовому просторі і* ε – *задане додатне число. Довести, що існує спадна послідовність замкнених множин* $\{F_n\}$ *така, що для кожного* n *має місце:* $F_n \subset E_n$, $mF_n > mE_n - \varepsilon$.

⌛ Самостійна робота (зразок)

1. *Знайти множини* $A\cup B$, $A\cap B$, $A\setminus B$, $B\setminus A$, *якщо*

$$A=\left\{x \mid 2^{-x^2} > 2^{-|x|}\right\},\ B=\left\{x \mid 2^{2x+1} - 21\left(\frac{1}{2}\right)^{2x+3} + 2 \ge 0\right\}.$$

2. *Довести, що коли* $A \sim B, C \sim D$, *причому* $A \cap C = \varnothing, B \cap D = \varnothing$, *то* $A \cup C \sim B \cup D$..

3. *Встановити взаємно однозначне відображення інтервалу* $(2;3)$ *на всю числову пряму.*

4. *Знайти потужність множини:* $X = \bigcap_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{n};1\right)\Delta\bigcap_{n=1}^{\infty}\left(0;\frac{n+1}{n}\right)$..

5. *Побудувати на відрізку* $[0;1]$ *ніде не щільну досконалу множину, лінійна міра якої дорівнює* $0{,}9$..

6. *Яка будова і яка міра множини тих точок відрізка* $[0;1]$, *які допускають розклад в десятковий дріб без використання цифри 7?*

7. *Побудуємо на площині множину* A *наступним чином: розділимо квадрат* $[0;1]\times[0;1]$ *прямими* $x=\frac{1}{3}$, $x=\frac{2}{3}$, $y=\frac{1}{3}$, $y=\frac{2}{3}$ *на дев'ять однакових квадратів і викинемо центральний відкритий квадрат (тобто квадрат* $\left(\frac{1}{3};\frac{2}{3}\right)\times\left(\frac{1}{3};\frac{2}{3}\right)$*). Потім кожний із восьми квадратів, які залишилися, ділимо на дев'ять однакових квадратів і викидаємо всі центральні відкриті квадратики. Далі продовжуємо цей процес необмежено. Множину, яка залишиться після зчисленного числа кроків, позначимо через* A *(вона називається „килимом Серпінського”). Яка плоска міра множини* A?

🕮 Практичне заняття №18

Тема: Вимірні функції

Запитання для самопідготовки:

1. Означення вимірної функції.
2. Найпростіші властивості вимірних функцій.

✍**1.** *Довести за означенням, що функція* $y=f(x)$ *вимірна на проміжку* $(a;b)$:

1.1. $y=2^{x^2-x}$, $(0;3)$.

1.2. $y=\sin x,\ \left(0;\ \frac{3\pi}{2}\right).$

1.3. $y=x^2-3x,\ (-1;\ 4).$

1.4. $y=x^3,\ (0;\ 3).$

1.5. $y=\cos 2x,\ (0;\ \pi).$

1.6. $y=\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2-3x},\ (0;\ 4).$

✍**2. [15, с.162]** *Показати, що якщо* $f(x)$ *вимірна, то множина* $\{x \mid f(x)=a\}$ *вимірна при будь-якому* a.

✍**3. [15, с.162]** *Показати, що функція* $f(x)=const$ *вимірна на будь-якій вимірній множині* E.

✍**4. [15, с.162]** *Показати, що функція, монотонна на вимірній множині* E, *вимірна.*

✍**5. [15, с.162]** *Показати, що функція, неперервна на відрізку* $[a;\ b]$, *є вимірною.*

✍**6. [15, с.162]** *Якщо* $f(x)$ *вимірна, то при будь-якому* k *вимірна і функція* $kf(x)$. *Довести.*

✍**7. [15, с.162]** *Якщо* $f(x)$ *вимірна, то вимірна і функція* $|f(x)|$. *Довести.*

✍**8. [15, с.162]** *Якщо* $|f(x)|$ *вимірна функція, то* $f(x)$ *не обов'язково вимірна. Навести приклад.*

✍**9. [15, с.162]** *Відомо, що якщо* $f(x)$ *і* $g(x)$ *вимірні, то* $f(x)\pm g(x)$, $f(x)\cdot g(x)$ *і* $\frac{f(x)}{g(x)}$ *(якщо* $g(x)\neq 0$*) вимірні. Чи справедливі обернені твердження? Навести приклади.*

✍**10. [15, с.163]** *Відомо, що якщо на множині* E *послідовність* $\{f_n(x)\}$ *вимірних функцій в кожній точці збігається до функції* $f(x)$, *то* $f(x)$ *вимірна на* E. *Використовуючи цей результат, довести, що якщо в усіх точках відрізка* $[a;\ b]$ *існує похідна* $f'(x)$ *функції* $f(x)$, *то* $f'(x)$ *вимірна.*

✍**11. [11, с.85]** *Довести, що функція* $(f(x))^3$ *вимірна на* E, *то і* $f(x)$ *вимірна на* E.

