Вінницький державний педагогічний університет
імені Михайла Коцюбинського
Інститут математики, фізики і технологічної освіти

Кафедра математики

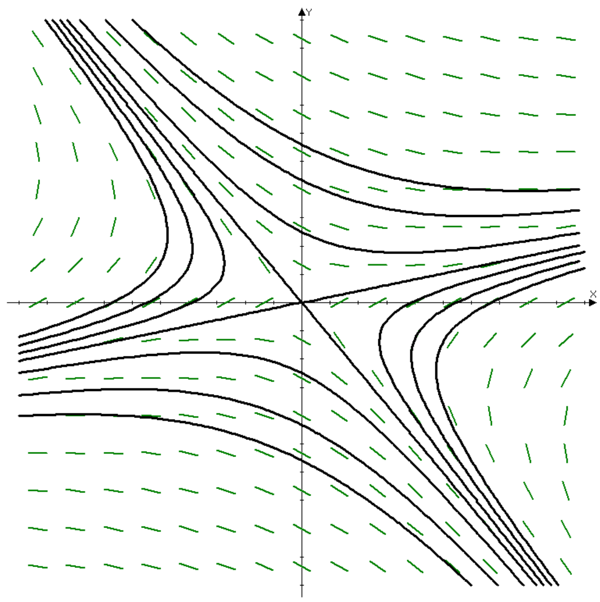
Робочий зошит студента

з прикладами та методичними вказівками

з дисципліни

Диференціальні рівняння

Звичайні диференціальні рівняння першого порядку та математичне моделювання реальних процесів з їх допомогою



Вінниця, 2015

Робочий зошит студента
з прикладами та методичними вказівками

Дисципліна: Диференціальні рівняння
Розділ: Звичайні диференціальні рівняння першого порядку та математичне моделювання реальних процесів з їх допомогою

Укладачі: кандидат фізико-математичних наук,
доцент Ковтонюк М.М.,
асистент Троян Л.Ф.

Рецензент: кандидат фізико-математичних наук,
доцент Тимошенко О.З.

Робочий зошит з прикладами та методичними вказівками для студентів четвертого курсу спеціальності «Математика» містить тематичний план з навчальної дисципліни та розподіл годин й розподіл рейтингових балів згідно кредитно-модульної системи оцінювання, контрольні запитання та завдання для самостійної і аудиторної роботи, розв’язані приклади з детальним поясненням, методичними вказівками, варіанти домашніх контрольних робіт, типові завдання для аудиторних контрольних робіт.

Рекомендовано до друку рішенням кафедри математики ВДПУ імені Михайла Коцюбинського протокол № 1 від 28 серпня 2009 року.

Передмова

При математичному описі різноманітних процесів, явищ і залежностей, що містять елементи «руху», користуються математичними моделями у вигляді рівнянь, до яких, крім незалежних величин і залежних від них шуканих функцій, входять також похідні (диференціали) певного порядку від шуканих функцій. Такі рівняння називаються диференціальними.

Теорія звичайних диференціальних рівнянь має важливе теоретичне та практичне значення. Вона є фундаментом для багатьох інших розділів математики, зокрема для теорії рівнянь математичної фізики, а також базою для глибокого вивчення механіки, фізики та інших природничих наук.

Важливим є те, що на прикладі теорії диференціальних рівнянь можна показати, що математика є могутнім засобом пізнання явищ реального світу. Вивчення процесу чи явища математичними методами починається із складання математичної моделі. Досліджуючи рівняння, яке описує реальний процес, можна всебічно вивчити цей процес і на основі знайдених результатів прогнозувати нові якісні характеристики того чи іншого явища або процесу. Математичні методи розв'язування диференціальних рівнянь залежать лише від типу цього рівняння і зовсім не залежать від конкретної природи явища, якому це рівняння відповідає. Зазначена особливість математичних методів дає змогу застосувати їх під час дослідження різних за своєю природою процесів. Саме тому при вивченні диференціальних рівнянь варто надавати увагу задачам, які приводять до диференціальних рівнянь того чи іншого типу.

Розглядаючи теорію диференціальних рівнянь, необхідно підкреслити, що ми розглядаємо лише окремі типи диференціальних рівнянь першого порядку та вищого порядку, або системи диференціальних рівнянь, для яких є точні методи їх розв'язування. Чим складніше явище, що досліджується, тим складнішим рівнянням або системою рівнянь воно описується. До розв'язання таких рівнянь застосовують наближені методи, зокрема, чисельні методи, які можна реалізуюти на ЕОМ.

Взагалі, коло проблем, які досліджує теорія диференціальних рівнянь, невпинно розширюється. Зараз у ній можна виділити близько двадцяти великих розділів. Згідно з класифікаційною системою провідних реферативних математичних журналів загальне число тематичних напрямів, які безпосередньо стосуються теорії звичайних диференціальних рівнянь, перевищує півтори сотні й продовжує зростати. Зокрема, це питання загальної та якісної теорії диференціальних рівнянь, теорія стійкості, динамічні системи, теорія регулярних та сингулярних збурень, асимптотичних розвинень за незалежною змінною та малим (або великим) параметром, диференціальні рівняння з відхиленням аргументу, стохастичні диференціальні рівняння, проблеми стійкості ДР в банахових просторах, тощо. Можна також налічити кілька десятків напрямків, які відображають зв'язки цієї теорії з іншими математичними дисциплінами.

В VII семестрі вивчається 1-ий змістовний модуль: звичайні диференціальні рівняння першого порядку та математичне моделювання реальних процесів з їх допомогою. Засвоїти даний модуль означає:

– знати означення звичайного ДР, розв'язку (загального і частинного), геометричний зміст ДР і його розв'язку;
– вміти визначити нахил інтегральної кривої рівняння першого порядку в заданій точці за його правою частиною. Знати поле напрямів, яке визначається рівнянням першого порядку в нормальній формі. Знати, що таке ізокліни;
– усвідомлювати основну задачу теорії інтегрування диференціальних рівнянь, а також початкову задачу Коші для ДР першого порядку;
– розуміти сутність теореми існування та єдиності розв'язків задачі Коші для ДР першого порядку;
– володіти методами і принципами інтегрування звичайних ДР першого порядку;
– усвідомлювати, який розв'язок називається особливим, як він може бути зв'язаний з загальним розв'язком. Мати уявлення про обвідну сім'ї кривих, а також про дискримінантну криву;
– мати уявлення про наближені методи розв'язування ДР першого порядку;
– розуміти, в чому полягає математичне моделювання реальних процесів, яка його роль у вивченні процесу, яким вимогам має задовольняти математична модель. Знати приклади використання диференціального рівняння для математичного моделювання реальних процесів [12].

Таблиця 1. Розподіл годин

№	Назви теоретичних блоків	Кіл-ть кредитів	Кількість годин					
			всього	аудиторних	лекційних	практичних	сам. робота
Семестр VII							
Модуль 1							
1	Змістовий модуль 1 *Звичайні диференціальні рівняння першого порядку та математичне моделювання реальних процесів з їх допомогою*	**2**	**72**	**36**	**18**	**18**	**36**
Всього		**2**	**72**	**36**	**18**	**18**	**36**

Таблиця 2. Розподіл рейтингових балів за видами діяльності

№	*Вид діяльності*	*Бали*	*Кількість робіт*	*Сума балів*
1.	Лекційні заняття	0,5	9	4,5
2.	Практичні заняття	0,5	9	4,5
3.	Індивідуальна домашня робота	20	1	20
4.	Самостійна робота	15	1	15
5.	Домашні роботи	1	8	8
6.	Контрольна робота	24	1	24
7.	Колоквіум	24	1	24
Підсумковий рейтинговий бал				100

Таблиця 3. Розподіл рейтингових балів за модулями

№	Назви теоретичних блоків	Кількість балів							
		лекційні заняття	практичні заняття	індивід. дом. робота	домаш. роботи	контр. роботи	сам. робота	колоквіум	всього
Модуль 1		**4,5**	**4,5**	**20**	**8**	**24**	**15**	**24**	**103**
1	Змістовий модуль 1 *Звичайні диференціальні рівняння першого порядку та математичне моделювання реальних процесів з їх допомогою*								
Підсумковий рейтинговий бал		**4,5**	**4,5**	**20**	**8**	**24**	**15**	**24**	**100**
Нормований рейтинговий бал									**100**
Підсумковий контроль-залік									**20**

Студенти, які набрали менше 60 балів складають залік.
Складання модуля 1: 24.12.09-30.12.09

Практичне заняття №1

Тема: ***Елементи загальної теорії звичайних диференціальних рівнянь. Загальний і частинний розв'язок. Диференціальні рівняння сімейства кривих.***

Контрольні запитання

1. *Що називається звичайним диференціальним рівнянням?*
2. *Що називається розв'язком (інтегральною кривою) диференціального рівняння? В чому полягає задача інтегрування диференціального рівняння?*
3. *Які основні форми задання рівняння першого порядка, розв'язаного відносно похідної? В якому вигляді можна задати розв'язок?*
4. *Як виникають диференціальні рівняння при математичному моделюванні реальних процесів? (Навести приклад) Як скласти диференціальне рівняння однопараметричного сімейства кривих?*
5. *В чому полягає задача Коші для рівняння першого порядку, розв'язаного відносно похідної? За якої умови воно має розв'язок? За яких умов цей розв'язок буде єдиним?*
6. *Що таке загальний розв'язок? Як розв'язується задача Коші за допомогою формули загального розв'язку? Що таке загальний розв'язок у формі Коші? Що таке загальний інтеграл? Що таке загальний розв'язок в параметричній формі?*
7. *Що таке частинний розв'язок? Як він пов'язаний із формулою загального розв'язку?*

Приклад 1. *Показати, що функція $y=\sqrt{x^2+C}$ є розв'язком диференціального рівняння $yy'=x$ (C - довільна стала).*

☺ Знаходимо похідну від функції $y=\sqrt{x^2+C}$:

$$y'=\frac{x}{\sqrt{x^2+C}}.$$

Підставляємо в задане диференціальне рівняння значення y та y': $\sqrt{x^2+C}\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2+C}}\equiv x$.

Отже функція $y=\sqrt{x^2+C}$ після підстановки її в диференціальне рівняння перетворила його в тотожність. Тому вона є розв'язком даного диференціального рівняння. Рівняння $y=\sqrt{x^2+C}$ визначає сімейство променів. Це сімейство є сімейством інтегральних віток кривих заданого диференціального рівняння. ☻

Приклад 2. *Довести, що функція, задана параметричними рівняннями* $\begin{cases} x = te^t, \\ y = e^{-t}. \end{cases}$ *є розв'язком диференціального рівняння* $(1+xy)y' + y^2 = 0$.

☺ Знайдемо похідну: $y'_x = \dfrac{y'_t}{x'_t} = \dfrac{-e^{-t}}{e^t + te^t} = -\dfrac{e^{-2t}}{1+t}$. Підставимо x, y, y'_x в задане диференціальне рівняння, отримаємо тотожність: $\left(1 + te^t \cdot e^{-t}\right)\left(-\dfrac{e^{-2t}}{1+t}\right) + \left(e^{-t}\right)^2 = 0$. А це означає, що функція, задана параметричними рівняннями $\begin{cases} x = te^t, \\ y = e^{-t}, \end{cases}$ є розв'язком диференціального рівняння $(1+xy)y' + y^2 = 0$. ☻

Приклад 3. *Довести, що функція, задана неявно,* $x^2 + y^2 - 2Cx = 0$, *задовольняє диференціальне рівняння* $y^2 - x^2 - 2xyy' = 0$, C *– довільна стала.*

☺ Виразимо сталу C: $C = \dfrac{x^2 + y^2}{2x}$. Згідно з правилом диференціювання неявної функції, маємо: $2x + 2yy' - 2C = 0$, і тому $y' = \dfrac{C - x}{y}$, або $y' = \dfrac{y^2 - x^2}{2xy}$. Підставимо останній вираз в задане диференціальне рівняння, отримаємо: $y^2 - x^2 - 2xy\dfrac{y^2 - x^2}{2xy} \equiv 0$.

Отже функція $x^2 + y^2 - 2Cx = 0$, задана неявно, задовольняє диференціальне рівняння $y^2 - x^2 - 2xyy' = 0$,. ☻

Приклад 4. *Довести, що функція* $y = x\int\limits_0^x \dfrac{\sin t}{t}dt$, *є розв'язком диференціального рівняння* $xy' = y + x\sin x$.

☺ Знайдемо похідну:

$$y' = \left(x\int_0^x \frac{\sin t}{t}dt \right)' = x' \cdot \int_0^x \frac{\sin t}{t}dt + x \cdot \left(\int_0^x \frac{\sin t}{t}dt \right)' =$$
$$= \int_0^x \frac{\sin t}{t}dt + x \cdot \frac{\sin x}{x} = \int_0^x \frac{\sin t}{t}dt + \sin x.$$

Підставимо, отриманий вираз в задане диференціальне рівняння: $x\left(\int_0^x \frac{\sin t}{t}dt + \sin x \right) \equiv x\int_0^x \frac{\sin t}{t}dt + x\sin x$. Отже, задана функція є розв'язком відповідного диференціального рівняння. ☻

Приклад 5. *Знайти геометричне місце стаціонарних точок для інтегральних кривих диференціального рівняння* $y' = x^2 y + y - 9$.

☺ В стаціонарних точках похідна рівна нулю. Оскільки, в кожній точці інтегральної кривої існує дотична, то стаціонарна точка лежить на кривій, де $y' = 0$, тобто на гіперболі $0 = x^2 y + y - 9$ або $y = \frac{9}{x^2 + 1}$. ☻

Завдання для самостійного розв'язання

1. [2, с.211; 11, с.13] Показати, що задані функції є розв'язком відповідних диференціальних рівнянь (C, C_1, C_2 - довільні сталі):

1.1. $y = Cx$, $ydx - xdy = 0$

1.2. $\ln x \cdot \ln y = C$, $y\ln ydx + x\ln xdy = 0$

1.3. $y = \frac{C}{\cos x}$, $y' - \operatorname{tg} x \cdot y = 0$

1.4. $y' - y = e^{x + x^2}$, $y = e^x \int_0^x e^{t^2}dt + Ce^x$

1.5. $x = \ln \frac{C}{e^y - 1}$, $e^y\left(y' + 1\right) = 1$

1.6. $y = Ce^{-2x} + \frac{1}{3}e^x$, $y' + 2y = e^x$

1.7. $y = 2x^5 + C$, $\frac{1}{x^4}dy = 10dx$

1.8. $e^{-y} - Cx = 1$, $xy' + 1 = e^y$

1.9. $y = \ln x + C$, $dx - xdy = 0$

1.10. $xy' - y = xe^x$, $\quad y = x\left(\int_0^x \frac{e^t}{t}dt + C\right)$

1.11. $y = C_1\cos x + C_2\sin x$, $\quad y'' + y = 0$

1.12. $y = C_1e^x + C_2e^{-x}$, $\quad y'' - y = 0$

1.13. $y = C_1 + C_2\sin(x + C_3)$, $\quad y''' + y' = 0$

1.14. $y = Cx + C - C^2$, $\quad y = xy' + y' - (y')^2$

1.15. $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y = C$, $\quad y' = \dfrac{1+y^2}{1+x^2}$

1.16. $(x - y + 1)y' = 1$, $\quad y = x + Ce^y$.

1.17. $\arcsin\dfrac{y}{x} = C - x$, $\quad xy' - y + x\sqrt{x^2 - y^2} = 0$

1.18. $x^2 - y^2 = Cx$, $\quad \left(y^2 + x^2\right)dx - 2xydy = 0$

1.19. $y' = \dfrac{y}{x(\ln x - \ln y)}$, $\quad x = ye^{Cy+1}$.

1.20. $yy' = x, y = \sqrt{x^2 + C}$.

1.21. $y'\ln\dfrac{y'}{4} = 4x$, $\quad \begin{cases} x = t\ln t \\ y = t^2\left(2\ln t + 1\right) \end{cases}$.

1.22. $y'' + 2py' + (p^2 + q^2)y = 0$, $\qquad y = e^{-px}(C_1\cos qx + C_2\sin qx)$.

1.23. $y' - \operatorname{tg} x \cdot y = 0$, $\quad y = \dfrac{C}{\cos x}$.

1.24. $xy' = y\operatorname{tg}\ln y$, $\quad y = e^{\arcsin Cx}$.

1.25. $y = a\cdot\operatorname{arctg}\dfrac{x+y}{a} + C$, $\quad \left(x + y\right)^2\dfrac{dy}{dx} = a^2$

2. [2, с.212] Знаючи загальні розв’язки диференціальних рівнянь, знайти їх частинні розв’язки, що задовольняють заданим початковим умовам:

2.1. $y = Cx^2$, $\; y_{x=2} = 3$.

2.2. $x^2 + 2y^2 = C$, $\; y_{x=-1} = 5$.

2.3. $y = \left(C_1 + C_2x\right)e^{2x}$, $\; y_{x=0} = 0$, $\; y'_{x=0} = 1$.

2.4. $y = e^x(C_1\cos x + C_2\sin x)$, $\; y_{x=0} = 0$, $\; y'_{x=0} = 10$.

3. [2, с.212] Нехай $y = f(x)$ - інтегральна крива диференціального рівняння $y' = y\cos(x-1) + \ln x$, що проходить через точку М(1;3). Знайти в цій точці значення перших трьох похідних функції $f(x)$.

4. [2, с.212] Знайти геометричне місце можливих точок перегину інтегральних кривих диференціальних рівнянь:

4.1. $y' = e^y - x$; 4.2. $y' = x^2 + y^2$; 4.3. $y' = x^3 + y$.