✍**12. [11, с.85]** *Показати, що з того, що* $(f(x))^2$ *вимірна на* E, *ще не слідує, що* $f(x)$ *вимірна на* E.

✍**13. [11, с.85]** *Довести, що якщо* $f(x)$ *вимірна на* E, *то і* $|f(x)|$ *вимірна на* E. *Показати на прикладі, що обернене твердження неправильне.*
✍**14. [11, с.85]** *Довести, що якщо функції* $f(x)$ *і* $g(x)$ *вимірні на* E, *то функції*

$$m(x)=\min\{f(x), g(x)\},\ M(x)=\{f(x), g(x)\}$$

також вимірні на E.
✍**15. [11, с.85]** *Довести, що якщо функція* $f(x)$ *вимірна на всякому відрізку* $[\alpha;\beta]$, *де* $a<\alpha<\beta<b$, *то вона вимірна і на всьому відрізку* $[a;b]$.

✍**16. [11, с.86]** *Чи вимірна функція* $f(x)=\begin{cases} x^2, x\in P_0\bigcap E, \\ x^3, x\in[0;1]\setminus P_0\bigcap E \end{cases}$, *де* E *– невимірна множина,* P_0 *– множина Кантора?*
✍**17. [11, с.86]** *Довести, що якщо* $f(x)$ *має похідну в усіх точках відрізка* $[a;b]$, *то ця похідна* $f'(x)$ *є вимірною функцією на* $[a;b]$.
✍**18. [11, с.86]** *Довести, що якщо* E *– вимірна множина, то характеристична функція* $\chi_E(x)$ *вимірна. Якщо ж* E *– невимірна множина, то* $\chi_E(x)$ *– невимірна функція.*

🕮 Практичне заняття №19
Тема: Збіжність майже скрізь. Збіжність за мірою

Запитання для самопідготовки:
1. Означення еквівалентних функцій. Властивості.
2. Означення збіжності майже скрізь. Властивості.
3. Теорема Лебега. Означення збіжності за мірою.
4. Зв’язок між збіжністю майже скрізь і збіжністю за мірою.

✍**1. [15, с. 163]** *Довести, що сума збіжного на* $[a;b]$ *ряду вимірних функцій є вимірною функцією.*
✍**2. [15, с. 163]** *Показати, що послідовність* $\{x^n\}$ *збігається на* $[0;1]$ *майже скрізь до функції* $f(x)=0$. *Перевірити, що* $\{x^n\}$ *збігається до* $f(x)$ *і за мірою.*

✍**3. [11, с. 86]** *Нехай* E *– вимірна множина додатної міри,* $\{f_n\}$ *і* $\{g_n\}$ *– дві послідовності вимірних функцій, збіжні за мірою на множині* E *відповідно до функцій* $f(x)$ *і* $g(x)$. *Довести, що послідовності* $\{f_n+g_n\}, \{f_n\cdot g_n\}, \left\{\frac{f_n}{g_n}\right\}$ *збігаються за мірою відповідно до функцій* $f+g,\ f\cdot g,\ \frac{f}{g}$ *(остання – у випадку, коли* $g(x)\neq 0$ *майже скрізь на* E*).*

✍**4. [11, с. 87]** *Нехай* $\{f_n(x)\}$ *збігається за мірою на* E *до функції* $f(x)$. *Довести, що якщо для всіх* $x\in E$ *і всіх* n *має місце нерівність* $f_n(x)\le a$, *то* $f(x)\le a$ *майже скрізь на* E.

✍**5. [11, с. 87]** *Поняття збіжності послідовності* $\{f_n(x)\}$ *за мірою до* $f(x)$ *на множині* E *можна узагальнити (не міняючи означення) на той випадок, коли* E *вимірна, але має нескінченну міру.*

✍**6. [11, с. 87]** *Навести приклад послідовності вимірних функцій, збіжної за мірою на відрізку* $[0;1]$, *але не збіжної в звичайному смислі в жодній точці цього відрізка.*

✍**7. [11, с. 87]** *Виділити із послідовності, побудованої у попередній задачі, послідовність, збіжну майже скрізь на* $[0;1]$.

✍**8. [15, с. 163]** *Нехай* $f_i^k(x)=\begin{cases}1, & x\in\left[\frac{i-1}{k};\frac{i}{k}\right),\\ 0, & x\in[0;1]\setminus\left[\frac{i-1}{k};\frac{i}{k}\right),\end{cases}$ *де* $i=\overline{1,k}$.

Покладемо
$g_1(x)=f_1^1(x),\ g_2(x)=f_1^2(x),\ g_3(x)=f_2^2(x),\ g_4(x)=f_1^3(x),\ldots$

Показати, що $\{g_n(x)\}$ *збігається за мірою до нуля на* $[0;1)$ *і, однак, в жодній точці цього проміжку* $g_n(x)\not\to 0,\ n\to\infty$.

✍**9. [15, с. 163]** *Якщо* $f(x)=0$ *майже скрізь, то* $\{f_n^2\}$ *збігається за мірою до нуля.*

✍**10.** *Дано дві послідовності вимірних функцій* $\{f_n(x)\}$ *і* $\{g_n(x)\}$ *на множині* E. *Причому* $f_n(x)\Rightarrow f(x)$ *і* $g_n(x)\Rightarrow g(x)$, *де* $f(x)$ *і* $g(x)$ *– вимірні функції. Довести, що*

10.1. $\alpha f_n(x)\Rightarrow\alpha f(x),\ \alpha\in\mathbb{R}$.

10.2. $f_n(x)\cdot g_n(x)\Rightarrow f(x)\cdot g(x)$.

10.3. $f_n^2(x)\Rightarrow f^2(x)$.

10.4. $f_n^2(x)\Rightarrow 0$, якщо $f(x)=0$ майже скрізь на множині E.

✍**11.** *Нехай* $f_n:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, n\geq 1$. *Знайти таку функцію* $g\in C(\mathbb{R})$, *щоб* $f_n(x)\xrightarrow{м.с.} g(x),\ n\to\infty$:

11.1. $f_n(x)=\cos^n x,\ \ x\in\mathbb{R}.$

11.2. $f_n(x)=x^2\sin^n x^2,\ \ x\in\mathbb{R}.$

11.3. $f_n(x)=\cos^n x+\sin^n x,\ \ x\in\mathbb{R}.$

11.4. $f_n(x)=\left(\dfrac{2}{\pi}\operatorname{arctg}x\right)^n+\sin^n 2x,\ \ x\in\mathbb{R}.$

11.5. $f_n(x)=\dfrac{n^2\sin^2 x}{1+n^2\sin^2 x},\ \ x\in\mathbb{R}.$

11.6. $f_n(x)=\dfrac{\sin^n x}{2+\sin^n x},\ \ x\in\mathbb{R}.$

11.7. $f_n(x)=\sin^n\dfrac{1}{x},\ \ x\in\mathbb{R}\setminus\{0\},\ f_n(0)=0.$

11.8. $f_n(x)=\sin^n 3x,\ \ x\in\mathbb{R}.$

11.9. $f_n(x)=e^{-n\left|x^2-1\right|},\ \ x\in\mathbb{R}.$

11.10. $f_n(x)=e^{-n\sin^{2n}\frac{1}{x}},\ \ x\in\mathbb{R}\setminus\{0\},\ f_n(0)=0.$

🕮 Практичне заняття №20

Запитання для самопідготовки:
1. Означення інтеграла Лебега.
2. Умови існування інтеграла Лебега.

✍**1. [15, с. 164]** *Обчислити інтеграл Лебега за означенням:* $(L)\int\limits_a^b Cdx,\ C = const.$

✍**2.** *Обчислити інтеграл Лебега за означенням:* $(L)\int\limits_0^1 xdx.$

✍**3. [15, с. 164]** *Обчислити інтеграл Лебега за означенням:* $(L)\int\limits_a^b D(x)dx,$ *де* $D(x)$ *– функція Діріхле.*

✍**4. [15, с. 164]** *Обчислити інтеграл Лебега за означенням:* $(L)\int\limits_E dx,$ *де* E *– вимірна множина.*

✍**5. [15, с. 164]** *Показати, що якщо* $mE = 0,$ *то* $(L)\int\limits_E f(x)dx = 0$ *для будь-якої обмеженої вимірної функції* $f(x).$

✍**6. [15, с. 164]** *Показати, що якщо* $f(x) = 0$ *майже скрізь, то* $(L)\int\limits_E f(x)dx = 0.$

✍**7. [15, с. 164]** *Показати, що якщо* $(L)\int\limits_E f^2(x)dx = 0,$ *то* $f(x)$ *дорівнює нулю майже скрізь на* E.