5. [2, с.214; 11, с.18] Скласти диференціальні рівняння сімейства ліній:

5.1. $x^2 + Cy^2 = 2y$

5.2. $y = C_1\cos x + C_2\sin x$

5.3. $y = C_1 x + C_2\dfrac{1}{x}$

5.4. $(1+y)(1-x) = C$

5.5. $y - a = Ce^{\frac{1}{x}}$

5.6. $y + x = C(1-xy)$

5.7. $\cos y = C\cos x$

5.8. $(x-C)^2 + y^2 - C^2 = 0$

5.9. $y = Cxe^x$

5.10. $y = Cx$

5.11. $y = \sin ax$

5.12. $x^2 - y^2 = Cx$

5.13. $y = Cx + x^2$

5.14. $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-x}$

5.15. $\dfrac{x^2}{C^2} + \dfrac{y^2}{4} = 1$

5.16. $\ln\dfrac{x}{y} = 1 + ay$

5.17. $y = C_1\cos 2x + C_2\sin 2x$

5.18. $\left(x^2 + y^2\right)^2 = a^2\left(x^2 - y^2\right)^2$

5.19. $y = ae^{\frac{x}{a}}$

5.20. $y = A\sin(x+a)$

5.21. $y = e^x(Ax + B)$

6. [2, с.212] Нехай $y = f(x)$, - інтегральна крива диференціального рівняння $y' = x^3 y + e^{2x}$, що проходить через точку М(0;1). Знайти $f^{(4)}(0)$.

7. [2, с.212] Знайти геометричні місця стаціонарних точок для інтегральних кривих диференціальних рівнянь:

7.1. $y' = x^2 y + y - 9$; 7.2. $y' = y^2 e^{2x} - 4$; 7.3. $y' = y^3\sin^6 x - 1$.

8. [2, с.212] Знайти стаціонарні точки для інтегральних кривих, що проходять через них, диференціальних рівнянь:

8.1. $y' = 4x + 4y - 3xy$; 8.2. $y' = x + y + x^2 + y^2 - 26$.

Практичне заняття № 2

Тема: ***Диференціальні рівняння з відокремлюванними змінними. Однорідні диференціальні рівняння.***

Контрольні запитання

1. *Як інтегрується рівняння з відокремленими і з відокремлюванними змінними?*
2. *Яке рівняння називається однорідним? Як воно інтегрується?*
3. *Яке рівняння називається узагальнено однорідним? Як воно інтегрується?*

Приклад 1. *Розв'язати рівняння* $x\left(y^2-4\right)dx+ydy=0$.

☺ Розділимо обидві частини рівняння на $y^2-4\neq 0$, отримаємо

$$xdx+\frac{ydy}{y^2-4}=0.$$

Змінні відокремились. Проінтегрувавши, отримаємо

$$\int xdx+\int\frac{ydy}{y^2-4}=C,$$

$$\frac{x^2}{2}+\ln|y^2-4|=\ln|C|,$$

$$\text{або } y^2-4=Ce^{-x^2}.$$

Це загальний розв'язок даного диференціального рівняння.

Нехай тепер $y^2-4=0$, тобто $y=\pm 2$, а $dy=0$. Виконаємо підстановку в задане диференціальне рівняння:

$$x\cdot 0dx+2\cdot 0\equiv 0,$$

тобто $y=\pm 2$ - розв'язок даного рівняння. Цей розв'язок не є особливим, оскільки його можна отримати із загального розв'язку при $C=0$. ☻

Приклад 2. *Знайти частинний інтеграл рівняння* $y'\cos x=\dfrac{y}{\ln y}$, *що задовольняє початковій умові* $y\left(0\right)=1$.

☺ Оскільки $y'=\dfrac{dy}{dx}$, то задане рівняння запишеться у вигляді

$$\frac{dy}{dx}\cos x=\frac{y}{\ln y}. \ (1)$$

Відокремимо змінні, для цього ліву і праву частину помножимо на вираз $\frac{\ln y}{y}\cdot\frac{dx}{\cos x}$, $x\neq\frac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$:

$$\frac{\ln y}{y}dy=\frac{dx}{\cos x}.$$

Проінтегруємо обидві частини рівняння:

$$\int\frac{\ln y}{y}dy=\int\frac{dx}{\cos x}+C, \text{ або } \frac{1}{2}\ln^2 y=\ln\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)+C.$$

Останнє рівняння є загальним розв'язком заданого диференціального рівняння.

Використовуючи початкову умову $y=1$ при $x=0$, знаходимо $C=0$. Остаточно отримаємо частинний інтеграл при заданих початковій умові:

$$\frac{1}{2}\ln^2 y=\ln tg\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right). \ ☻$$

Приклад 3. *Розв'язати рівняння* $\frac{dy}{dx}=\cos(x+y)$.

☺ Зробимо заміну змінних, ввівши нову шукану функцію $z=x+y$. Продиференціювавши цей вираз, отримаємо: $\frac{dz}{dx}=1+\frac{dy}{dx}$. Тоді рівняння набуде вигляду:

$$\frac{dz}{dx}=1+\cos z, \qquad (2)$$

$$\text{або} \quad \frac{dz}{1+\cos z}=dx \ \ (1+\cos z\neq 0),$$

звідки

$$\int\frac{dz}{1+\cos z}=\int dx+\mathrm{C},$$

$$\int\frac{dz}{2\cos^2\frac{z}{2}}=\int dx+C,$$

$$\operatorname{tg}\frac{z}{2}=x+C,$$

$$z = 2\left(\operatorname{arctg}\left(x+C\right)+\pi n\right),\ n \in \mathbb{Z}.$$

При розв'язуванні рівняння обидві частини ділили на $1+\cos z \neq 0$. Перевіримо чи є розв'язками корені рівняння $1+\cos z = 0$, тобто $z = (2n+1)\pi,\ n \in \mathbb{Z}$. Підставимо значення z та $dz = 0$ в рівняння (2), отримаємо тотожність, тобто $z = (2n+1)\pi,\ n \in \mathbb{Z}$ є коренями даного рівняння, причому це особливі розв'язки, оскільки їх не можна отримати із загального розв'язку.

Повертаючись до підстановки, отримаємо загальний розв'язок

$$y = z - x = 2\left(\operatorname{arctg}\left(x+C\right)+\pi n\right) - x$$

і особливий розв'язок

$$y = z - x = (2n+1)\pi - x,\ n \in \mathbb{Z}.$$ ☻

Приклад 4. *Знайти розв'язок інтегрального рівняння* $y = \int\limits_1^x e^{-y}dx$ *(*$x > 0$*)* (3).

☺ Продиференціюємо обидві частини рівняння по *x*. Оскільки похідна інтеграла по верхній межі дорівнює значенню підінтегральної функції при відповідному значенні аргументу, то отримаємо з рівняння (3) диференціальне рівняння

$$y' = e^{-y} \quad (4).$$

Крім цього, беручи в обох частинах рівняння $x = 1$ і враховуючи, що $\int\limits_1^x e^{-y}dx = 0$, отримаємо початкову умову $y(1) = 0$ (5).

Отже маємо диференціальне рівняння (4) з початковою умовою (5). Знайдемо загальний розв'язок рівняння (4) методом відокремлення змінних, врахувавши, що $y' = \dfrac{dy}{dx}$:

$$\frac{dy}{dx} = e^{-y} \ \Big|\cdot e^{y}dx,$$

$$e^{y}dy = dx, \text{ або } \int e^{y}dy = \int dx + C,$$

звідки

$$e^{y} = x + C.$$

Знайдемо частинний розв'язок, підставивши $x = 1$, $y = 0$. Знаходимо $C = 0$. Отже розв'язком даного інтегрального рівняння є функція $e^{y} = x$ або $y = \ln x$. ☻

Приклад 5. Знайти розв’язок диференціального рівняння $y' = \dfrac{\sqrt{x^2+y^2}-x}{y}$, перейшовши до полярних координат.

☺ Перейдемо до полярних координат:

$$\begin{cases} x = \rho(\varphi)\cos\varphi, \\ y = \rho(\varphi)\sin\varphi, \end{cases}$$

тоді

$$y_\varphi{}' = \frac{y_\varphi{}'}{x_\varphi{}'} = \frac{\rho_\varphi{}'(\varphi)\sin\varphi + \rho(\varphi)\cos\varphi}{\rho_\varphi{}'(\varphi)\cos\varphi - \rho(\varphi)\sin\varphi}$$

(надалі замість $\rho_\varphi{}'(\varphi)$ будемо писати ρ').

Задане рівняння набуде вигляду:

$$\frac{\rho'\cdot\sin\varphi + \rho\cdot\cos\varphi}{\rho'\cdot\cos\varphi - \rho\cdot\sin\varphi} = \frac{\sqrt{\rho^2\cdot\cos^2\varphi + \rho^2\cdot\sin^2\varphi} - \rho\cdot\cos\varphi}{\rho\cdot\sin\varphi},$$

$$\frac{\rho'\cdot\sin\varphi + \rho\cdot\cos\varphi}{\rho'\cdot\cos\varphi - \rho\cdot\sin\varphi} = \frac{1-\cos\varphi}{\sin\varphi},$$

$$\rho'\cdot\sin^2\varphi + \rho\cos\varphi\cdot\sin\varphi = \rho'\cdot\cos\varphi - \rho\cdot\sin\varphi - \rho'\cdot\cos^2\varphi + \rho\cdot\sin\varphi\cdot\cos\varphi,$$

$$\rho' - \rho'\cos\varphi = -\rho\cdot\sin\varphi,$$

$$\rho'(1-\cos\varphi) = -\rho\cdot\sin\varphi,$$

$$\frac{d\rho}{d\varphi}(1-\cos\varphi) = -\rho\cdot\sin\varphi.$$

Домножимо ліву і праву частину на $\dfrac{d\varphi}{\rho(1-\cos\varphi)}$, отримаємо:

$$\frac{d\rho}{d\varphi} = -\frac{\sin\varphi}{(1-\cos\varphi)}d\varphi,$$

$$\int\frac{d\rho}{d\varphi} = -\int\frac{\sin\varphi}{(1-\cos\varphi)}d\varphi,$$

$$\ln|\rho| = -\ln|1-\cos\varphi| + \ln|C|,$$

$$\rho = \frac{C}{1-\cos\varphi}.$$

Повертаємось до декартових координат, враховуючи, що $\rho = \sqrt{x^2+y^2}$, $\cos\varphi = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$:

$$\sqrt{x^2+y^2}=\frac{C}{1-\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}}, \quad \text{або} \quad \sqrt{x^2+y^2}-x=C. \ ☻$$

Приклад 6. *Знайти частинний розв'язок рівняння* $y'=\frac{y}{x}+\sin\frac{y}{x}$ *при початковій умові* $y(1)=\pi/2$.

☺ Використаємо підстановку $t=\frac{y}{x}$, $t=t(x)$. Тоді $y=tx$, $dy=tdx+xdt$. В результаті отримаємо:

$$xdt+tdx=(t+\sin t)dx; \ xdt=\sin t dx; \ \frac{dt}{\sin t}=\frac{dx}{x}.$$

Проінтегрувавши, отримаємо:

$$\ln|\operatorname{tg}(t/2)|=\ln|x|+\ln|C|, \text{ звідки } t/2=\operatorname{arctg}(Cx).$$

Повернувшись до заміни $t=\frac{y}{x}$, знаходимо загальний розв'язок початкового диференціального рівняння $y=2x\cdot\operatorname{arctg}(Cx)$. Використавши, задану початкову умову, отримаємо $\pi/2=2\operatorname{arctg}C$, звідки C=1. Отже, шуканий частинний розв'язок має вигляд $y=2x\cdot\operatorname{arctg}x$. ☻

Приклад 7. *Знайти загальний інтеграл рівняння* $(x^2+2xy)dx+xydy=0$.

☺ В цьому рівнянні $P(x,y)=x^2+2xy$, $Q(x,y)=xy$. Обидві функції однорідні другого порядку. Введемо підстановку $y=tx$, звідки $dy=xdt+tdx$. Тоді рівняння набуває вигляд

$$(x^2+2x^2t)dx+tx^2(xdt+tdx)=0, \text{ або } (x^2+2x^2t+t^2x^2)dx+tx^3dt=0.$$

Розділивши змінні та проінтегрувавши, отримаємо

$$\frac{dx}{x}+\frac{tdt}{(t+1)^2}=0; \ \int\frac{dx}{x}+\int\frac{tdt}{(t+1)^2}=C.$$

Перетворимо другий інтеграл:

$$\ln|x|+\int\frac{t+1-1}{(t+1)^2}dt=C, \text{ або } \ln|x|+\ln|t+1|+\frac{1}{1+t}=C.$$

Повернувшись до підстановки, отримаємо загальний розв'язок диференціального рівняння:

$$\ln|x+y| + \frac{x}{x+y} = C. ☻$$

Приклад 8. *Знайти загальний інтеграл рівняння* $(2x+y+1)dx + (x+2y-1)dy = 0$.

☺ Запишемо задане рівняння у вигляді $y' = -\frac{2x+y+1}{x+2y-1}$. Визначимо детермінант матриці, що складається з коефіцієнтів при змінних *x* та *y*: $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$. Оскільки детермінант не дорівнює нулю, то рівняння можна звести до однорідного підстановкою $x = u + \alpha$, $y = v + \beta$, де $(\alpha; \beta)$ - точка перетину прямих $2x + y + 1 = 0$ і $x + 2y - 1 = 0$. Точка перетину прямих має координати $(-1;1)$. Отже $x = u - 1$, $y = v + 1$, $dx = du$, $dy = dv$. Рівняння набуває вигляду

$$(2u+v)du + (u+2v)dv = 0.$$

Розв'яжемо отримане однорідне рівняння підстановкою $v = ut$, де $dv = udt + tdu$:

$$(2u+ut)du + (u+2ut)(udt+tdu) = 0,$$

$$2u\left(1+t+t^2\right)du + u^2(1+2t)dt = 0,$$

$$u = 0 \qquad (6)$$

або

$$2\left(1+t+t^2\right)du = -u(1+2t)dt. \qquad (7)$$

Розв'яжемо рівняння (7), отримаємо:

$$2\left(1+t+t^2\right)du = -u(1+2t)dt \quad \Bigg| \cdot \frac{1}{2u\cdot\left(1+t+t^2\right)} \text{ (при } u \neq 0\text{)},$$

$$\frac{du}{u} = -\frac{1}{2}\frac{1+2t}{1+t+t^2}dt,$$

$$\int\frac{du}{u} = -\frac{1}{2}\int\frac{d\left(1+t+t^2\right)}{1+t+t^2} + \ln|C|,$$

$$\ln|u| = -\frac{1}{2}\ln\left(1+t+t^2\right) + \ln|C|, \text{ або } u = \frac{C}{\sqrt{1+t+t^2}}.$$

Повертаємось до підстановки: $v = ut = \frac{Ct}{\sqrt{1+t+t^2}}$.

Тоді $x = u - 1 = \dfrac{C}{\sqrt{1+t+t^2}} - 1$, $y = v + 1 = \dfrac{Ct}{\sqrt{1+t+t^2}} + 1$. Після елементарних перетворень отримаємо загальний інтеграл заданого рівняння

$$x^2 + y^2 + xy + x - y = C^2 - 1.$$

З рівняння (6) $x = -1$, очевидно, що особливий розв'язок. ☻

Приклад 9. *Знайти загальний інтеграл рівняння* $(x + y + 2)dx + (2x + 2y - 1)dy = 0$.

☺ Запишемо задане рівняння у вигляді $y' = -\dfrac{x+y+2}{2x+2y-1}$. Визначимо детермінант матриці, що складається з коефіцієнтів при змінних *x* та *y*: $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 0$. Оскільки детермінант дорівнює нулю, то рівняння можна звести до однорідного підстановкою $x + y = t$, $dy = dt - dx$. Задане рівняння набуває вигляд

$$(t + 2)dx + (2t - 1)(dt - dx) = 0, \text{ або } (3 - t)dx + (2t - 1)dt = 0.$$

Розділяємо змінні та інтегруємо, маємо

$$\int \frac{2t-1}{3-t}dt + \int dx = C, \text{ або } -2t - 5\ln|t-3| + x = -C.$$

Повертаємось до підстановки ($t = x + y$), і отримуємо загальний розв'язок рівняння:

$$x + 2y + 5\ln|x + y - 3| = C. \text{ ☻}$$

Завдання для самостійного розв'язання

1. [2, с.217; 11, с.30] Розв'язати диференціальні рівняння:

1.1. $y' = ky$

1.2. $(1 + x)ydx + (1 - y)xdy = 0$

1.3. $xy^2 + x + (y - x^2 y)y' = 0$

1.4. $y' = 10^{x+y}$

1.5. $\sin x \cos^2 y dx + \cos^2 x dy = 0$

1.6. $y^2 dx + (x^2 - xy)dy = 0$

1.7. $(1 + x^2)y^3 + (1 - y^2)x^3 y' = 0$

1.8. $e^y (y' + 1) = 1$

1.9. $e^{y}\sqrt{1+x^{2}}dy+dx=0$

1.10. $\sqrt{1-x^{2}}y'+\sqrt{1-y^{2}}=0$

1.11. $\left(1+y^{2}\right)\ dx=\left(1+x^{2}\right)\ dy.$

1.12. $y'+\sin\dfrac{x+y}{2}=\sin\dfrac{x-y}{2}.$

1.13. $y'=e^{x+y}.$

1.14. $3e^{x}tg\ \ y\ dx+(1-e^{x})\cos^{-2}y\ dy=0.$

1.15. $yy'=\dfrac{1-2x}{y}.$

1.16. $y-xy'=a\ (1+x^{2}y').$

1.17. $e^{-x}(1-x)\ dx+e^{y}\cdot\sin\ \ y\ dy=tg\ \ y\ dy.$

1.18. $(y^{2}+xy^{2})\ y'+x^{2}-yx^{2}=0.$

1.19. $e^{y}(1+x^{2})\ dy-2x\ (1+e^{y})\ dx=0.$

1.20. $ye^{2x}dx-(1+e^{2x})\ dy=0.$

1.21. $(1+y^{2})\ dy-(2y+\sqrt{1+y^{2}})\ (1+x)^{\frac{3}{2}}dy=0.$

1.22. $y\ (1+x^{2})\ y'=1+y^{2}.$

2. [2, с.217] Знайти частинні розв’язки рівнянь, що задовольняють початковим умовам:

2.1. $\sin y\cdot\cos xdy=\cos y\cdot\sin xdx,\quad y\left(0\right)=\dfrac{\pi}{4}$

2.2. $(1+e^{x})\ \ yy'=e^{x},\ \ y\left(0\right)=1.$

2.3. $y'\sin x=y\ln y,\ \ y\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=1$ і якщо $y\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=e.$

2.4. $\dfrac{dx}{\cos^{2}x\ \cos\ y}=-\text{ctg}\,x\ \sin y\ dy,\quad y\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=\pi.$

2.5. $y'=2\sqrt{y}\ln x,\quad y\left(e\right)=1.$

2.6. $y'=(2y+1)\text{ctg}\,x,\quad y\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{1}{2}.$

2.7. $xy'=\dfrac{y}{\ln x},\quad y\left(e\right)=1.$

2.8. $y'\,\text{tg}\,x-y=1,\quad y\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=1.$

2.9. $xy\,dx+(1+y^2)\ \sqrt{1+x^2}dy=0,\quad y\left(\sqrt{8}\right)=1.$

2.10. $(1+e^x)\ yy'=e^x,\quad y(0)=1.$

3. [2, с.218; 11, с.37] Розв'язати диференціальне рівняння, використовуючи заміну змінної:

3.1. $x^3(y'-x)=y^2$ (підстановка $zx^2=y$)

3.2. $\left(x-\sqrt{xy}-y\right)dx+\sqrt{xy}dy=0$

3.3. $xy'-y=x\,\mathrm{tg}\,\dfrac{y}{x}$

3.4. $\left(xye^{\frac{x}{y}}+y^2\right)dx-x^2e^{\frac{x}{y}}dy=0$

3.5. $x\cos\dfrac{y}{x}(ydx+xdy)=y\sin\dfrac{y}{x}(xdy-ydx)$

3.6. $xy'=y-xe^{\frac{y}{x}}$

3.7. $y'=\sin(x-y).$

3.8. $xy'=x\sin\dfrac{y}{x}+y$

3.9. $(2x+3y-1)\ dx+(4x+6y-5)\ dy=0.$

3.10. $y'\sqrt{1+x+y}=x+y-1.$

3.11. $2y'+y^2+\dfrac{1}{x^2}=0;$ (підстановка $xy=u$)

3.12. $y'=ax+by+c\quad (a,\ b,\ c-const).$

3.13. $y'=(x+y)^2.$

3.14. $y'=(x-y)^2+1.$

3.15. $y'=(ax+by+c)^2.$

3.16. $(x+y)^2y'=a^2.$

3.17. $xy^2(xy'+y)=a^2.$ (підстановка $xy=u$)

3.18. $4xydx+\left(y-x^2\right)dy=0$ (підстановка $zx^2=y$)

3.19. $\left(1+e^{\frac{x}{y}}\right)dx+e^{\frac{x}{y}}\left(1-\frac{x}{y}\right)dy=0$.

4. [2, c.218] Розв’язати рівняння $(y-x)\sqrt{1+x^2}dy=(1+y^2)^{\frac{3}{2}}dx$, застосовуючи підстановку $x=\operatorname{tg}u$, $y=\operatorname{tg}v$.

5. [2, c.221] Розв’язати однорідні диференціальні рівняння:

5.1. $ydx+\left(2\sqrt{xy}-x\right)dy=0$

5.2. $\left(y+\sqrt{x^2+y^2}\right)dx-xdy=0$

5.3. $y^2-4xy+4x^2y'=0$

5.4. $\left(x^2+2xy-y^2\right)dx+\left(y^2+2xy-x^2\right)dy=0$.

6. [2, c.222] Розв’язати рівняння, що зводиться до однорідного диференціального рівняння:

6.1. $(x+y-2)dx+(x-y+4)dy=0$

6.2. $(x+y+1)dx+(2x+2y-1)dy=0$

6.3. $(x-y)dx+(x+y)dy=0$

6.4. $(y+2)dx=(2x+y-4)dy$

6.5. $(x-2y+5)dx+(2x-y+4)dy=0$

6.6. $(2x-y+1)dx+(2y-x-1)dy=0$

6.7. $(2x+8)dx+(3y-5x-11)dy=0$

6.8. $y'=\dfrac{2x+y-1}{4x+2y+5}$

6.9. $(4y-3x-5)y'+7x-3y+2=0$

7. [2, c.221] Знайти інтегральну криву, що проходить через точку $M(1;1)$:

7.1. $ydx+\left(2\sqrt{xy}-x\right)dy=0$

7.2. $\left(x^2+xy\right)y'=x\sqrt{x^2-y^2}+xy+y^2$

7.3. $\left(y^4-2x^3y\right)dx+\left(x^4-2xy^3\right)dy=0$

7.4. $x^2-y^2+2xyy'=0$

7.5. $\dfrac{dx}{x^2-xy+y^2}=\dfrac{dy}{2y^2-xy}$

7.6. $y' = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}$

8. [2, с.222] Довести, що інтегральні криві рівняння $\left(ax + by + c\right)dx + \left(ay - bx + d\right)dy = 0$ є логарифмічними спіралями.

Практичне заняття №3

Тема: Лінійні диференціальні рівняння першого порядку. Рівняння Бернуллі.

Контрольні запитання

1. *Яке рівняння називається лінійним? За якої умови задача Коші для лінійного рівняння має єдиний розв'язок? Як довільно можна обирати початкові дані розв'язку цього рівняння? В якому інтервалі існує розв'язок?*
2. *Який вигляд має загальний розв'язок однорідного лінійного рівняння? Як знайти загальний розв'язок однорідного лінійного рівняння, якщо відомий один його частинний розв'язок?*
3. *Як знайти загальний розв'язок неоднорідного лінійного рівняння, якщо відомий один його частинний розв'язок і загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння?*
4. *В чому суть методу Бернуллі, Лагранжа (методу варіації довільної сталої) знаходження загального розв'язку неоднорідного лінійного рівняння?*
5. *Як інтегрується рівняння Бернуллі? За якої умови* $y = 0$ *буде розв'язком рівняння Бернуллі?*

Приклад 1. *Проінтегрувати рівняння* $y'\cos^2 x + y = \operatorname{tg} x$ *при початковій умові* $y(0) = 0$.

☺ Це лінійне неоднорідне диференціальне рівняння першого порядку (ЛНДР), оскільки шукана функція y та її похідна y' містяться в цьому рівнянні в першому степені, а права частина рівняння є функцією від змінної x. Областю його розв'язків є область неперервності його коефіцієнтів $\cos^2 x,\ \operatorname{tg} x$, тобто вся числова вісь крім точок $\frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}$.

Лінійне рівняння можна інтегрувати способом *варіації довільної сталої*.

I. Знайдемо спочатку загальний розв'язок лінійного однорідного диференціального рівняння (ЗР ЛОДР), що відповідає даному неоднорідному:

$$y'\cos^2 x + y = 0.$$

Інтегруємо останнє рівняння, відокремивши змінні, отримаємо

$$\frac{dy}{y} + \frac{dx}{\cos^2 x} = 0, \Rightarrow \ln y + \operatorname{tg} x = \ln C, \Rightarrow y = Ce^{-\operatorname{tg} x}. \ (1)$$

II. Шукаємо частинний розв'язок лінійного неоднорідного диференціального рівняння (ЧР ЛНДР) у вигляді (1), прийнявши довільну сталу за функцію від *x*: $y = C(x)e^{-\operatorname{tg} x}$. Підставимо в початкове рівняння $y = C(x)e^{-\operatorname{tg} x}$ та $y' = C'(x)e^{-\operatorname{tg} x} - C(x)e^{-\operatorname{tg} x}\frac{1}{\cos^2 x}$, отримаємо рівняння

$$\left(C'(x)e^{-\operatorname{tg} x} - C(x)e^{-\operatorname{tg} x}\frac{1}{\cos^2 x}\right)\cos^2 x + C(x)e^{-\operatorname{tg} x} = \operatorname{tg} x,$$

або

$$C'(x)e^{-\operatorname{tg} x}\cos^2 x = \operatorname{tg} x,$$

звідси

$$C(x) = \int \frac{e^{\operatorname{tg} x}\operatorname{tg} x}{\cos^2 x}dx = \int e^{\operatorname{tg} x}\operatorname{tg} x d(\operatorname{tg} x) = e^{\operatorname{tg} x}\operatorname{tg} x - e^{\operatorname{tg} x} + C = e^{\operatorname{tg} x}(\operatorname{tg} x - 1) + C$$

.

III. Покладемо $C = 0$, тоді $y = C(x)e^{-\operatorname{tg} x} = e^{\operatorname{tg} x}(\operatorname{tg} x - 1)e^{-\operatorname{tg} x} =$ $= \operatorname{tg} x - 1$ – ЧР ЛНДР.

IV. Використаємо початкову умову $y(0) = 0$, отримаємо $0 = -1 + C$, звідки $C = 1$. Отже, загальний розв'язок лінійного неоднорідного диференціального рівняння дорівнює сумі загального розв'язку лінійного однорідного диференціального рівняння і частинного розв'язку лінійного неоднорідного диференціального рівняння (ЗР ЛНДР = ЗР ЛОДР + ЧР ЛНДР):

$$y = \operatorname{tg} x - 1 + e^{-\operatorname{tg} x}.$$

Відповідь: $y = \operatorname{tg} x - 1 + e^{-\operatorname{tg} x}$. ☻

Приклад 2. *Проінтегрувати рівняння* $y' - y\operatorname{th} x = \operatorname{ch}^2 x$.

☺ Це – лінійне рівняння. Розв'яжемо його методом Бернуллі (спосіб підстановки). Покладемо $y = uv$, де u, v - функції від *x*, маємо

$$\left(uv\right)' - (uv)\operatorname{th} x = \operatorname{ch}^2 x,$$

або

$$(u'v + uv') - uv\operatorname{th} x = \operatorname{ch}^2 x, \text{ або } u\left(v' - v\operatorname{th} x\right) + u'v = \operatorname{ch}^2 x. \ (2)$$

Припускаємо, що вираз в дужках дорівнює нулю:

$$u\left(v' - v\operatorname{th} x\right) + u'v = \operatorname{ch}^2 x \ (2) \Rightarrow \begin{cases} v' - v\operatorname{th} x = 0, \ (3) \\ u'v = \operatorname{ch}^2 x. \ (4) \end{cases}$$

$$(3) \Rightarrow \frac{dv}{v} = \operatorname{th} x dx \Rightarrow \ln v = \ln\left(\operatorname{ch} x\right)^1 \Rightarrow v = \operatorname{ch} x$$

$$(4) \Rightarrow u'\operatorname{ch} x = \operatorname{ch}^2 x \Rightarrow \int du = \int \operatorname{ch} x dx = \operatorname{sh} x + C$$

Помножимо u на v, отримаємо загальний розв'язок

$$y = \operatorname{ch} x\left(\operatorname{sh} x + C\right). \ ☻$$

Приклад 3. *Проінтегрувати рівняння* $y = xy' + y'\ln y$.

☺ Задане рівняння не є лінійним, якщо шуканою функцією вважати y, але воно буде лінійним якщо взяти за шукану функцію x.Тобто візьмемо за аргумент y, а за невідому функцію x. Для цього покладемо $y'_x = \dfrac{1}{x'_y}$ (використали формулу диференціювання оберненої функції). Тоді задане рівняння набуде вигляду:

$$y = x\frac{1}{x'_y} + \frac{1}{x'_y}\ln y, \text{ або } y \cdot x'_y - x = \ln y. \qquad (5)$$

Це лінійне неоднорідне диференціальне рівняння (ЛНДР) відносно *x*. Інтегруємо відповідне лінійне однорідне диференціальне рівняння (ЛОДР) $y \cdot x' - x = 0$; маємо

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y}; \ x = Cy.$$

Шукаємо розв'язок лінійного неоднорідного диференціального рівняння (ЛНДР) (5), припустивши, що стала C є функцією від y: $x = C(y)y$ (6). Звідки $x'_y = C'(y)y + C(y)$. Підстановка в рівняння (5) дає: $y^2 \cdot C'(y) = \ln y$, або $C'(y) = \dfrac{\ln y}{y^2}$, звідки $C(y) = C - \dfrac{1 + \ln y}{y}$.

---

[1] Сталу інтегрування не вводимо, оскільки достатньо знайти будь-який частинний розв'язок цього допоміжного рівняння.

Підставивши отриманий вираз для $C(y)$ в рівняння (6), отримаємо загальний розв’язок заданого диференціального рівняння:

$$x = C(y)y = \left(C - \frac{1+\ln y}{y}\right)y \text{, або } x = Cy - \ln y - 1. \text{ ☻}$$

Приклад 4. *Розв’язати рівняння* $y' + \frac{y}{x} = x^2 y^4$.

☺ Це – рівняння Бернуллі (ліва частина у нього така ж, як і у лінійного рівняння, а в правій частині стоїть вираз виду $y^m f(x)$, де m – стале число, у нашому випадку $y^4 x^2$). Проінтегруємо його методом варіації довільної сталої. Для цього інтегруємо спочатку відповідне лінійне однорідне диференціальне рівняння (ЛОДР) $y' + \frac{y}{x} = 0$, розв’язок якого $y = \frac{C}{x}$.

Шукаємо розв’язок заданого рівняння Бернуллі, припустивши, що довільна стала є функцією від x:

$$y = \frac{C(x)}{x}, \quad y' = \frac{C'(x)x - C(x)}{x^2}.$$

Підставивши y, y' в початкове рівняння, отримаємо

$$\frac{C'(x)x - C(x)}{x^2} + \frac{C(x)}{x^2} = x^2\left(\frac{C(x)}{x}\right)^4, \quad C'(x) = \frac{C^4(x)}{x}.$$

Проінтегруємо, отримане рівняння:

$$\frac{dC(x)}{(C(x))^4} = \frac{dx}{x}; \quad -\frac{1}{3(C(x))^3} = \ln x - \ln C; \quad C(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{3\ln\frac{C}{x}}}.$$

Отже, загальний розв’язок заданого рівняння

$$y = \frac{C(x)}{x} = \frac{1}{x \cdot \sqrt[3]{3\ln\frac{C}{x}}},$$

$y = 0$ - частинний розв’язок ($n = 4 > 1$), він є асимптотою всіх інших інтегральних кривих[2]. ☻

[2] Якщо $0 < n < 1$, то y=0 – особливий розв’язок рівняння Бернуллі.

Приклад 5. *Розв'язати диференціальне рівняння* $xy' + y = y^2 \ln x$.

☺ Це рівняння Бернуллі (ліва частина у нього така ж як і у лінійного рівняння, а в правій частині стоїть вираз $y^m f(x)$, де m – стале число, в цьому прикладі $y^2 \ln x$).

Для інтегрування цього рівняння скористаємось підстановкою (методом Бернуллі) $y = uv$, де u, v - функції від x, маємо

$$x(uv)' + uv = (uv)^2 \ln x, \text{ звідки } x(u'v + uv') + uv = u^2 v^2 \ln x,$$

або

$$xu'v + u(xv' + v) = u^2 v^2 \ln x. \qquad (7)$$

Припустимо, що вираз в дужках дорівнює нулю $xv' + v = 0$ (8), тоді

$$x\frac{dv}{dx} = -v, \text{ або } \frac{dv}{v} = -\frac{dx}{x},$$

$$\ln v = -\ln x,\ v = \frac{1}{x}.$$

Підставимо знайдене значення v в рівняння (7), врахувавши рівняння (8), отримаємо:

$$xu'\frac{1}{x} = u^2\left(\frac{1}{x}\right)^2 \ln x, \quad u' = u^2\frac{\ln x}{x^2}, \quad \frac{du}{u^2} = \frac{\ln x}{x^2}dx.$$

Виконавши інтегрування, отримаємо $\frac{1}{u} = \frac{1}{x}(\ln x + 1 + Cx)$, або $u = \dfrac{x}{\ln x + 1 + cx}$.

Оскільки $y = uv$, то загальний розв'язок заданого рівняння Бернуллі набуває вигляду

$$y = \frac{1}{\ln x + 1 + C},$$

$y = 0$ – частинний розв'язок ($n = 4 > 1$), він є асимптотою всіх інших інтегральних кривих. ☻

Приклад 6. *Розв'язати рівняння* $y' + 2xy = 2x^3 y^3$.

☺ Це рівняння Бернуллі, оскільки ліва частина у нього така ж як і у лінійного рівняння, а в правій частині стоїть вираз $y^m f(x)$, де m – стале число. В цьому прикладі $m = 3$, $f(x) = 2x^3$. Зведемо це рівняння до лінійного множенням на $(1-m)y^{-m}$, $y \neq 0$, тобто на $-2y^{-3}$:

$$-2y^{-3}y' - 4xy^{-2} = -4x^3. \qquad (9)$$

Тепер введемо заміну $y^{1-m} = z$, тобто $y^{-2} = z$. Тоді $z' = -2y^{-3}y'$, і рівняння набуває вигляду:

$$z' - 4xz = -4x^3. \qquad (10)$$

Рівняння (10) є ЛНДР відносно змінної x та функції z. Загальним розв'язком рівняння (10) є функція $z = -x^2 + \frac{1}{2} + Ce^{2x^2}$. Повернемося до заміни: $y = z^{-\frac{1}{2}} = \left(-x^2 + \frac{1}{2} + Ce^{2x^2}\right)^{-\frac{1}{2}}$. Отримали загальний розв'язок заданого рівняння Бернуллі. ☻

Завдання для самостійного розв'язання

1. [2, с.224; 11, с.41] Розв'язати лінійні диференціальні рівняння першого порядку, використовуючи метод варіації довільної сталої:

1.1. $xy' + 2y = x^2$

1.2. $y' + 2xy = 2xe^{-x^2}$.