✍**8.** *Обчислити інтеграл Лебега за означенням:*

8.1. $(L)\int\limits_{(2;\,3)} (5 - x)dx.$

8.2. $(L)\int\limits_{(1;\,4)} (1 + 2x)dx.$

8.3. $(L)\int\limits_{(-1;\,2)} (3x - 2)dx.$

8.4. $(L)\int\limits_{[0;\,1]} (x + 2)dx.$

✍**9.** *Нехай* $p(x)=\begin{cases}\operatorname{sgn}\sin\dfrac{\pi}{x}, & x\in(0;1],\\ 0, & x\in\mathbb{R}\setminus(0;1].\end{cases}$ *Обчислити інтеграли:*

9.1. $(L)\int\limits_{\mathbb{R}} p(x)dx.$ 9.2. $(L)\int\limits_{\mathbb{R}} |p(x)|dx.$

9.3. $(L)\int\limits_{\mathbb{R}} p_+(x)dx,\ \ p_+(x)=\begin{cases}p(x), & p(x)\geq 0,\\ 0, & p(x)<0.\end{cases}$

9.4. $(L)\int\limits_{\mathbb{R}} p_-(x)dx,\ \ p_+(x)=\begin{cases}0, & p(x)\geq 0,\\ -p(x), & p(x)<0.\end{cases}$

✍**10.** *Обчислити* $(L)\int\limits_A f(x)dx,\ \ (L)\int\limits_A |f(x)|dx$*, якщо:*

10.1. $f(x)=(-1)^{[x]},\ \ A=[-3;5].$

10.2. $f(x)=(-1)^{[x]}[x],\ \ A=[-4;4).$

10.3. $f(x)=[x],\ \ A=[-4;4].$

10.4. $f(x)=(-1)^{[x^2]},\ \ A=\left[0;\sqrt{6}\right].$

10.5. $f(x)=[x]\operatorname{sgn}\cos\pi x,\ \ A=[0;6].$

10.6. $f(x)=\left[x|x|\right],\ \ A=[-2;2].$

10.7. $f(x)=\operatorname{sgn}\cos\pi x,\ \ A=[-3;3].$

10.8. $f(x)=|\operatorname{arctg} x|,\ \ A=[-9;9].$

10.9. $f(x)=[x][2\sin x],\ \ A=[0;\pi].$

10.10. $f(x)=[\arcsin x],\ \ A=[-1;1].$

🕮 Практичне заняття №21

Тема: Властивості інтеграла Лебега

Запитання для самопідготовки:

1. Найпростіші властивості інтеграла Лебега.
2. Обчислення інтеграла Лебега.

✍**1. [15, с. 165]** *Показати, що якщо для будь-якого* $c\in(a;b)$, $(L)\int\limits_a^c f(x)dx=0$*, то* $f(x)=0$ *майже скрізь.*

✍**2. [15, с. 165]** *Показати, що якщо* $\int\limits_0^1 f(x)dx = 1,\ \ f(x) \geq 0$ *на* $[0;1]$, *то* $f(x) = 1$ *майже скрізь.*

✍**3. [15, с. 165]** *Показати, що якщо* $f(x) \leq g(x)$ *майже скрізь на вимірній множині* E, *то* $(L)\int\limits_E f(x)dx \leq (L)\int\limits_E g(x)dx.$

✍**4. [15, с. 165]** *Показати, що якщо* $f(x) \leq g(x)$ *на вимірній множині* E, *причому* $f(x) < g(x)$ *для* $x \in E_1 \subset E$ *і* $mE_1 > 0$, *то* $(L)\int\limits_E f(x)dx < (L)\int\limits_E g(x)dx.$

✍**5. [15, с. 166]** *Обчислити* $(L)\int\limits_a^b f(x)dx$, *якщо* $f(x) = \alpha$ *на вимірній множині* $E \subset [a;b]$ *і дорівнює* β *на* $C_{[a;\,b]}E = [a;b] \setminus E$.

✍**6. [15, с. 166]** *Нехай* $(L)\int\limits_E f(x)dx = 0,\ \ |f(x)| = 1$ *на* E. *Показати, що* $m\{x \in E \mid f(x) > 0\} = m\{x \in E \mid f(x) < 0\}$.