1.3. $y' - \frac{2y}{x+1} = (x+1)^2$

1.4. $y' - \frac{3y}{x} = x$

1.5. $y'x^2 - 2xy = 3y$

1.6. $y'x(1 - x^2) + (2x^2 - 1)y = ax^2$

1.7. $x^2y' + xy + 1 = 0$

1.8. $xy' - 2y = 2x^4$

1.9. $x^2y' - 2xy = 3$

1.10. $y' + \frac{xy}{a^2 + x^2} = \frac{\sqrt{a^2 + x^2}}{x^2}$

2. [2, с.224; 11, с.41] Розв'язати лінійні диференціальні рівняння першого порядку, використовуючи метод Бернуллі:

2.1. $(x^3 + y)dx - xdy = 0$

2.2. $y' + y = \cos x.$

2.3. $dy - \frac{xydx}{1+x^2} = \frac{adx}{1+x^2}$

2.4. $y' - \frac{y}{\sin x} = tg\,\frac{x}{2}$

2.5. $y'ctgx - y = 2\cos^2 x \cdot ctgx$

2.6. $y' - ay = x$

2.7. $(1 - x^2)dy + x(y - a)dx = 0$

2.8. $(2e^y - x)y' = 1$

2.9. $y'\cos x + y\sin x = 1$

2.10. $y' + y\cos x = \frac{1}{2}\sin 2x$

3. [2, с.224; 11, с.41] Знайти загальний розв'язок лінійного диференціального рівняння першого порядку:

3.1. $y' + 2xy = 2xe^{-x^2}$

3.2. $y' + y = e^x$

3.3. $y' = \dfrac{y}{\left(1+x^2\right)\operatorname{arctg} x} + \dfrac{\cos x}{\sqrt{\sin x}} \operatorname{arctg} x$

3.4. $y' + y - e^{2x} = 0$

3.5. $y' - \dfrac{y}{\sqrt{1+x^2}} = \dfrac{x+\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1-x^2}}$

3.6. $y' = \dfrac{1}{x\cos' y + \sin 2y}$.

3.7. $y' - \dfrac{2x+1}{x^2+x+1} y = \cos x - \dfrac{2x+1}{x^2+x+1} \sin x.$

3.8. $y' = \dfrac{y}{2y\ln y + y - x}$.

3.9. $(1+y^2)dx = (\operatorname{arctg} y - x)dy.$

3.10. $y' + \dfrac{1-2x}{x^2} y = 1.$

3.11. $(1+y^2)dx = (\sqrt{1+y^2}\sin y - xy)dy.$

3.12. $y' - y \operatorname{th} x = \dfrac{1}{2}.$

3.13. $e^{x^2} y' + 2xye^{x^2} = x\sin x.$

3.14. $y' - \dfrac{2}{x} y = \dfrac{e^x (x-2)}{x}.$

4. [2, с.225] Знайти частинні розв’язки, які задовольняють початковим умовам, диференціальних рівнянь:

4.1. $y' - y\operatorname{tg} x = \dfrac{1}{\cos x}, y(0) = 1.$

4.2. $xy' - \dfrac{y}{x+1} = x, y(0) = 1.$

4.3. $y' + x^2 y = x^2, y(2) = 1.$

4.4. $y' + \dfrac{1}{\sin x\cos x} y = -\dfrac{1}{\sin x}, y\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = 1 + \dfrac{\sqrt{2}}{2}.$

4.5. $y' + x^2 y = x^2, y(2) = 1$

4.6. $\dfrac{dx}{dt} - \dfrac{nx}{t+1} = e^t (t+1)^n, x(0) = 1.$

4.7. $(1-x^2)y' + xy = 1, y(0) = 1.$

4.8. $y' + y\cos x = \sin x\cos x, y(0) = 1.$

5. [2, с.225] Розв’язати рівняння, лінійні відносно змінної *x*:

5.1. $y' = \dfrac{1}{x\cos y + \sin 2y}$;

5.2. $(x - 2xy - y^2)y' + y^2 = 0;$

5.3. $y' = \dfrac{y}{2y\ln y + y - x}.$

6. [2, с.226] Знайти *y* з рівняння: $x\int\limits_0^x y dx = (x+1)\int\limits_0^x xy dx.$

7. [2, с.226] Нехай y_1 і y_2 – два різних розв’язки рівняння $y' + P(x)y = Q(x)$.

a) Довести, що $y = y_1 + C(y_2 - y_1)$ є загальним розв'язком цього ж рівняння (C- const).

b) При якому співвідношенні між сталими α і β лінійна комбінація $\alpha y_1 + \beta y_2$ буде розв'язком даного рівняння?

c) Довести, що якщо y_3 – третій частинний розв'язок, відмінний від y_1 і y_2, то відношення $\dfrac{y_2 - y_1}{y_3 - y_1}$ є стале.

8. [2, с.225; 11, с.42] Розв'язати рівняння Бернуллі:

8.1. $y'x + y = xy^2 \ln x$,

8.2. $y' + 2y \cdot \operatorname{tg} x = y^2 \operatorname{ctg} x$

8.3. $y' - \dfrac{3y}{x} + x^3 y^2 = 0$

8.4. $y' + 2xy = 2x^3 y^3.$

8.5. $2ydy = \left(x + y^2\right)dx$

8.6. $(y \ln x - 2)ydx = xdy.$

8.7. $y' = \dfrac{xy}{1 - x^2} + x\sqrt{y}$

8.8. $y - y' \cos x = y^2 \cos x(1 - \sin x).$

8.9. $y' + \dfrac{3}{x} y = \dfrac{1}{x^3} y^3$

9. [2, с.226] Розв'яжіть диференціальні рівняння:

9.1. $(x - 2xy - y^2)y' + y^2 = 0.$

9.2. $dy + (xy - xy^3)dx = 0.$

9.3. $(1 - x^2)y' - xy - axy^2 = 0.$

9.4. $y'(x^2 y^3 + xy) = 1.$

Практичне заняття №4

Тема: ***Диференціальні рівняння у повних диференціалах. Інтегрувальний множник.***

Контрольні запитання

1. *За якої умови рівняння $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$ є рівнянням у повних диференціалах? Який вигляд має його загальний інтеграл?*
2. *В чому суть методу інтегрувального множника? За якої умови існує інтегрувальний множник, що залежить від: а) заданої функції від x та y; б) лише від x; в) лише від y; г) від функції ω?*

Приклад 1. *Розв'язати диференціальне рівняння*

$$\left(\sin xy + xy\cos xy\right)dx + x^2\cos xy dy = 0.$$

І метод

☺ Покажемо, що задане диференціальне рівняння належить до класу рівнянь у повних диференціалах.

Дійсно,

$$P(x,y) = \sin xy + xy\cos xy, \quad Q(x,y) = x^2\cos xy.$$

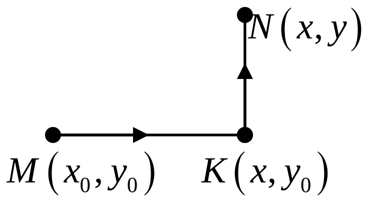
Звідси знаходимо:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = x\cos xy + x\cos xy - x^2 y\sin xy = 2x\cos xy - x^2\sin xy,$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = 2x\cos xy - x^2 y\sin xy.$$

Оскільки $\dfrac{\partial P}{\partial y} \equiv \dfrac{\partial Q}{\partial x}$ і функція $2x\cos xy - x^2 y\sin xy$ неперервна на всій площині, то задане рівняння є рівнянням у повних диференціалах. Його загальний розв'язок можна записати у вигляді криволінійного інтеграла

$$\int\limits_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} \left(P(x,y)dx + Q(x,y)dy\right) = C.$$



Обираємо шлях інтегрування у вигляді ламаної *MKN*, де $M(x_0,y_0)$, $K(x,y_0)$, $N(x,y)$, маємо:

$$\int\limits_{x_0}^{x} P(x,y_0)dx + \int\limits_{y_0}^{y} Q(x,y)dy = C.$$

В нашому випадку можна обрати $x_0 = 0, y_0 = 0$, тоді $P(x,0) = 0$, і загальний інтеграл набуває вигляд:

$$\int\limits_0^x 0dx + \int\limits_0^y x^2\cos xy dy = C \text{ або } x^2\int\limits_0^y \cos xy dy = C.$$

Виконавши інтегрування, отримаємо:

$$x\sin xy = C.$$

Якби за x_0, y_0 обрали інші значення площини, то отримана відповідь відрізнялась б лише виглядом константи. ☻

ІІ метод

☺ Позначимо $P(x,y) = \sin xy + xy\cos xy$, $\quad Q(x,y) = x^2\cos xy$.

Знаходимо:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = x\cos xy + x\cos xy - x^2 y\sin xy = 2x\cos xy - x^2\sin xy,$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = 2x\cos xy - x^2 y\sin xy.$$

Отже, $\frac{\partial P}{\partial y} \equiv \frac{\partial Q}{\partial x}$. А це є необхідна й достатня умова того, що вираз $(\sin xy + xy\cos xy)dx + x^2\cos xydy$ є повним диференціалом деякої функції $u(x, y)$. При цьому частинні похідні $\frac{\partial P}{\partial y}$, $\frac{\partial Q}{\partial x}$ є неперервними функціями.

Отже, щоб проінтегрувати задане диференціальне рівняння, слід знайти таку функцію, для якої ліва частина диференціального рівняння буде повним диференціалом. Нехай такою функцією буде $u(x, y)$, тоді

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial x} = \sin xy + xy\cos xy, \tag{1}$$

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial y} = x^2\cos xy. \tag{2}$$

Проінтегрувавши ліву і праву частини виразу (2) по y, вважаючи, що x стала, отримаємо:

$$u(x, y) = \int x^2\cos xydy = x\sin xy + \varphi(x), \tag{3}$$

де $\varphi(x)$ стала, яка може залежати від x, оскільки при інтегруванні вважали, що ця змінна x є стала і похідна по y від виразу, в який не входить y, дорівнює нулю.

Отже, функцію $u(x, y)$ знайшли з точністю до доданка, що містить лише x. Щоб знайти функцію $\varphi(x)$, використаємо вираз (*). Знайдемо $\frac{\partial u(x, y)}{\partial x}$, використавши (3):

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial x} = \left(x\sin xy + \varphi(x)\right)'_x = \sin xy + xy\cos xy + \varphi'(x).$$

Прирівняємо останній вираз до виразу (1), і знайдемо $\varphi'(x)$: $\varphi'(x) = 0$. Очевидно, що функція $\varphi(x)$ є сталою величиною. Приймемо, що довільна стала інтегрування рівна нулю, отримаємо:

$\varphi(x)=0$. Підставимо, знайдене значення $\varphi(x)$ в (3), отримаємо функцію $u(x,y)$:

$$u(x,y)=x\sin xy,$$

яка визначається з точністю до довільної сталої. Загальним інтегралом даного диференціального рівняння буде:

$$u(x,y)=C,$$

в нашій задачі

$$x\sin xy=C. \; ☻$$

Приклад 2. *Розв'язати диференціальне рівняння, знайшовши інтегрувальний множник* $(x\cos y-y\sin y)dy+(x\sin y+y\cos y)dx=0$.

☺ Перевіримо, чи належить задане диференціальне рівняння до класу рівнянь у повних диференціалах.

Позначимо

$$Q(x,y)=x\cos y-y\sin y, \quad P(x,y)=x\sin y+y\cos y.$$

Знаходимо:

$$\frac{\partial P}{\partial y}=x\cos y+\cos y-y\sin y, \quad \frac{\partial Q}{\partial x}=\cos y.$$

Оскільки $\frac{\partial P}{\partial y}\neq\frac{\partial Q}{\partial x}$, то задане рівняння не є рівнянням у повних диференціалах. Введемо такий інтегрувальний множник $\mu(x,y)$ так, щоб рівняння

$$\mu(x,y)Q(x,y)dy+\mu(x,y)P(x,y)dx=0 \tag{4}$$

стало рівнянням в повних диференціалах, тобто, щоб справджувалась рівність: $\frac{\partial(\mu(x,y)P(x,y))}{\partial y}=\frac{\partial(\mu(x,y)Q(x,y))}{\partial x}$. З рівняння (4) маємо $\frac{\partial\mu}{\partial y}P+\mu\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial\mu}{\partial x}Q+\mu\frac{\partial Q}{\partial x}$. За інтегрувальний множник візьмемо функцію, яка залежить лише від змінної x або від змінної y.

Покладемо, що $\mu=\mu(x)$, тоді $\frac{\partial\mu(x)}{\partial x}=\mu(x)\nu(x)$, де

$$\nu(x)=\frac{\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}}{Q(x,y)}=\frac{(x\cos y+\cos y-y\sin y)-\cos y}{x\cos y-y\sin y}=1,$$

звідси $\mu(x)=e^{\int\nu(x)dx}=e^{\int dx}=e^{x}$.

Поклавши, що $\mu = \mu(y)$, отримаємо: $\dfrac{\partial \mu(y)}{\partial y} = \mu(y) r(y)$, де

$$r(y) = \frac{\dfrac{\partial Q}{\partial x} - \dfrac{\partial P}{\partial y}}{P(x, y)} = \frac{\cos y - (x\cos y + \cos y - y\sin y)}{x\sin y + y\cos y} = \frac{y\sin y - x\cos y}{x\sin y + y\cos y},$$

звідси $\mu(y) = e^{\int r(y)dy}$.

Очевидно, що інтегрування функції $r(y)$ є досить складним, тому за інтегрувальний множник візьмемо функцію, що залежить лише від x, тобто $\mu(x) = e^x$.

Домножимо диференціальне рівняння на інтегрувальний множник $\mu(x) = e^x$, отримаємо:

$$e^x (x\cos y - y\sin y)dy + e^x (x\sin y + y\cos y)dx = 0. \tag{5}$$

Це рівняння є рівнянням у повних диференціалах.

Дійсно, позначимо

$$Q(x, y) = e^x (x\cos y - y\sin y), \quad P(x, y) = e^x (x\sin y + y\cos y).$$

Знаходимо:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = e^x (x\cos y + \cos y - y\sin y), \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = e^x (x\cos y - y\sin y + \cos y).$$

Як видно, $\dfrac{\partial P}{\partial y} \equiv \dfrac{\partial Q}{\partial x} = e^x (x\cos y - y\sin y + \cos y)$. А це є необхідна й достатня умова того, що вираз $e^x (x\cos y - y\sin y)dy + e^x (x\sin y + y\cos y)dx$ був повним диференціалом деякої функції $u(x, y)$. При цьому частинні похідні $\dfrac{\partial P}{\partial y}$ і $\dfrac{\partial Q}{\partial x}$ є неперервними функціями.

Отже, щоб проінтегрувати диференціальне рівняння (5), слід знайти таку функцію, для якої ліва частина диференціального рівняння буде повним диференціалом. Нехай такою функцією буде $u(x, y)$, тоді

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial x} = e^x (x\sin y + y\cos y), \tag{6}$$

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial y} = e^x (x\cos y - y\sin y). \tag{7}$$

Проінтегрувавши ліву і праву частини виразу (7) по x, вважаючи, що y стала, отримаємо:

$$
\begin{aligned}
u(x,y) &= \int e^x (x\sin y + y\cos y)dx = \\
&= \sin y \int xe^x dx + y\cos y \int e^x dx = \\
&= e^x\left(\left(x-1\right)\sin y + y\cos y\right) + \psi\left(y\right),
\end{aligned} \qquad (8)
$$

де $\psi\left(y\right)$ довільна стала. За довільну сталу взяли функцію від y, оскільки при інтегруванні вважали, що y є стала і похідна по x від виразу, в який не входить x, рівна нулю.

Отже, функцію $u(x,y)$ знайшли з точністю до доданка, що містить лише y. Щоб знайти функцію $\psi\left(y\right)$, використаємо вираз (7). Знайдемо $\dfrac{\partial u(x,y)}{\partial y}$, використавши (8):

$$
\frac{\partial u\left(x,y\right)}{\partial y} = \left(e^x(\left(x-1\right)\sin y + y\cos y) + \psi(y)\right)'_y = e^x(x\cos y - y\sin y) + \psi'\left(y\right).
$$

Прирівняємо останній вираз до виразу (7), і знайдемо $\psi'\left(y\right)$: $\psi'\left(y\right) = 0$. Очевидно, що функція $\psi\left(y\right)$ є сталою величиною. Приймемо, що довільна стала інтегрування рівна нулю, отримаємо: $\psi\left(y\right) = 0$. Підставимо, знайдене значення $\psi\left(y\right)$ у (8), отримаємо функцію $u(x,y)$:

$$
u(x,y) = e^x((x-1)\sin y + y\cos y),
$$

яка визначається з точністю до довільної сталої. Загальним інтегралом диференціального рівняння (5) буде:

$$
u(x,y) = C,
$$

в нашій задачі $\qquad e^x\left(\left(x-1\right)\sin y + y\cos y\right) = C$. ☻

Приклад 3. *Розв'язати диференціальне рівняння*

$$
\left(\sqrt{x^2 - y} + 2x\right)dx - dy = 0,
$$

якщо інтегрувальний множник $\mu = \mu\left(x^2 - y\right)$.

☺ Позначимо $\omega = x^2 - y$, тоді $\mu = \mu(\omega)$ і $\dfrac{\partial \mu(\omega)}{\partial \omega} = \mu(\omega)\psi(\omega)$, де

$$
\psi(\omega) \equiv \frac{\dfrac{\partial P}{\partial y} - \dfrac{\partial Q}{\partial x}}{Q\cdot\left(\dfrac{\partial \omega}{\partial x}\right) - P\cdot\left(\dfrac{\partial \omega}{\partial y}\right)}. \qquad (9)
$$

Оскільки

$$P(x,y)=\sqrt{x^2-y}+2x,\quad Q(x,y)=-1,\quad \omega=x^2-y,$$

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{-1}{2\sqrt{x^2-y}},\quad \frac{\partial Q}{\partial x}=0,\quad \frac{\partial \omega}{\partial x}=2x,\quad \frac{\partial \omega}{\partial y}=-1,$$

то $\dfrac{\dfrac{\partial P}{\partial y}-\dfrac{\partial Q}{\partial x}}{Q\cdot\left(\dfrac{\partial \omega}{\partial x}\right)-P\cdot\left(\dfrac{\partial \omega}{\partial y}\right)}=\dfrac{\dfrac{-1}{2\sqrt{x^2-y}}}{-2x+\left(\sqrt{x^2-y}+2x\right)}=-\dfrac{1}{2\left(x^2-y\right)}=-\dfrac{1}{2\omega}\equiv\psi(\omega)\cdot$

Тому $$\mu(\omega)=e^{\int\psi(\omega)d\omega}=e^{-\int\frac{1}{2\omega}d\omega}=\frac{1}{\sqrt{\omega}}=\frac{1}{\sqrt{x^2-y}}.$$

Помножимо диференціальне рівняння на інтегрувальний множник $\mu(\omega)=\dfrac{1}{\sqrt{\omega}}=\dfrac{1}{\sqrt{x^2-y}}$, отримаємо:

$$\frac{1}{\sqrt{x^2-y}}\left(\sqrt{x^2-y}+2x\right)dx-\frac{1}{\sqrt{x^2-y}}dy=0. \qquad (10)$$

Проінтегрувавши рівняння (10), знайдемо загальний інтеграл:

$$x+2\sqrt{x^2-y}=C.$$

В нашому прикладі $\mu=\mu\left(x^2-y\right)$ перетворюється в нуль в точках кривої $y=x^2$. Легко перевірити, що функція $y=x^2$ є розв'язком заданого диференціального рівняння, причому особливим. ☻

Завдання для самостійного розв'язання

1. [2, с.229; 11, с.53] Розв'язати рівняння у повних диференціалах:

1.1. $(2x-y)dx+(4y-x)dy=0$

1.2. $\left(2xy+3y^2\right)dx+\left(x^2+6xy-3y^2\right)dy=0$

1.3. $(x+y)dx+(2y+x)dy=0$

1.4. $\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{y^2}{(x-y)^2}\right)dx+\left(\dfrac{x^2}{(x-y)^2}-\dfrac{1}{y}\right)dy=0$

1.5. $(1-x^2)dy+x(y-a)dx=0$

1.6. $(\sin xy+xy\cos xy)dx+x^2\cos xydy=0$

1.7. $e^{-y}dx+\left(1-xe^{-y}\right)dy=0$

1.8. $(x\cos 2y+1)dx-x^2\sin 2y dy=0$

1.9. $\left(\dfrac{y^2}{(x-y)^2}-\dfrac{1}{x}\right)dx+\left(\dfrac{1}{y}-\dfrac{x^2}{(x-y)^2}\right)dy=0$

1.10. $\left(\dfrac{\sin 2x}{y}+x\right)dx+\left(y-\dfrac{\sin^2 x}{y^2}\right)dx=0$

1.11. $\left(\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{3y^2}{x^4}\right)dx=\dfrac{2ydy}{x^3}$

1.12. $\dfrac{y+\sin x\cos^2 xy}{\cos^2 xy}dx+\left(\dfrac{x}{\cos^2 xy}+\sin y\right)dy=0$

2. [2, с.229; 11, с.53] Розв'язати диференціальне рівняння, знайшовши інтегрувальний множник:

2.1 $(x^2-\sin^2 y)dx+x\sin 2y dy=0$

2.2. $x^2dy-(2xy+3)dx=0$

2.3. $(x\cos y-y\sin y)dy+(x\sin y+y\cos y)dx=0$

2.4. $2ydy=(x+y^2)dx$

2.5. $(xy-x^2)dy+(y^2-3xy-2x^2)dx=0$

2.6. $(x\cos y-y\sin y)dy+(x\sin y+y\cos y)dx=0$

3. [2, с.229; 11, с.53] Розв'язати диференціальні рівняння:

3.1. $x(2x^2+y^2)+y(x^2+2y^2)y'=0$

3.2. $\dfrac{xdx+(2x+y)dy}{(x+y)^2}=0$

3.3. $3x^2e^ydx+(x^3e^y-1)dy=0$

3.4. $\dfrac{2x(1-e^y)}{(1+x^2)^2}dx+\dfrac{e^y}{1+x^2}dy=0$

3.5. $\left(\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}\right)dx+\left(\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{x}{y^2}\right)dy=0$

3.6. $\left(\dfrac{xy}{\sqrt{1+x^2}}+2xy-\dfrac{y}{x}\right)dx+\left(\sqrt{1+x^2}+x^2-\ln x\right)dy=0$

3.7. $yx^{y-1}dx+x^y\ln x dy=0$

4. [2, с.229] Виділити інтегральні криві, які проходять через задані точки:

4.1. $\dfrac{x}{x^2+y^2}dy=\left(\dfrac{y}{x^2+y^2}-1\right)dx$ через точку $M(1;1)$

4.2. $\dfrac{2xdx}{y^3}+\dfrac{y^2-3x^2}{y^4}dy=0$ через точку $M(1;1)$

4.3. $3x^2e^y+\left(x^3e^y-1\right)y'=0$ через точку $M(0;1)$

4.4. $\dfrac{2x}{y^3}dx+\dfrac{y^2-3x^2}{y^4}dy=0$ через точку $M(1;1)$

4.5. $\dfrac{(x+2y)dx+ydy}{(x+y)^2}=0$ через точку $M(1;0)$

4.6. $(3x\sin y+1)dx=\left(\dfrac{3}{2}x^2\cos y+3\right)dy$ через точки $M(1;1)$ і $N(0;1)$

5. [2, с.230] Із сімейства інтегральних кривих диференційного рівняння $2x\cos^2 ydx+\left(2y-x^2\sin 2y\right)dy=0$ вибрати ту, яка проходить через початок координат.

6. [2, с.230] Проінтегрувати рівняння $ydx+xdy=0$ $(x>0, y>0)$ як рівняння в повних диференційних і як рівняння із змінними, які розділяються (не потенціюючи). Знайти залежність між інтегралами u і u_1.

7. [2, с.230] Довести, що якщо $Pdx+Qdy=0$ − однорідне рівняння, а вираз $Pdx+Qdy$ − повний диференціал, то загальний інтеграл даного рівняння має вигляд: $Pdx+Qdy=C$, якщо степені P і Q відмінні від -1.

8. [1, с.38] Розв’язати диференціальні рівняння методом інтегрувального множника, якщо відомо, що вони мають інтегрувальний множник як функцію $x+y$ або $x-y$.

8.1. $x(x+y)dx-y(x+y)dy=0$

8.2. $\left(x^2-y^2\right)dx+(x-y)^2dy=0$

8.3. $dx+xctg(x+y)(dx+dy)=0$

8.4. $\left(10x^3+y^2+9x^2y\right)dx+\left(7y^2+6xy+x^3\right)dy=0$

8.5. $x(x-y)dx-y(x-y)dy=0$

9. [1, с.39] Розв’язати диференціальні рівняння, якщо відомо, що вони мають інтегрувальні множники як функції добутку xy.

9.1. $y^2dx+(xy-1)dy=0$

9.2. $\left(2x^2y+x\right)y'-x^2y^3+2xy^2+y=0$

9.3. $\left(x^2y^3+y\right)dx+\left(x^3y^2-x\right)dy=0$

9.4. $\left(xy-\dfrac{y^2}{x}\cos\dfrac{y}{x}\right)dx+y\cos\dfrac{y}{x}dy=0$

10. [1, с.39] Розв’язати диференціальні рівняння, які мають інтегрувальні множники як функцію x^2+y^2 або x^2-y^2.

10.1. $\left(x^2+y^2+y\right)dx-xdy=0$ 10.3. $xdx+ydy+x(xdy-ydx)=0$

10.4. $4xy(xdy-ydx)=0$ 10.2. $\left(x^3+xy^2-y\right)dx+\left(y^3+x^2y+x\right)dy=0$

Практичне заняття № 5

Тема: ***Рівняння Ріккаті.***

Самостійна робота.

Контрольні запитання

1. *Який вигляд має рівняння Ріккаті? Чи можна довільно обирати початкові дані розв’язків цього рівняння? Чи гарантується існування розв’язків в усьому інтервалі неперервності коефіцієнтів рівняння? Як знайти загальний розв’язок рівняння Ріккаті, якщо відомий його один частинний розв’язок?*

Приклад 1. *Розв’язати рівняння* $y'=xy^2+x^2y-2x^3+1$ знаючи один з його розв’язків $y_1=x$.

☺ Це рівняння Ріккаті, оскільки воно має вигляд $y'=P(x)y^2+Q(x)y+R(x)$, де $P(x)=x$, $Q(x)=x^2$, $R(x)=-2x^3+1$. Зведемо це рівняння до рівняння Бернуллі, ввівши підстановку $y=y_1+z$, оскільки y_1 є один з частинних розв’язків заданого рівняння. В нашому випадку $y=x+z$. Тоді задане рівняння набуває вигляду:

$$(x+z)'=x(x+z)^2+x^2(x+z)-2x^3+1,$$

$$\text{або } 1+z'=x\left(x^2+2xz+z^2\right)+x^3+x^2z-2x^3+1,$$

звідки

$$z'=3x^2z+xz^2,\ \text{або}\ z'-3x^2z=xz^2. \quad (11)$$

Рівняння (11) є рівнянням Бернуллі. Загальний розв'язок рівняння Бернуллі (11):

$$z = -\frac{e^{x^3}}{\int xe^{x^3}dx}.$$

Повернувшись до підстановки, знаходимо y:

$$y = x + z = x - \frac{e^{x^3}}{\int xe^{x^3}dx}.$$ ☻

Завдання для самостійного розв'язання

1. [11, с.44] Знайти загальний розв'язок рівняння Ріккаті $y' = xy^2 + x^2y - 2x^3 + 1$, знаючи один з його частинних розв'язків $y_1 = x$.

2. [8, с.73] Розв'язати рівняння:

2.1. $\frac{dy}{dx} + y(y - x) = 1 \quad (y_1 = x)$

2.2. $\frac{dy}{dx} + y^2 = \frac{2}{x^2}$ (Зауваження: частинний розв'язок спробуйте шукати у вигляді $y_1 = \frac{k}{x}$.)

3. [1, с.44-45] Знайти розв'язки рівнянь, дібравши спочатку частинні розв'язки.

3.1. $x^2\frac{dy}{dx} - x^2y^2 + 5xy - 3 = 0$

3.2. $x^3\frac{dy}{dx} - y^2 - x^2y + x = 0$

3.3. $\frac{dy}{dx} + xy^2 + \frac{y}{x} - x^3 - 2 = 0$

3.4. $3xy' - 9y - y^2 = x^{\frac{2}{3}}$

3.5. $y' = y^2 - x^2 + 1$

3.6. $y' - y^2 - xy - x + 1 = 0$

3.7. $xy' - 5y - y^2 = x^2$

3.8. $\frac{dy}{dx} + y^2 = 2x^l$, якщо l=-2; -2/3; -4; -4/3

4. [1, с.45] Знайти загальні розв'язки рівнянь:

4.1. $(x - x^4)y' - x^2 - y + 2xy^2 = 0$, $y_1 = x^2$.

4.2. $\frac{dy}{dx} = y^2 + \frac{y}{x} + \frac{1}{x^2}$, $y_1 = -\frac{1}{x}$.

4.3. $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y^2-x^2y-2x}{1-x^2}$, y_1 функція вигляду ax^2.

4.4. $xy'-3y+y^2+4x-4x^2=0$, $y_1=2x$.

4.5. $x^2y'+(xy+2)^2=0$, y_1 функція вигляду $\dfrac{a}{x}$.

4.6. $x^2y'-x^2y^2+5xy-3=0$, $y_1(x)=\dfrac{1}{x}$.

Типові завдання самостійної роботи

1. Знайти загальний інтеграл диференціального рівняння
   $\sqrt{4+y^2}dx-ydy=x^2ydy$.
2. Знайти розв'язок однорідного диференціального рівняння
   $y'=\dfrac{3y-x-4}{3x+3}$.
3. Знайти розв'язок задачі Коші: $y'+y\cos x=\dfrac{1}{2}\sin 2x,\ \ y(0)=0$.
4. Знайти загальний інтеграл рівняння Бернуллі $y'-3x^2y=xy^2$.

Практичне заняття № 6

Тема: ***Математичне моделювання***

Вказівки щодо розв'язування задач за допомогою диференціальних рівнянь

Для роз'вязування геометричних задач варто використовувати рисунки, геометричний зміст похідної. Щоб розв'язати задачі даного типу потрібно:

1. Зробити рисунок і ввести позначення.
2. Виділити початкові умови. Спочатку, при складанні диференціального рівняння, їх не враховувати.
3. Виразити всі згадані в задачі величини через x, y, y'.
4. Скласти диференціальне рівняння сімейства шуканих кривих.
5. Знайти загальний розв'язок і, використавши початкові умови, знайти частинний розв'язок.

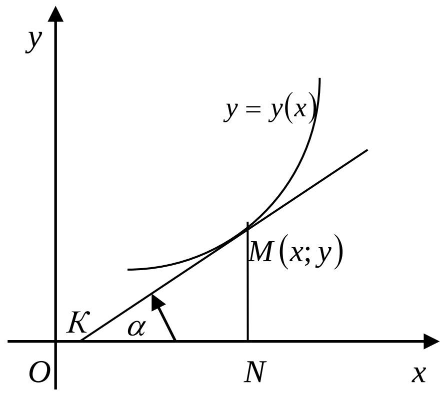
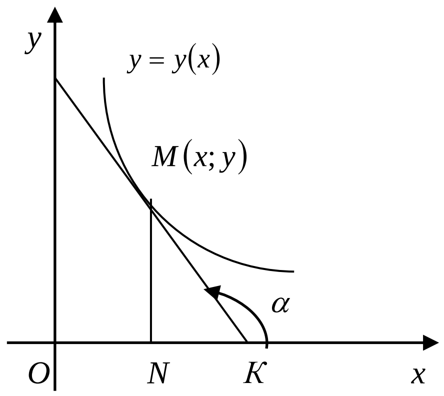
Розв'язання фізичної задачі повинно послідовно проходити в три етапи:

- складання диференціального рівняння;
- розв'язання цього рівняння;
- дослідження одержаного розв'язку.

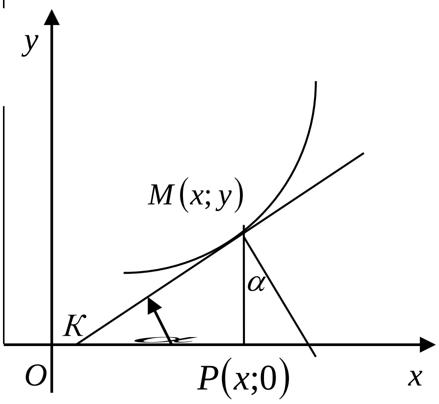
При цьому рекомендується наступна послідовність дій:

1. Встановити змінні величини в даному явищі і виявити фізичні закони, що зв'язують їх.
2. Вибрати незалежну змінну і функцію цієї шуканої змінної.
3. Виходячи з умов задачі, визначити початкові або краєві умови.
4. Виразити всі фігуруючі в умові задачі величини через незалежну змінну, шукану функцію і похідні цієї функції.
5. Виходячи з умов задачі і фізичного закону, який описує дане явище, скласти диференціальне рівняння.
6. Знайти загальний розв'язок або загальний інтеграл диференціального рівняння.
7. За початкових або краєвих умов знайти частинний розв'язок .
8. Дослідити одержаний розв'язок.

Приклад 1 (геометричного змісту) Знайти криві, для яких площа трикутника, що утворюється дотичною, ординатою точки дотику і віссю абсцис, є величина стала і дорівнює a^2.

Геометричний зміст	Математичний зміст
Крива – це така множина точок, що задовольняє певні характеристики та властивості. *Дотичною до кривої* у точці M_0 називається граничне положення січної, якщо точка M прямує вздовж кривої до злиття з точкою M_0. Точку M_0 називають точкою дотику. *Рівняння дотичної до кривої в точці* $M_0(x_0, y_0)$: $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$.  Рис. 1  Рис. 2 Нехай $y = y(x)$ – шукана крива, а $\triangle MNK$ утворений дотичною MK до кривої у точці дотику $M(x, y)$, ординатою MK точки дотику та віссю абсцис.	Рівняння дотичної набирає вигляду $Y - y = y'(x)(X - x)$, де (X, Y) – біжучі координати дотичної. Площа $\triangle MNK$ дорівнює півдобутку катетів: $S_{\triangle} = \frac{1}{2}\lvert NK\rvert \cdot \lvert MN\rvert$. Оскільки $\lvert MN\rvert = y$, $\lvert NK\rvert = \lvert MN\rvert \cdot \operatorname{ctg}\alpha = \frac{y}{\operatorname{tg}\alpha} =$ $= \frac{y}{y'}$, то $S_{\triangle} = \frac{y^2}{2y'}$, де $y' > 0$. За умовою площа трикутника стала і дорівнює a^2, то складемо і розв'яжемо диференціальне рівняння, яке є моделлю геометричної задачі: $$\frac{y^2}{2y'} = a^2, \text{ або } \frac{y^2}{2} = a^2 y'.$$ Вважаємо, що $y \neq 0$ і розділивши змінні, отримаємо $$\frac{2dy}{y^2} = \frac{dx}{a^2}.$$ Звідси знаходимо $$-\frac{2}{y} = \frac{x}{a^2} + C \text{ або } y = -\frac{2a^2}{Ca^2 + x}.$$ Якщо $y < 0$ (рис.2), то $S = -\frac{y^2}{2y'} = a^2$. Інтегруємо це рівняння і отримаємо $$y = \frac{2a^2}{x - Ca^2}.$$ Позначивши $Ca^2 = -\widetilde{C}$, об'єднаємо обидві відповіді в одну: $$y = \frac{2a^2}{C \pm x}.$$

Приклад 2. (геометричного змісту) Нормаль MQ до деякої кривої, перетинає вісь Ox в точці Q. Довести, що якщо абсциса точки Q вдвічі більша за абсцису точки M, то крива – рівнобічна гіпербола.