✍**7. [15, с. 166]** *Показати, що якщо* $f(x)$ – *обмежена вимірна непарна функція, то* $(L)\int\limits_{-a}^{a} f(x)dx = 0.$

✍**8. [15, с. 166]** *Нехай* E – *канторова множина додатної міри на відрізку* $[a;b]$. *Чому дорівнює* $\int\limits_a^b f(x)dx$, *якщо* $f(x) = 0$ *на* E *і* $f(x) = \dfrac{x-\alpha}{\beta-\alpha}$ *на кожному суміжному інтервалі?*

✍**9. [15, с. 166]** *Чому не може існувати вимірної на* $[0;1]$ *і обмеженої функції, яка задовольняє умову:*

$$\int\limits_{\frac{1}{2^{n+1}}}^{\frac{1}{2^n}} f(x)dx = \frac{1}{n}.$$

✍**10. [15, с. 165]** *Показати, що будь-яка функція з обмеженою варіацією інтегровна за Лебегом.*

🕮 Практичне заняття №22
Тема: Граничний перехід під знаком інтеграла. Сумовні функції

Запитання для самопідготовки:

1. Граничний перехід під знаком інтеграла Лебега. Теорема Лебега.
2. Сумовні функції.

✍**1. [15, с. 167]** *Нехай* $f_n(x)=\begin{cases} n, & x\in\left(0;\,\dfrac{1}{n}\right), \\ 0, & x\in[0;1]\setminus\left(0;\,\dfrac{1}{n}\right). \end{cases}$ *Показати, що для будь-якого* $x\in[0;1]$ *буде правильна рівність* $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)=0$, *але* $(L)\int\limits_0^1 f_n(x)dx=1$. *Яка умова теореми Лебега не виконується?*

✍**2. [15, с. 167]** *Показати, що із збіжності* $\{f_n(x)\}$ *в середньому випливає збіжність за мірою.*

✍**3. [15, с. 167]** *Показати, що із збіжності в середньому не випливає збіжність майже скрізь.*

✍**4. [15, с. 167]** *Чи випливає із збіжності майже скрізь збіжність в середньому?*

✍**5. [15, с. 167]** *Показати, що послідовність* $f_n(x)=ne^{-nx^2}$ *збігається всюди на* $[0;1]$, *але не збігається до тієї ж границі в середньому. Яка умова теореми Лебега не виконується?*

✍**6. [15, с. 167]** *Чи виконуються умови теореми Лебега для послідовності функцій* $f_n(x)=nx(1-x)^n$ *на* $[0;1]$?

✍**7. [15, с. 168]** *Показати, що* $f(x)$ *сумовна на* E *тоді і тільки тоді, коли* $f_+(x)$ *і* $f_-(x)$ *сумовні на* E.

✍**8. [15, с. 168]** *Показати, що для сумовності функції* $f(x)$ *на* E *необхідна і достатня сумовність* $|f(x)|$ *на* E.

✍**9. [15, с. 168]** *Обчислити інтеграл Лебега від функції* $f(x)=\dfrac{1}{x}$ *на* $(0;1]$.

✍**10. [15, с. 168]** *Обчислити інтеграл Лебега від функції* $f\left(x\right)=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ *на* $\left(0;1\right]$.

✍**11. [15, с. 168]** *Обчислити інтеграл Лебега від функції* $f\left(x\right)=\dfrac{1}{\sqrt[3]{x-2}}$ *на* $\left(2;3\right]$.

✍**12. [15, с. 168]** *Чи буде сумовною функція* $f\left(x\right)=\dfrac{1}{x}$, $f\left(0\right)=0$ *на* $\left[-1;1\right]$?

✍**13. [15, с. 168]** *Чи буде сумовною функція* $f\left(x\right)=\dfrac{1}{\sqrt[3]{x-2}}$, $f\left(2\right)=1$ *на* $\left[1;3\right]$?

✍**14. [15, с. 168]** *Показати, що всяка функція, сумовна з квадратом, сумовна на* $\left[a;b\right]$.

✍**15. [15, с. 168]** *Навести приклад сумовної на* $\left[a;b\right]$ *функції, квадрат якої не сумовний.*

🕮 Практичне заняття №23
Тема: Порівняння інтегралів Лебега і Рімана

Запитання для самопідготовки:

1. Умови інтегровності за Ріманом. Критерій інтегровності за Ріманом.
2. Порівняння інтегралів Рімана і Лебега.

✍**1. [15, с. 164]** *Показати, що якщо* $f\left(x\right)$ *монотонна на відрізку* $\left[a;b\right]$, *то вона інтегровна за Лебегом і* $\left(L\right)\int\limits_a^b f\left(x\right)dx=\left(R\right)\int\limits_a^b f\left(x\right)dx$.