Геометричний зміст	Математичний зміст
Нормаллю до кривої у точці $M(x,y)$ називаєть-ся пряма, перпендикуляр-на до дотичної до кривої у цій точці.  	Нехай шукана крива задається рівнянням $y = y(x)$ і точка $M(x,y)$ є точкою дотику. Рівняння нормалі до цієї кривої у точці $M(x,y)$ набере вигляду: $$Y - y = -\frac{1}{y'(x)}(X - x),$$ де (X,Y) біжучі координати нормалі. Знайдемо координати точки Q перетину нормалі з віссю абсцис: $$Q:\begin{cases} Y = 0, \\ -y = -\frac{1}{y'(x)}(X - x), \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Y = 0, \\ X = x + yy'(x), \end{cases}$$ $Q(x + yy', 0)$. Згідно з умовою задачі абсциса точки Q вдвічі більша за абсцису точки M, отже складемо рівняння: $x + yy' = 2x$, (*). Із курсу аналітичної геометрії відомо, що канонічне рівняння гіперболи має один із видів: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ або $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$, причому, якщо $a = b$, то гіпербола називається рівнобічною. Очевидно, що друге співвідношення в (*) визначає два сімейства рівнобічних гіпербол (для $C > 0$ і для $C < 0$).

Приклад 3. (фізичного змісту) *Дзеркало відбиває всі промені, що виходять із заданої точки паралельно даному напрямку. Визначити форму дзеркала.*

Фізична модель	Математична модель

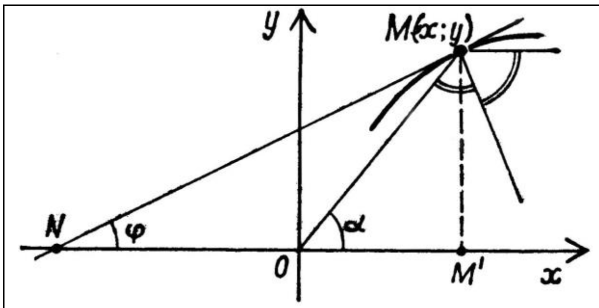
<table>
<tr>
<td>


Рис. 1.
$O(0;0)$ - джерело світла.
$M(x;y)$ - довільна точка дзеркала.
Площина перетину дзеркала проходить через вісь Ox і точку $M(x;y)$.
MN – дотична до дзеркала у вказаній площині, що проходить через точку $M(x;y)$.
Закон відбиття променів
Кут падіння променя дорівнює куту відбивання променя в точці падіння.
</td>
<td>
ΔNOM – рівнобедрений:
$|NO| = |OM|$ (рис. 1).
Тому
$$tg\varphi = \frac{|MM'|}{|NO| + |OM'|} =$$
$$= \frac{|MM'|}{\sqrt{|OM'|^2 + |MM'|^2} + |OM'|}. \quad (1)$$
Геометричний зміст похідної.
Тангенс кута нахилу дотичної до кривої в деякій точці дорівнює похідній функції в цій точці:
$$\mathrm{tg}\varphi = \frac{dy}{dx}, \quad (2)$$
де $|MM'| = y$, $|OM'| = x$.
</td>
</tr>
</table>

☺ Врахувавши формули (1) і (2), отримаємо диференціальне рівняння, що описує форму перетину дзеркала площиною xOy:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x + \sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Це однорідне рівняння і його можна розв’язати ввівши заміну $y = zx$.

Однак, простіше розв’язати його звівши до рівняння в повних диференціалах. Звільнимося від ірраціональності:

$$dy = \frac{y\left(x - \sqrt{x^2 + y^2}\right)}{x^2 - (x^2 + y^2)}dx,$$

$$xds + ydy = \sqrt{x^2 + y^2}dx.$$

Останнє рівняння зводиться до рівняння в повних диференціалах, якщо домножити ліву і праву частину на інтегруючий множник $m(x,y)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y_2}}$:

$$\frac{xdx+ydy}{\sqrt{x^2+y^2}}-dx=0,$$

$$\frac{d\left(x^2+y^2\right)}{2\sqrt{x^2+y^2}}-dx=0,$$

$$\sqrt{x^2+y^2}=x+C,$$

$$y^2=2Cx+C^2.$$

Отже, перетином дзеркала є парабола, а поверхня дзеркала являє собою параболоїд обертання. ☻

Приклад 4. (фізичного змісту) *Матеріальна точка М одиничної маси рухається на площині хОу, її притягує точка О(0;0) із силою, пропорційною відстані між точками М і О. Знайти залежність координат точки М від часу, якщо* $x(0)=x_0,\ \ y(0)=0,$ $x(0)=0,\ \ y(0)=v_0$, *і траєкторію цього руху.*

Фізична модель	Математична модель
$\vec{F}=m\cdot\vec{a}$ $F=-kx^2$ $F=-ky^2$ *ІІ закон Ньютона* Якщо на тіло діє кілька сил, то геометрична сума усіх зовнішніх сил дорівнює добутку маси тіла на прискорення, з яким рухається тіло під впливом усіх сил: $\vec{F}_1+\vec{F}_2+...+\vec{F}_n=m\vec{a}$. *Траєкторія* – лінія, вздовж якої рухається тіло. *Сила* – міра взаємодії тіл, частинок або частинок і поля	$\upsilon=\dfrac{dx}{dt}$; $a=\dfrac{d\upsilon}{dt}=\dfrac{d^2x}{dt^2}$; $\dfrac{d^2x}{dt^2}=-k^2x,$ $\dfrac{d^2y}{dt^2}=-k^2y.$.

Позначимо коефіцієнт пропорційності через k^2. Оскільки сила, яка діє на точку *M*, за напрямом збігається з вектором $\overrightarrow{MO}$, а за модулем $k^2|OM| = k^2\sqrt{x^2+y^2}$, то проекції сили на координатні осі Ox і Oy дорівнюють k^2x і k^2y відповідно. Згідно з другим законом Ньютона

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -k^2x, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = -k^2y.$$

Звідси $x = C_1\cos kt + C_2\sin kt, \quad y = C_3\cos kt + C_4\sin kt.$

Із початкових умов знаходимо сталі:

$$C_1 = x_0,\ C_2 = 0,\ C_3 = 0,\ C_4 = \frac{v_0}{k}.$$

Остаточно $\quad x = x_0\cos kt, \quad y = \dfrac{v_0}{k}\sin kt.$

Виключивши з цих рівностей незалежну змінну t, знаходимо

$$\left(\frac{x}{x_0}\right)^2 + \left(\frac{ky}{v_0}\right)^2 = 1,$$

тобто траєкторією руху точки M є еліпс.

1. [6, с.335] Розв’язати задачі геометричного змісту:

1.1. Знайти лінію, що проходить через точку $M_0(1;2)$, якщо відрізок будь-якої її дотичної, що знаходиться між осями координат, ділиться точкою дотику у відношенні $a:b = 1:1$ (рахуючи від осі Oy).

1.2. Лінія проходить через точку $M_0(1;6)$. В будь-якій точці М цієї лінії дотичний вектор $\overrightarrow{MN}$ з кінцем на осі Oy має проекцію на вісь Oy, рівну $a = 3$. Знайти рівняння цієї лінії.

1.3. Знайти лінію, що проходить через точку $M_0(1;1)$, якщо відрізок будь-якої нормалі, що знаходиться між осями координат, ділиться точкою лінії у відношенні $a:b = 1:2$ (рахуючи від осі Oy)

1.4. Знайти лінію, що проходить через точку $M_0(2;-1)$, якщо відрізок будь-якої її дотичної між точкою дотику і віссю Oy ділиться в точці перетину з віссю абсцисс у відношенні $a:b = 1:1$ (рахуючи від осі Oy)

1.5. Лінія проходить через точку $M_0(1;e)$. В будь-якій точці М цієї лінії дотичний вектор $\overrightarrow{MN}$ з кінцем на осі Ox має проекцію на вісь Ox, обернено пропорційну абсцисі точки М. Знайти рівняння цієї лінії, якщо коефіцієнт пропорційності $a=1/2$.

1.6. Записати рівняння кривої, що проходить через точку $A(0,2)$, якщо відомо, що кутовий коефіцієнт дотичної в будь-якій її точці дорівнює ординаті цієї точки, збільшеної в 3 рази.

1.7. Записати рівняння кривої, що проходить через точку $A(2,5)$, якщо відомо, що кутовий коефіцієнт дотичної в будь-якій її точці в 8 раз більше кутового коефіцієнта прямої, що з'єднує ту ж саму точку з початком координат.

1.8. Записати рівняння кривої, що проходить через точку $A(0,4)$, якщо відомо, що довжина відрізка, що відтинається на осі ординат нормаллю, що проведена в будь-якій точці кривої, дорівнює відстані від цієї точки до початку координат.

1.9. Записати рівняння кривої, що роходить через точку $A(2,3)$ і має наступну властивість: довжина перпендикуляра, проведеного з початку координат на дотичну до кривої, рівна абсцисі точки дотику.

2. [6, с.338] Розв'язати задачі фізичного змісту:

2.1 Прискорення локомотива прямо пропорційно силі тяги F і обернено пропорційно масі поїзда m. Початкова швидкість локомотива v_0, сила тяги $F=bk-v$, де v – швидкість; b, k – сталі. Знайти силу тяги локомотива через час t, якщо в початковий момент при t=0 $F=F_0=b-kv_0$. (Відповідь: $F=F_0e^{-kt/m}$)

2.2 Сталева проволока довжиною l і площею поперечного перерізу S розтягується із силою, значення якої постійно зростає до P. Знайти роботу сили розтягу проволоки, якщо видовження проволоки визначається за формулою $\Delta l=k\dfrac{P}{F}l_0$, де k – коефіцієнт видовження; l_0 - початкова довжина проволоки. (Відповідь: $A=\dfrac{kl_0}{2F}P^2$)

2.3 Моторний човен рухається по озеру зі швидкістю $v_0=20$ км/год. Через 40 с після вимикання мотора швидкість човна зменшилась до v_1=8 км/год. Визначіть швидкість човна через 2 хв після вимкнення мотора. (Сила опору води руху човна пропорційна її швидкості.) (Відповідь: 1,28 км/год)

2.4 Наповнена водою циліндрична посудина висотою H і площею дна S_1 має у дні отвір площею S_2. Визначіть час повного витікання води через отвір. (Швидкість витікання визначається за формулою $v = \sqrt{2gh}$, де h – висота шару води в даний момент часу; g – прискорення вільного падіння.) (Відповідь: $T = \frac{S_1}{S_2}\sqrt{\frac{2H}{g}}$)

2.5 5. Кінці канату ланцюгового мосту знаходяться на висоті $H = 5$ м, а його середина – на висоті $h = 4$ м від автостради моста. Довжина моста $2l$=20 т. Знайти криву прогину каната. (Відповідь: $y - 4 = x^2/100$)

2.6 В шматку гірської породи міститься 100 мг урана і 14 мгуранового свинцю. Визначити вік гірської породи, якщо відомо, що період напіврозпаду урану становить $4{,}5 \cdot 10^9$ років і при повному розпаді 238 г урану утворюється 206 г уранового свинцю. (Вважати, що в момент утворення гірська порода не містить свинцю, знехтувати наявність проміжних продуктів розпаду урану і свинцю, який розпадається набагато швидше.) (Відповідь: $975 \cdot 10^6$ років)

2.7 Маса ракети з повним запасом палива рівна M, без палива – m, швидкість витікання продуктів згорання з ракети - c, початкова швидкість ракети рівна нулю. Знайти швидкість ракети після згорання палива, нехтуючи силою її тяжіння і опором повітря. (Відповідь: $c\ln(M/m)$)

2.8 З висоти 18 м над рівнем Землі кинуто вертикально вгору тіло зі швидкістю 30 м/с. Знайти висоту, на якій тіло знаходилось в момент часу t, як функцію від часу. Визначіть найбільшу висоту підйому тіла. (Відповідь: $S = h = -\frac{1}{2}gt^2 + 30t + 18,\ h_{найб.} = 63{,}9\,\text{м}$)

2.9 Відомо, що швидкість охолодження тіла в повітрі пропорційна різниці температур тіла і повітря. Температура тіла протягом 20хв зменшується від 100 до 60 °C. Температура повітря рівна 20 °C. Визначіть час, за який температура тіла впаде до 25 °C. (Відповідь: 1 год 20 хв)

Практичне заняття № 7

Тема: ***Диференціальні рівняння не розв’язані відносно похідної. Найпростіші типи рівнянь не розв’язаних відносно похідної. Особливі розв’язки.***

Контрольні питання

1. *Як ставиться задача Коші для рівняння першого порядку, не розв’язаного відносно похідної?*
2. *Який вигляд має рівняння, квадратне відносно похідної? В якій області воно задано? Як знайти його загальний інтеграл? Які криві можуть бути особливими розв’язками?*
3. *Як визначити нахил інтегральної кривої рівняння першого порядку в заданій точці $(x_0; y_0)$ за виглядом рівняння? Чи може інтегральна крива рівняння першого порядку, розв’язаного відносно похідної, мати злам? Чи можуть інтегральні криві цього рівняння перетинатись між собою; дотикатись одна одної?*
4. *Який розв’язок називається особливим? Як він може бути пов'язаний із формулою загального розв’язку? Чому обвідна сімейства інтегральних кривих буде особливим розв’язком?*
5. *Як знайти криві, підозрілі на особливі розв’язки, за виглядом диференціального рівняння? В якому випадку рівняння не має особливих розв’язків? Як можна визначити криві, підозрілі на особливий розв’язок, в процесі інтегрування даного диференціального рівняння? Чи може диференціальне рівняння мати розв’язок, який не є ні частинним, ні особливим?*
6. *Чи може лінійне рівняння мати особливий розв’язок? Коли розв’язок y=0 є частинним, коли особливим розв’язком рівняння Бернуллі? Чи може рівняння Ріккаті мати особливі розв’язки?*

Приклад 1. *Проінтегрувати рівняння* $x = y'\sin y' + \cos y'$.

☺ Це рівняння, що не розв’язане відносно похідної. Воно містить лише змінну *x*. Розв’язок будемо шукати в параметричній формі. За параметр *p* візьмемо похідну *y* по *x*: $p = y'$. Тоді $x = p\sin p + \cos p$. Отже, *x* вже задано параметрично. Залишається задати параметрично *y*. Для цього продиференціюємо останню рівність:

$$dx = \left(p\sin p + \cos p\right)_p' dp,$$

$$dx = (\sin p + p\cos p - \sin p)dp\,.$$

$$dx = p\cos p dp$$

і підставимо це значення dx в рівність $p = y'$ або $dy = pdx$:

$$dy = p^2 \cos p dp\,,$$

тобто

$$y = \int p^2 \cos p dp = \left(p^2 - 2\right)\sin p + 2p\cos p + C\,.$$

Отже, загальний розв'язок в параметричній формі має вигляд

$$\begin{cases} x = p\sin p + \cos p, \\ y = \left(p^2 - 2\right)\sin p + 2p\cos p + C. \end{cases}$$ ☻

Приклад 2. *Проінтегрувати рівняння* $y = (y')^2 + 2y'$.

☺ Це рівняння, що не розв'язане відносно похідної. Воно містить лише змінну *y*. Розв'язок будемо шукати в параметричній формі. За параметр *p* візьмемо похідну *y* по *x*: $p = y'$. Тоді $y = p^2 + 2p$. Задамо параметрично *x*. Для цього продиференціюємо останню рівність:

$$dy = 2(p+1)dp$$

і підставимо це значення dy в рівність $p = y'$ або $dx = \dfrac{dy}{p}$:

$$dx = \frac{2(p+1)}{p}dp\,,$$

тобто

$$x = 2\int \frac{p+1}{p}dp = 2\int\left(1 + \frac{1}{p}\right)dp = 2(p + \ln p) + C\,.$$

Отже, загальний розв'язок в параметричній формі має вигляд

$$\begin{cases} x = 2(p + \ln p) + C, \\ y = p^2 + 2p. \end{cases}$$ ☻

Приклад 3. *Проінтегрувати рівняння* $xy'\left(xy' + y\right) = 2y^2$.

☺ Це рівняння, що не розв'язане відносно похідної. Спочатку зробимо деякі перетворення

$$x^2 y'^2 + xyy' - 2y^2 = 0\,.$$

Це квадратне рівняння відносно y', де коефіцієнти $a = x^2, b = xy, c = -2y^2$. Знайдемо дискримінант цього рівняння:

$$D = b^2 - 4ac = (xy)^2 - 4 \cdot x^2 \cdot \left(-2y^2\right) = 9x^2y^2.$$

Тоді

$$(y')_{1,2} = \frac{-xy \pm 3xy}{2x^2},$$

звідси

$$\left[\begin{array}{l} y' = \dfrac{y}{x}, \\ y' = \dfrac{-2y}{x}; \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} \dfrac{dy}{y} = \dfrac{dx}{x}, \\ \dfrac{dy}{y} = -2\dfrac{dx}{x}; \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} \ln|y| = \ln|x| + \ln|C|, \\ \ln|y| = -2\ln|x| + \ln|C|; \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} y = Cx, \\ y = \dfrac{C}{x^2}. \end{array}\right.$$

Отже маємо два розв'язки диференціального рівняння. ☻

Приклад 4. *Розв'язати рівняння не розв'язане відносно похідної* $y^2 + (y')^2 = 1$ (1).

☺ Розв'язок будемо шукати в параметричній формі. Покладемо $y = \sin p$, тоді $y' = \cos p$. Ця підстановка задовольняє рівність (1): $(\sin p)^2 + (\cos p)^2 \equiv 1$. Задамо параметрично *x*. Для цього продиференціюємо рівність $y = \sin p$:

$$dy = \cos p dp$$

і підставимо це значення dy в рівність $p = y'$ або $dx = \dfrac{dy}{p}$:

$$dx = \frac{\cos p}{p} dp,$$

тобто

$$x = \int \frac{\cos p}{p} dp.$$

Отже, загальний розв'язок в параметричній формі має вигляд

$$\begin{cases} x = \displaystyle\int \frac{\cos p}{p} dp, \\ y = \sin p. \end{cases}$$

Приклад 5. *Знайти особливий розв'язок рівняння, якщо він існує* $y' = \sqrt[3]{y^2} + 1$.

☺ Права частина неперервна, але $f'_y(x;y)=\dfrac{2}{3\sqrt[3]{y}}$ не обмежена в околі $(x_0;0)$, значить, можливо існує особливий розв'язок $y=0$. Але $y=0$, очевидно, не є розв'язком рівняння. Значить, задане рівняння особливого розв'язку не має. ☻

Приклад 6. *Знайти особливий розв'язок рівняння* $y'=\sqrt[3]{(y-2x)^2}+2$.

☺ Права частина рівняння неперервна, але частинна похідна по y

$$\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{2}{3\sqrt[3]{y-2x}}$$

перетворюється в нескінченність в точках на прямій $y=2x$. Легко перевірити, що ця пряма інтегральна. Залишається перевірити, що розв'язок $y=2x$ є особливим. Для цього розв'яжемо диференціальне рівняння.

Використаємо підстановку $y-2x=z$, отримаємо:

$$\frac{dz}{dx}=\sqrt[3]{z^2}, \qquad \frac{dz}{z^{\frac{2}{3}}}=dx.$$

Звідси

$$x+C=3\sqrt[3]{z}.$$

Повернувшись до старих змінних, отримаємо:

$$27(y-2x)=(x+C)^3.$$

Легко перевірити, що криві цього сімейства дотикаються прямої $y=2x$ при $x_0=-C$. Отже, в кожній точці інтегральної кривої порушується єдиність. Значить, $y=2x$ – особливий розв'язок. ☻

Завдання для самостійного розв'язання

1. [11, с.60] Розв'язати рівняння, не розв'язані відносно похідної:

1.1. $(y')^2+yy'-x^2-xy=0$

1.2. $x=\ln y'+\sin y'$

1.3. $x=y'+\sin y'$

1.4. $y=(y')^2+2y'$

1.5. $y\sqrt{y'-1}=2-y'$

1.6. $(y')^2+y^2-1=0$

1.33. $x^3y'-(1-y')^3=0$

1.34. $y=y'^2+2xy'+\frac{1}{2}x^2$

1.35. $y^{\frac{2}{3}}+(y')^{\frac{2}{3}}=1$

1.37. $x=e^{y'}+y'$

1.38. $y'^3+y'^2-y'+1=0$

1.7. $y^{\frac{2}{5}} + (y')^{\frac{2}{5}} = a^{\frac{2}{5}}$
1.8. $x = y' + \ln y'$
1.9. $y^4 - (y')^4 - y(y')^2 = 0$
1.10. $x\sqrt{1 + (y')^2} = y'$
1.11. $x(y')^2 - 2yy' + 4x = 0$
1.12. $x = (y')^2 - 2y' + 2$
1.13. $y = y' \ln y'$
1.14. $x(y')^2 = e^{\frac{1}{y'}}$
1.15. $y = x^2 + 2xy' + \frac{1}{2}(y')^2$
1.16. $x(y')^2 + 2xy' - y = 0$
1.17. $x(y')^3 = 1 + y'$
1.18. $y = y'(1 + y' \cos y')$
1.19. $y\sqrt{1 + (y')^2} = y'$
1.20. $y(y')^2 + 2xy' - y = 0$
1.21. $y(y')^2 + (x - y)y' - x = 0$
1.22. $x(1 + (y')^3)^{\frac{3}{2}} = a$
1.23. $x(y - xy')^2 = xy'^2 - 2yy'$.
1.24. $y = (y')^2 e^{y'}$
1.25. $x = y' \sin y' + \cos y'$
1.26. $yy'(yy' - 2x) = x^2 - 2y^2$.
1.27. $x(1 + (y')^2) = 1$
1.28. $(y')^2 + xy' - x^2 = 0$
1.29. $y' = arctg \dfrac{y}{(y')^2}$
1.30. $y'^2 + 4xy' - y^2 - 2x^2 y = x^4 - 4x^2$.
1.31. $xy'^2 - 2yy' + x = 0$.
1.32. $y'^2 - 2xy' = x^2 - 4y$.
1.39. $y = x(y')^2 - y'^2$
1.40. $y'^2 + xy = y^2 + xy'$.
1.41. $xy'(xy' + y) = 2y^2$.
1.42. $xy'^2 = y(2y' - 1)$.
1.43. $y'^2 + x = 2y$.
1.44. $y'^3 + (x + 2)e^y = 0$.
1.45. $y'^2 - 2xy' = 8x^2$.
1.46. $(xy' + 3y)^2 = 7x$.
1.47. $y'^2 - 2yy' = y^2(e^x - 1)$.
1.48. $y'(2y - y') = y^2 \sin^2 x$.
1.49. $y'^4 + y^2 = y^4$.
1.50. $x - y' \sin y' = 0$
1.51. $y(xy' - y)^2 = y - 2xy'$.
1.52. $y' = e^{\frac{y'}{y}}$
1.53. $y = y' + \ln y'$
1.54. $y(y - 2xy')^2 = 2y'$.
1.55. $x = y'^3 + y'$.
1.56. $x(y'^2 - 1) = 2y'$.
1.57. $x = y'\sqrt{y'^2 + 1}$.
1.58. $y'(x - \ln y') = 1$.
1.59. $y = y'^2 + 2y'^3$.
1.60. $y = \ln(1 + y'^2)$.
1.61. $(y' + 1)^3 = (y' - y)^2$.
1.62. $y = (y' - 1)e^{y'}$.
1.63. $y'^4 - y'^2 = y^2$.
1.64. $y'^2 - y'^3 = y^2$.
1.65. $y'^4 = 2yy' + y^2$.
1.66. $y(1 + (y')^2) = a$,

підстановка $y' = tg\varphi$

2. Знайти всі розв'язки даних рівнянь; виділити особливі розв'язки (якщо вони є); зробити схематичний малюнок.

2.1. $y'^2 - y^2 = 0.$

2.2. $8y'^3 = 27y.$

2.3. $(y'+1)^3 = 27(x+y)^2.$

2.4. $y^2(y'^2+1) = 1.$

2.5. $y'^2 - 4y^3 = 0.$

2.6. $y'^2 = 4y^3(1-y).$

2.7. $xy'^2 = y.$

2.8. $yy'^3 + x = 1.$

2.9. $y'^3 + y^2 = yy'(y'+1).$

2.10. $4(1-y) = (3y-2)^2 y'^2.$

3. [2, с.248] Знайти особливі точки диференціальних рівнянь:

3.1. $y' = \dfrac{x+3y-5}{x-2y}$

3.2. $y' = \dfrac{x^2+y^2-13}{xy-6}$

3.3. $y' = \dfrac{x^3+y^3-28}{x+y-4}$

3.4. $y' = \dfrac{x+y-5}{x^2-xy+y^2-7}$

3.5. $y' = \dfrac{x^4+y^4-97}{x+y-5}$

3.6. $y' = \dfrac{x^2-xy+y^2-19}{x-xy+y-7}$

3.7. $y' = \dfrac{x+y+\sqrt{xy}-14}{x^2+y^2+xy-84}$

4. [2, с.250] Знайти особливі розв’язки дифференціальних рівнянь, знаючи їх загальний розв’язок:

4.1. $(y'+1)^3 = 27(x+y)^2,$ $\qquad x+y = (x+C)^3$

4.2. $y'^2 = 4y^3(1-y),$ $\qquad y + y(x-C)^2 = 1$

4.3. $2yy' = x(y'^2+4),$ $\qquad y = Cx^2 + \dfrac{1}{C}$

4.4. $y = xy' + \dfrac{a}{2y'}\ (a>0,)$ $\qquad y = Cx + \dfrac{a}{2C}, C \neq 0.$

4.5. $y = xy' - y'^2,$ $\qquad y = Cx - C^2.$

4.6. $y = xy' + \sqrt{1-y'^2},$ $\qquad y = Cx + \sqrt{1-C^2}.$

5. [2, с.251] З’ясувати ,чи мають наступні рівняння особливі розв’язки:

5.1. $y' = \sqrt[3]{x-5y} + 2$

5.2. $y = 5xy' - y'^2$

6. [2, с.251; 1, с.60] Знайти загальні і особливі розв'язки рівнянь:

6.1. $y = xy' + \sqrt{-ay'}$.

6.2. $y'^2(2-3y)^2 = 4(1-y)$.

6.3. $y = xy' - a\sqrt{1-y'^2}$.

6.4. $xy'^2 - 2yy' + 4x = 0$.

6.5. $yy'^2 - (xy+1)y' + x = 0$

6.6. $y'^2 - \frac{2y}{x}y' + 1 = 0$.

6.7. $xy'^2 + 2xy' - y = 0$

6.8. $4xy'^2 + 4yy' - 1 = 0$

6.9. $xy'^2 - 2xy' + 1 = 0$

6.10. $y'^2 + 2xy' - y = 0$

6.11. $y'^2 + y^2 - 1 = 0$

6.12. $xy'^2 - 2yy' + 4x = 0$

6.13. $4y'^2(x-2) = 1$

6.14. $4y'^2 - 9x = 0$

6.15. $y'^2 - yy' + e^x = 0$

6.16. $xy'^2 - 2yy' + 4x = 0$

6.17. $y^2(y'-1) = (2-y')^2$

6.18. $y^2y'^2 - 2xyy' + 2y^2 - x^2 = 0$.

6.19. $y'^2 - yy' + e^x = 0$.

6.20. $y^2(y'-1) = (2-y')^2$.

6.21. $yy'^2 = 1$.

6.22. $(xy'+y)^2 = y^2y'$.

6.23. $y^2 - 2xyy' + (1+x^2)y'^2 = 1$.

6.24. $y = xy' + y'\ln y'$.

6.25. $y = xy' + 1/y'$.

7. [1, с.60] Знайти особливі розв'язки рівнянь, не знаходячи загальні:

7.1. $y'^2(x^2-4) - 2xyy' - x^2 = 0$

7.2. $y - 2xy' - y'^2 = 0$

7.3. $y^2y'^2 - \frac{y^3y'}{x} + 4 = 0$

7.4. $x + yy' = ay'^2$

7.5. $yy'^2 + y'(x-y) = x$

7.6. $y'^3 - 4xyy' + 8y^2 = 0$

7.7. $xy'^2 - 2yy' + 4x = 0$

Практичне заняття № 8

Тема: ***Рівняння Лагранжа, Клеро.***

Контрольні запитання

1. *Який вигляд має рівняння Лагранжа? Як знайти його загальний розв'язок в параметричній формі? Які криві можуть бути особливими розв'язками?*

2. *Який вигляд має рівняння Клеро? Чим воно відрізняється від рівняння Лагранжа? Як записати його загальний розв'язок за виглядом рівняння? Як знайти його особливий розв'язок?*

Приклад 1. *Проінтегрувати рівняння* $y = xy' - e^{y'}$.

☺ Це рівняння Клеро (рівняння виду $y = xy' + \varphi(y')$; в даному випадку $\varphi(y') = -e^{y'}$). Покладемо $p = y'$ і перепишемо рівняння у вигляді $y = px - e^p$. Продиференціюємо його: $dy = pdx + xdp - e^p dp$; але $dy = pdx$, тому останнє рівняння набуває вигляду $xdp - e^p dp = 0$, або $\left(x - e^p\right)dp = 0$. Отже, або $dp = 0$, або $x = e^p$. Якщо покласти $dp = 0$, то $p=C$; підставивши це значення в рівність $y = px - e^p$, отримаємо загальний розв'язок даного рівняння:

$$y = Cx - e^C.$$

Якщо покласти $x = e^p$, то $y = (p-1)e^p$, і отримаємо особливий розв'язок заданого рівняння

$$\begin{cases} y = (p-1)e^p, \\ x = e^p. \end{cases}$$

Виключивши параметр p (в даному випадку $p = \ln x$), знаходимо особливий розв'язок в явному вигляді:

$$y = x(\ln x - 1).$$

Перевіримо, що сукупність прямих, що визначаються загальним розв'язком, є сімейство дотичних до особливої інтегральної кривої.

Продиференціюємо особливий розв'язок, знайдемо $y' = \ln x$. Рівняння дотичної до особливої інтегральної кривої в точці $M(x_0; y_0)$ (де $y_0 = x_0(\ln x_0 - 1)$) запишеться у вигляді

$$y - y_0 = y_0'(x - x_0),$$

або

$$y - x_0(\ln x_0 - 1) = \ln x_0 (x - x_0),$$

що після спрощення дає $y = \ln x_0 - x_0$. Якщо покласти $\ln x_0 = C$, то рівняння сімейства дотичних до особливої інтегральної кривої набуде вигляд $y = Cx - e^C$,що і треба було перевірити. ☻

Приклад 2. *Проінтегрувати рівняння* $y = xy'^2 + y'^2$.

☺ Це – рівняння Лагранжа (рівняння типу $P(y')x + Q(y')y + R(y') = 0$; в даному випадку $P(y') = y'^2$, $Q(y') = -1$, $R(y') = y'^2$). Покладемо $p = y'$ і перепишемо рівняння у вигляді $y = p^2 x + p^2$ (2). Продиференціюємо його: $dy = p^2 dx + 2pxdp + 2pdp$; але $dy = pdx$, тому останнє рівняння набуває вигляду

$$pdx = p^2 dx + 2pxdp + 2pdp,$$

звідси скоротивши на p, отримаємо рівняння з відокремлюваними змінними

$$(1-p)dx = 2(x+1)dp, \text{ або } \frac{dx}{x+1} = \frac{2dp}{1-p}.$$

Проінтегрувавши його, знаходимо

$$\ln(x+1) = -2\ln|1-p| + \ln C,\; x+1 = \frac{C}{(p-1)^2}.$$

Використавши рівняння (2), отримаємо

$$y = \frac{Cp^2}{1-p^2}.$$

При діленні на p могла статися втрата особливого розв’язку; прийнявши p=0, знаходимо $y' = 0$, $y = 0$. Це - особливий розв’язок.

Отже

$$\begin{cases} x = \dfrac{C}{(p-1)^2} - 1, \\ y = \dfrac{Cp^2}{1-p^2} \end{cases} \text{ - загальний розв’язок;}$$

$y = 0$ - особливий розв’язок. ☻

Завдання для самостійного розв’язання

1. [11, с.64] Розв’язати рівняння Лагранжа та Клеро:

1.1. $y = xy' + \sqrt{1+(y')^2}$

1.2. $y = x(y')^2 - y'$

1.3. $y = xy' - (y')^2$

1.4. $y = (y')^2 + xy'$

1.8. $y = xy' + \sqrt{1+(y')^2}$

1.9. $xy' = y + x\sqrt{1+(y')^2}$

1.10. $y = 2px + \sqrt{1+p^2}$, $p = y'$

1.11. $y = p(1+x) - p^2$, $p = y'$

1.5. $y=(1+y')x+(y')^2$

1.6. $xy'-y-y'-(y')^2=0$

1.7. $y=xy'+\dfrac{ay'}{\sqrt{1+(y')^2}}$

1.12. $xy'+\arcsin y'=y$

1.13. $y=xy'-\dfrac{1}{2}(y')^2$

Практичне заняття № 9
Контрольна робота

Типові завдання контрольної роботи

1. Знайти загальний інтеграл диференціального рівняння в повних диференціалах $(3x^2+4y^2)dx+(8xy+e^y)dy=0$.

2. Знайти загальний розв'язок рівняння Ріккаті $y'=xy^2+x^2y-2x^3+1$, знаючи один з його частинних розв'язків $y_1=x$.

3. Знайти загальний і особливий розв'язок рівняння $y=xy'+\dfrac{1}{y'}$.

4. Знайти загальний інтеграл диференціального рівняння $x=\ln y'+\sin y'$.

5. Визначити тип рівняння (рівняння Лагранжа або Клеро) та знайти його розв'язок: $y=xy'+\sqrt{1+(y')^2}$.

6. Знайти лінію, що проходить через точку $M_0(1;2)$, якщо відрізок будь-якої її дотичної, що знаходиться між осями координат, ділиться точкою дотику у відношенні $a:b=1:1$ (рахуючи від осі Oy).