✍**2. [11, с. 88]** *Обчислити інтеграл Лебега:*

2.1. $\left(L\right)\int\limits_1^2 x^3\ln x\,dx.$

2.2. $\left(L\right)\int\limits_0^1 \dfrac{x^5}{x^{12}+1}dx.$

2.3. $\left(L\right)\int\limits_0^1 \dfrac{x^2+3x}{\left(x+1\right)\left(x^2+1\right)}dx.$

2.4. $\left(L\right)\int\limits_0^1 xe^{\sqrt{x}}dx.$

✍**3. [11, с. 88]** *Чи правильне твердження: «Якщо E – множина на* $\left[a;b\right]$, *замикання якої має міру нуль, то* $\chi_E(x)$ *інтегрована за Ріманом на* $\left[a;b\right]$*»?*

✍**4. [11, с. 88]** *Чи інтегровна за Ріманом на відрізку* $\left[0;1\right]$ *функція* $f(x)=\begin{cases}1, & x\in P_0,\\ 2, & x\in G_0.\end{cases}$ *Довести, що ця функція інтегровна за Лебегом.*

✍**5. [11, с. 88]** *Чи інтегровна за Ріманом на відрізку* $\left[0;1\right]$ *функція* $f(x)$, *визначена на відрізку* $\left[0;1\right]$ *умовами:* $f(x)=0$ *в точках множини Кантора,* $f(x)=1$ *в серединах її суміжних інтервалів,* $f(x)$ *лінійна на відрізках* $\left[a_n;\frac{a_n+b_n}{2}\right]$ *і* $\left[\frac{a_n+b_n}{2};b_n\right]$, *де* $\left(a_n;b_n\right)$ – n*-й суміжний інтервал множини Кантора (*$n=1,2,...$*). Довести, що ця функція інтегровна за Лебегом.*

✍**6. [11, с. 88]** *Чи інтегровна за Ріманом на відрізку* $\left[0;1\right]$ *функція* $f(x)$, *визначена на відрізку* $\left[0;1\right]$ *умовами:* $f(x)=0$ *в точках множини Кантора,* $f(x)=c_n$ *в середині* n*-го суміжного інтервалу* $\left(a_n;b_n\right)$, $f(x)$ *лінійна на відрізках* $\left[a_n;\frac{a_n+b_n}{2}\right]$ *і* $\left[\frac{a_n+b_n}{2};b_n\right]$ *(*$n=1,2,...$*). При цьому вважається, що суміжні інтервали множини Катнора перенумеровані в порядку спадання їх довжин:* $\left(a_1;b_1\right)=\left(\frac{1}{3};\frac{2}{3}\right)$, $\left(a_2;b_2\right)=\left(\frac{1}{9};\frac{2}{9}\right)$, $\left(a_3;b_3\right)=\left(\frac{7}{9};\frac{8}{9}\right)$, $\left(a_4;b_4\right)=\left(\frac{1}{27};\frac{2}{27}\right)$, *... Довести, що ця функція інтегровна за Лебегом. Розглянути випадки:*

5.1. $\lim\limits_{n\to\infty}c_n=0.$ 5.2. $\exists\lim\limits_{n\to\infty}c_n\neq 0.$

✍**7. [11, с. 88]** *Чи інтегровна за Ріманом на відрізку* $\left[0;1\right]$ *функція* $f(x)=\begin{cases}x^2, & x\in\mathbb{Q},\\ -x^2, & x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\end{cases}$*? Довести, що ця функція інтегровна за Лебегом.*

✍**8. [11, с. 88]** *Задано функцію* $f(x)=\begin{cases} x^2, & x\in P_0, \\ \dfrac{1}{2^n}, & x\in G_0. \end{cases}$ *Обчислити інтеграл* $(L)\int\limits_0^1 f(x)dx$. *Чи інтегровна ця функція за Ріманом? Якщо так, то обчислити її інтеграл Рімана.*

✍**9. [11, с. 88]** *Чи інтегровна за Ріманом функція* $f(x)=\begin{cases} x^3, & x\in\mathbb{Q}, \\ 1, & x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q} \end{cases}$*? За Лебегом? Чому дорівнює її інтеграл на* $[0;1]$*?*

✍**10. [11, с. 88]** *Довести, що якщо* E *– вимірна множина на* $[a;b]$*, то її характеристична функція* $\chi_E(x)$ *інтегровна за Лебегом на* $[a;b]$*, причому її інтеграл дорівнює мірі множини* E*:* $(L)\int\limits_a^b \chi_E(x)dx=mE$.

✍**11. [11, с. 88]** *На відрізку* $[0;1]$ *побудовано ніде не щільну досконалу множину* E *міри* $\dfrac{1}{2}$*; суміжні інтервали цієї множини перенумеровані в порядку спадання їх довжин* $(\alpha_1;\beta_1),(\alpha_2;\beta_2),\ldots$ *Потім на* $[0;1]$ *задана функція* $f(x)$*, визначена наступним чином:* $f(x)=0$ *на* E*,* $f(x)=1$ *в серединах інтервалів* $(\alpha_n;\beta_n)$*,* $f(x)$ *лінійна на відрізках* $\left[\alpha_n;\dfrac{\alpha_n+\beta_n}{2}\right]$ *і* $\left[\dfrac{\alpha_n+\beta_n}{2};\beta_n\right]$*. Чи інтегровна ця функція за Ріманом? За Лебегом? Чому дорівнює її інтеграл Лебега на відрізку* $[0;1]$*?*

✍**12. [11, с. 88]** *Нехай* $f(x)$ *– невід'ємна обмежена вимірна на* E *функція і міра множини тих точок з* E*, де* $f(x)\ge c$*, дорівнює* a*. Довести, що* $(L)\int\limits_E f(x)dx\ge ac$.

✍**13. [11, с. 88]** *Чому дорівнює інтеграл Лебега на* $[0;1]$ *від функції* $f(x)$*, яка дорівнює* x^2 *в усіх точках перетину множини Кантора і* *деякої (навіть і невимірної) множини* E *і* x^3 *в усіх інших точках відрізка* $[0;1]$.

✍**14. [11, с. 89]** *Обчислити інтеграл Лебега від функції* $f(x)$ *на відрізку* $[0;1]$, *якщо* $f(x)=10$ *в точках множини Кантора, а на суміжних інтервалах графіком функції служать верхні півкола, що спираються на ці інтервали, як на діаметри.*

✍**15. [11, с. 89]** *Обчислити* $(L)\int_0^1 f(x)dx$, *якщо* $f(x)=x^2$ *для ірраціональних* $x>\frac{1}{3}$, $f(x)=x^3$ *для ірраціональних* $x<\frac{1}{3}$, $f(x)=0$ *в раціональних точках.*

✍**16. [11, с. 89]** *Обчислити з точністю до* $0{,}01$ *інтеграл Лебега від функції* $f(x)=3x^2$ *на множині* E, *яка отримується, якщо з відрізка* $[0;1]$ *вилучити інтервали* $\left(\frac{1}{2};1\right),\left(\frac{1}{4};\frac{1}{3}\right);\left(\frac{1}{6};\frac{1}{5}\right),...,\left(\frac{1}{2n};\frac{1}{2n-1}\right),....$

✍**17. [11, с. 89]** *Обчислити* $(L)\int_0^1 f(x)dx$, *якщо*

$$f(x)=\begin{cases}\sin\pi x, & x\in\left[0;\frac{1}{2}\right]\cap G_0,\\ \cos\pi x, & x\in\left[\frac{1}{2};1\right]\cap G_0,\\ x^2, & x\in P_0,\end{cases}$$

де P_0 *– множина Кантора,* $G_0=[0;1]\setminus P_0$.

✍**18. [11, с. 89]** *Позначимо через* $\beta_k(x)$ *функцію, значення якої в кожній точці* $x\in[0;1]$ *дорівнює* k*-му знаку в розкладі числа* x *в нескінченний двійковий дріб. Довести, що*

$$(L)\int_0^1 \beta_i(x)\beta_j(x)dx=\frac{1}{4}\ \textit{при}\ i\neq j,\ (L)\int_0^1(\beta_i(x))^2dx=\frac{1}{2}.$$

✍**19. [11, с. 89]** *Позначимо через* $\varphi_k(x)$ *функцію, визначену на відрізку* $[0;1]$ *наступним чином: якщо на* k*-му місці в двійковому розкладі точки* x *в нескінченний двійковий дріб стоїть* 1, *то*

$\varphi_k(x)=1$, *а якщо на* k*-му місці стоїть* 0, *то* $\varphi_k(x)=-1$. *Довести, що система функцій* $\{\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_k, ...\}$ *ортонормована на відрізку* $[0;1]$, *тобто*

$$(L)\int_0^1 \varphi_i(x)\varphi_j(x)dx=0 \text{ при } i\neq j,\ (L)\int_0^1 (\varphi_i(x))^2 dx=1.$$

✍**20. [11, с. 89]** *Довести, що якщо* $\varphi(x)$ *має похідну майже скрізь на* $[a;b]$ *і* $\varphi'(x)$ *обмежена на* $[a;b]$, *то* $\varphi'(x)$ *інтегровна за Лебегом на* $[a;b]$.

⌛ Контрольна робота (зразок).

✍**1.** *Довести за означенням, що функція* $y=f(x)$ *вимірна на проміжку* $(a;b)$: $y=2^{x^2-x}$, $(0;3)$.

✍**2.** *Нехай* $f_n:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, n\geq 1$. *Знайти таку функцію* $g\in C(\mathbb{R})$, *щоб* $f_n(x)\xrightarrow{м.с.} g(x)$, $n\to\infty$: $f_n(x)=\cos^n x$, $x\in\mathbb{R}$.

✍**3.** *Обчислити інтеграл Лебега за означенням:* $(L)\int\limits_{(2;3)}(5-x)dx$.

✍**4.** *Обчислити* $(L)\int\limits_A f(x)dx$, $(L)\int\limits_A |f(x)|dx$, *якщо*

$$f(x)=(-1)^{[x]},\ A=[-3;5].$$

✍**5.** *Показати, що якщо для будь-якого* $c\in(a;b)$, $(L)\int\limits_a^c f(x)dx=0$, *то* $f(x)=0$ *майже скрізь.*

✍**6.** *Нехай* $f_n(x)=\begin{cases} n, & x\in\left(0;\dfrac{1}{n}\right), \\ 0, & x\in[0;1]\setminus\left(0;\dfrac{1}{n}\right). \end{cases}$ *Показати, що для будь-якого* $x\in[0;1]$ *буде правильна рівність* $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)=0$, *але* $(L)\int\limits_0^1 f_n(x)dx=1$. *Яка умова теореми Лебега не виконується?*

✍**7.** *Обчислити інтеграл Лебега від функції* $f(x)=\dfrac{1}{x}$ *на* $(0;1]$.

✍**8.** *Обчислити інтеграл Лебега:* $(L)\int\limits_1^2 x^3 \ln x\, dx.$

✍**9.** *Чи інтегровна за Ріманом на відрізку* $[0;1]$ *функція* $f(x)=\begin{cases}1, & x\in P_0,\\ 2, & x\in G_0.\end{cases}$ *Довести, що ця функція інтегровна за Лебегом.*

Список використаної і рекомендованої літератури

1. Берман Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа. – М.: Физматгиз, 1958. – 436 с.

2. Вайнберг М.М. Функциональный анализ. Специальный курс для пед. институтов. – М.: Просвещение, 1979. – 128 с.

3. Вулих Б.З. Введение в функциональный анализ. – М.: Наука, 1967. – 416 с.

4. Давидов М.О. Курс математичного аналізу. Ч. 3. Елементи теорії функцій і функціонального аналізу.–К.:Вища школа,1979. – 384 с.

5. Дороговцев А.Я. Математический анализ: Сборник задач. – К.: Вища школа, 1987. – 408 с.

6. Дюженкова Л.І., Колесник Т.В., Ляшенко М.Я., Михалін Г.О., Шкіль М.І. Математичний аналіз у прикладах і задачах. – К.: Вища школа, 2003. – Ч.2. – 470 с.

7. Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа. – М.: Наука, 1968. – 496 с.

8. Кудрявцев Л.Д. Математический анализ. – Т. 2. – М.: Высшая школа, 1970. – 420 с.

9. Люстерник Л.А., Соболев В.И. Элементы функционального анализа. – М.: Наука, 1965. – 520 с.

10. Натансон И.П. Теория функций вещественной переменной. – М.: Наука, 1974. – 480 с.

11. Очан Ю.С. Сборник задач по математическому анализу: Общая теория множеств и функций: Учеб. пособие для студентов физ.-мат. фак. пед. Ин-тов. – М.: Просвещение, 1981. – 271 с.

12. Томусяк А.А., Ковтонюк М.М. Практикум з математичного аналізу (порівняння множин). – Вінниця: ВДПУ, 1998. – 250 с.

13. Треногин В.А. и др. Задачи и упражнения по функциональному анализу. – М.: Наука, 1984. – 256 с.

14. Треногин В.А. Функциональный анализ.–М.: Наука, 1980. –496 с.

15. Давыдов Н.А. и др. Сборник задач по математическому анализу. – М.: Просвещение, 1973. – 256 с.

16. Бак С.М. Елементи теорії функцій і функціонального аналізу. Посібник для студентів математичних спеціальностей педагогічних ВНЗ / С.М.Бак, М.М.Ковтонюк. – Вінниця, 2011. – 400 с.
17. Ковтонюк М.М. Основи функціонального аналізу. Навчальний посібник для студентів фізико-математичних факультетів педагогічних університетів / М.М.Ковтонюк, А.А.Томусяк. – Вінниця: ПП «Едельвейс і К». – 2011. – 574 с.

Навчальне видання

Ковтонюк Мар'яна Михайлівна
Бак Сергій Миколайович

РОБОЧИЙ ЗОШИТ СТУДЕНТА З МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ

V-VI семестри

Метричні простори. Порівняння і вимірювання множин. Інтеграл Лебега.