Домашня контрольна робота
Наближені методи розв'язування задачі Коші

Розв'язування задачі Коші за допомогою формули Тейлора

Приклад 1. *Знайти розв'язок задачі Коші* $y'=2x-y$, $y(0)=2$, *розвинувши функцію* $y(x)$ *в степеневий ряд, використавши формулу Тейлора:*

☺ Знайдемо розв'язок задачі Коші, розвинувши функцію $y(x)$ в степеневий ряд, використавши формулу Тейлора:

$$y(x)\approx y(x_0)+\frac{y'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{y''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\frac{y'''(x_0)}{3!}(x-x_0)^3+\ldots+\frac{y^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\ldots .\quad(1)$$

Згідно умови $y(0)=2$, тоді

$$y'=2x-y \Rightarrow y'(0)=2\cdot 0-2=-2$$
$$y''=2-y' \Rightarrow y''(0)=2-(-2)=4$$
$$y'''=-y'' \Rightarrow y'''(0)=-4$$
$$y^{IV}=-y''' \Rightarrow y^{IV}(0)=4$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$y^{(n)}=-y^{(n-1)} \Rightarrow y^{(n)}(0)=4\cdot(-1)^n$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Підставивши, знайдені значення похідних функції y в точці $x_0=0$ в формулу (1), отримаємо розв'язок задачі Коші:

$$y(x)\approx y(0)+\frac{y'(0)}{1!}x+\frac{y''(0)}{2!}x^2+\frac{y'''(0)}{3!}x^3+\frac{y^{IV}(0)}{4!}x^4+\ldots++\frac{y^{(n)}(0)}{n!}x^n+\ldots=$$
$$=2-2x+\frac{4}{2!}x^2+\frac{4}{3!}x^3+\frac{4}{4!}x^4+\ldots+\frac{4(-1)^n}{n!}x^n+\ldots=$$
$$=-2+2x+4(1-x+\frac{x^2}{2!}-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}-\ldots+(-1)^n\frac{x^n}{n!}+\ldots)=2x-2+4e^{-x}.$$ ☻

Приклад 2. *Знайти п'ять перших відмінних від нуля членів розвинення в степеневий ряд розв'язку задачі Коші:* $y'=y+\ln x$, $y(1)=1$

☺ Згідно умови $x_0=1$ та $y(1)=1$, тоді

$$y'(x)=y+\ln x \Rightarrow y'(1)=1+\ln 1=1,$$
$$y''(x)=y'+\frac{1}{x} \Rightarrow y''(1)=1+\frac{1}{1}=2,$$
$$y'''(x)=y''-\frac{1}{x^2} \Rightarrow y'''(1)=1,$$
$$y^{IV}(x)=y'''+\frac{2}{x^3} \Rightarrow y^{IV}(1)=3,$$
$$y^{V}(x)=y^{IV}-\frac{6}{x^4} \Rightarrow y^{V}(1)=-3.$$

Підставивши, знайдені значення похідних функції y в точці $x_0=0$ у формулу (1), отримаємо:

$$y(x)\approx 1+(x-1)+(x-1)^2+\frac{(x-1)^3}{3!}+\frac{3}{4!}(x-1)^4-\frac{3}{5!}(x-1)^5.$$ ☻

Розв'язування задачі Коші методом послідовних наближень Пікара

Приклад 3. *Розв'язати задачу Коші методом послідовних наближень Пікара:* $y' = 2x - y,\ y(0) = 2$.

☺ Задане рівняння є ЛНДР 1-го порядку. Загальний розв'язок рівняння: $y_{з.н.} = 2x - 2 + Ce^{-x}$. Частинний розв'язок , що задовольняє початковій умові: $y_{ч.н.} = 2x - 2 + 4e^{-x}$.

Такий же результат можна отримати, використовуючи метод послідовних наближень Пікара.

Робоча формула:

$$\boxed{y_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f\left(t, y_{n-1}(t)\right)dt \text{, де } y_0 = y(x_0) \quad (2)}$$

Знаходимо:

$$y_0(x) = y(0) = 2x - 2 + 4 - 4x + 2x = 2x - 2 + 4(1 - x) + 2x,$$

$$y_1(x) = 2 + \int_0^x f(t, y_0(t))dt = 2 + \int_0^x (2t - 2)dt =$$

$$= 2 + x^2 - 2x = 2x - 2 - 4x + 4 + x^2 = 2x - 2 + 4(1 - x + \frac{x^2}{2!}),$$

$$y_2(x) = 2 + \int_0^x (2t - 2 - t^2 + 2t)dt =$$

$$= 2 + t^2 - 2t - \frac{t^3}{3}\Bigg|_0^x = 2 + 2x^2 - 2x - \frac{x^3}{3} =$$

$$= 2x - 2 - 4x + 4 + 4\frac{x^2}{2!} - 4\frac{x^3}{3!} + \frac{x^3}{3} = 2x - 2 + 4(1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!}) + \frac{x^3}{3},$$

$$y_3(x) = 2 + \int_0^x (2t - 2 - 2t^2 + 2t + \frac{t^3}{3})dt =$$

$$= 2 - 2x - 2\frac{x^3}{3!} + 2x^2 + \frac{x^4}{12} = 2x - 2 + 4 - 4x + 4\frac{x^2}{2!} - 4\frac{x^3}{3!} + 4\frac{x^4}{4!} - \frac{x^4}{12} =$$

$$= 2x - 2 + 4(1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!}) - \frac{x^4}{12},$$

……………..

$$y_n(x) = 2x - 2 + 4e^{-x} + \frac{2\cdot(-1)^n \cdot x^{n+1}}{(n+1)!},$$

де залишковий член $\frac{2(-1)^n x^{x+1}}{(n+1)!} \underset{n\to\infty}{\to} 0$.

Отже, $y_{ч.н.} = \lim\limits_{n\to\infty} y_n = 2x - 2 + 4e^{-x}$. ☻

Метод ламаних Ейлера

Нехай маємо задачу Коші: $\begin{cases} y' = f(x;y) \\ y(x_0) = y_{0,} \end{cases}$ $x \in [a;b]$.

Функція $f(x;y)$ *задана і неперервна на області* D.

Наближенні значення шуканого розв'язку $y = y(x)$ *на відрізку* $[x_0;x]$ *послідовно обчислюють за формулою*

$$\boxed{y_{k+1} = y_k + f(x_k;y_k)\cdot h \quad (3)}$$

де $y_k = y(x_k)$, $x_{k+1} = x_k + h$, $h = \frac{x - x_0}{n}$, $k = 0,1,2,...,n-1$.

Якщо задано граничну абсолютну похибку ε, *то крок обчислень* h *встановлюється на основі нерівності* $h^2 < \varepsilon$.

Приклад 4. *За допомогою методу ламаних Ейлера знайти наближений розв'язок задачі Коші:*

$y' = x^2 + y^2$, $[0;1]$, $y(0) = 1$, $h = 0,1$

☺ Згідно умови $y' = f(x;y) = x^2 + y^2$, $y_0 = y(0) = 1$, тоді згідно з формулою (3), знаходимо:

$$y_1 = y_0 + f(x_0;y_0)(x_1 - x_0) = 1 + y^{/}(0,1)\cdot 0,1 = 1 + 0,1 = 1,1;$$

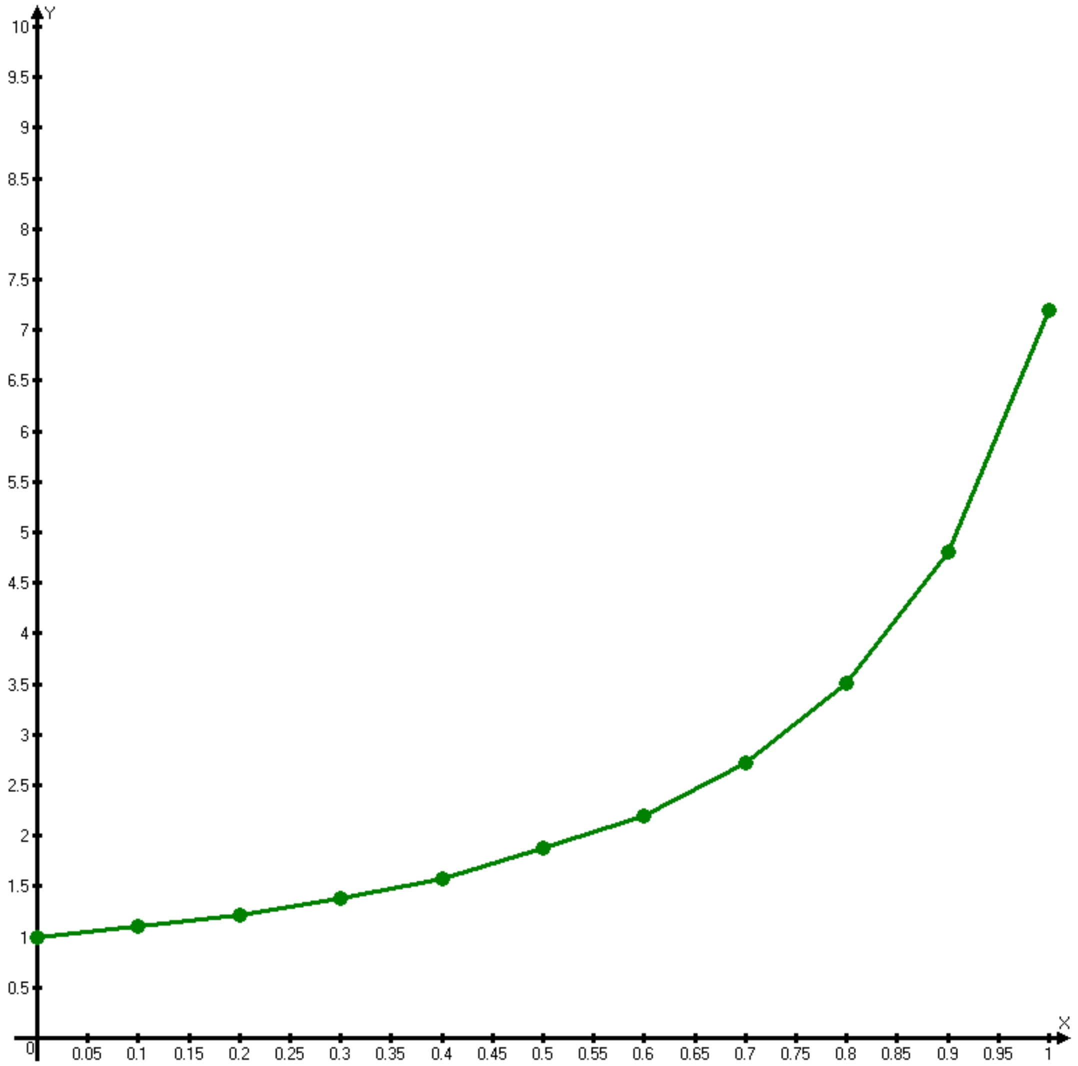
$$y_2 = y_1 + f(x_1;y_1)(x_2 - x_1) = y_1 + y^{/}(0,1;1,1)\cdot 0,1 = 1,1 + \left((0,1)^2 + (1,1)^2\right)\cdot 0,1 = 1,222;$$

....

Чисельний розв'язок задачі Коші подамо у вигляді таблиці:

x_n	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
y_n	1,0	1,1	1,222	1,375	1,575	1,875	2,2	2,719	3,508	4,802	7,19

Графічне зображення розв'язку на відрізку [0;1]:



☻

Метод Рунге – Кутта

Нехай маємо задачу Коші: $\begin{cases} y' = f(x;y) \\ y(x_0) = y_{0,} \end{cases}$ $x \in [a;b]$.

Функція $f(x;y)$ *задана і неперервна на області* D.

Похибка методу Ейлера на кожному частинному відрізку $[x_k; x_{k+1}]$ *має порядок* h^2. *Алгоритм Рунге – Кутта уточнює цей метод. Тут враховується зміна похідної* $y^{/}$ *на кожному кроці. Загальна робоча формула:*

$$\boxed{y_{k+1} = y_k + hf\left(x_k + \frac{h}{2}; y_k + f(x_k; y_k)\frac{h}{2}\right) \quad (4)}$$

де $y_k = y(x_k)$, $x_{k+1} = x_k + h$, $h = \dfrac{x - x_0}{n}$, $k = 0,1,2,\dots,n-1.$

Найбільш відомою є формула чотирьох етапного методу Рунне-Кутта. Наближенні значення шуканого розв'язку $y = y(x)$ *на відрізку* $[x_0; x]$ *послідовно обчислюють за формулою*

$$y_{k+1} = y_k + \Delta y_k,\ k = 0,1,2,\dots,n-1.$$

де

$$y_k = y(x_k),$$

$$\Delta y_k = \frac{1}{6}\left(T_1^{(k)} + 2T_2^{(k)} + 2T_3^{(k)} + T_4^{(k)}\right), \quad (5)$$

$$T_1^{(k)} = h \cdot f\left(x_k, y_k\right), \quad (6)$$

$$T_2^{(k)} = h \cdot f\left(x_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{T_1^{(k)}}{2}\right), \quad (7)$$

$$T_3^{(k)} = h \cdot f\left(x_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{T_2^{(k)}}{2}\right), \quad (8)$$

$$T_4^{(k)} = h \cdot f\left(x_{k+1}, y_k + T_3^{(k)}\right), \quad (9)$$

$$x_{k+1} = x_k + h,\ h = \frac{x - x_0}{n}. \quad (10)$$

Якщо задано граничну абсолютну похибку ε, *то крок обчислень* h *встановлюється на основі нерівності* $h^4 < \varepsilon$.

Приклад 5. *Методом Рунге – Кутта розв'язати задачу Коші* $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y - x}{y + x}$, $y(0) = 1$, $x \in [0;.0,1]$, *якщо* $h = 0,05$.

☺ Тут $f(x; y) = \dfrac{y - x}{y + x}$. Обчислимо Δy_1, послідовно використовуючи формули (5)–(10):

$$T_1^{(1)} = 0,05 f(0;1) = 0,05 \cdot \frac{1 - 0}{1 + 0} = 0,05;$$

$$T_2^{(1)} = 0{,}05\, f(0+0{,}5\cdot 0{,}05; 1+0{,}5\cdot 0{,}05) = 0{,}05\frac{1{,}025-0{,}025}{1{,}025+0{,}025} = 0{,}0476;$$

$$T_3^{(1)} = 0{,}05\, f(0+0{,}5\cdot 0{,}05; 1+0{,}5\cdot 0{,}0476) = 0{,}05\frac{1{,}0476-0{,}025}{1{,}0476+0{,}025} = 0{,}0477;$$

$$T_4^{(1)} = 0{,}05\, f(0+0{,}05; 1+0{,}0477) = 0{,}05\frac{1{,}0477-0{,}05}{1{,}0477+0{,}05} = 0{,}0454.$$

За формулою (5) знаходимо:

$$\Delta y_1 = \frac{1}{6}\left(0{,}05+2\cdot 0{,}0476+2\cdot 0{,}0477+0{,}0454\right) = 0{,}0477,$$

$$y_2 = y_1 + \Delta y_1 = 1 + 0{,}0477 = 1{,}0477.$$

Далі послідовно маємо:

$$T_1^{(2)} = 0{,}05\, f(x_1; y_1) = 0{,}05\cdot f(0{,}05; 1{,}0477) = 0{,}05\frac{1{,}0477-0{,}05}{1{,}0477+0{,}05} = 0{,}0454;$$

$$T_2^{(2)} = 0{,}05\, f(0{,}05+0{,}5\cdot 0{,}05; 1{,}0477+0{,}5\cdot 0{,}0454) = 0{,}05\frac{1{,}0704-0{,}075}{1{,}0704+0{,}075} = 0{,}0435;$$

$$T_3^{(2)} = 0{,}05\, f(0{,}05+0{,}5\cdot 0{,}05; 1{,}0477+0{,}5\cdot 0{,}0435) = 0{,}05\frac{1{,}0695-0{,}075}{1{,}0695+0{,}075} = 0{,}0434;$$

$$T_4^{(2)} = 0{,}05\, f(0{,}05+0{,}05; 1{,}0477+0{,}0434) = 0{,}05\frac{1{,}0695-0{,}1}{1{,}0695+0{,}1} = 0{,}0414;.$$

$$\Delta y_2 = \frac{1}{6}\left(0{,}0454+2\cdot 0{,}0435+2\cdot 0{,}0434+0{,}0414\right) = 0{,}0434.$$

Знаходимо значення шуканої функції при $x = 0{,}1$:

$$y_2 = y_1 + \Delta y_1 = 1{,}0477 + 0{,}0434 = 1{,}0911.$$ ☻

Ізоклини, поле напрямів рівняння першого порядку та хід інтегральних кривих

Приклад 1. *При заданих диференціальних рівняннях дослідити поле напрямів і зробити рисунок:*

а) $y' = x^2 + y^2 - 1$

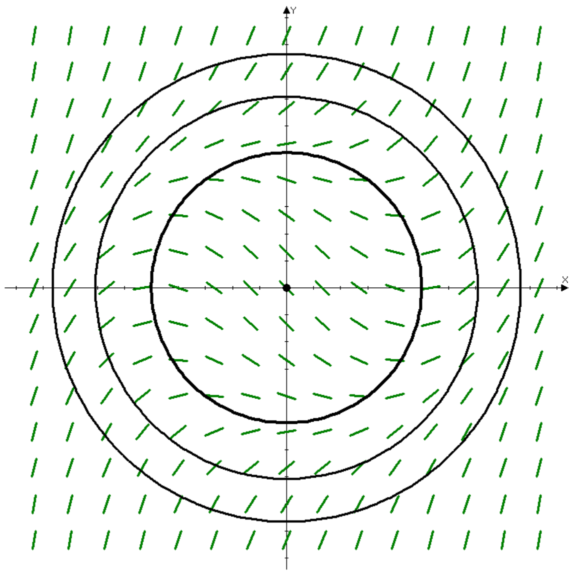
☺ Запишемо рівняння сім’ї ізоклин:

$$k = x^2 + y^2 - 1 \quad \text{або} \quad x^2 + y^2 = k + 1 \ (k \ge -1).$$

Як видно з рівняння, ізоклинами є концентричні кола з центром в точці $(0;0)$.

При $k=-1$ ізоклиною є одна точка – початок координат. Поле напрямів в $(0;0)$ утворює кут $\alpha = arctg(-1) = 135°$ з віссю Ox. При $k=0$ маємо ізоклину $x^2+y^2=1$, в кожній точці якої поле напрямів утворює з віссю Ox кут $\alpha = arctg0 = 0°$. При $k=1$ маємо ізоклину $x^2+y^2=2$; поле напрямів утворює кут $\alpha = arctg1 = 45^0$ з віссю Ox. При $k=2$ маємо ізоклину $x^2+y^2=3$; поле напрямів утворює кут $\alpha = arctg2 = 63^0 26' 6''$ з віссю Ox.

Зобразимо графічно утворене поле напрямів та ізоклини:



☻

б) $y' = 5x^2 - 3y^2$

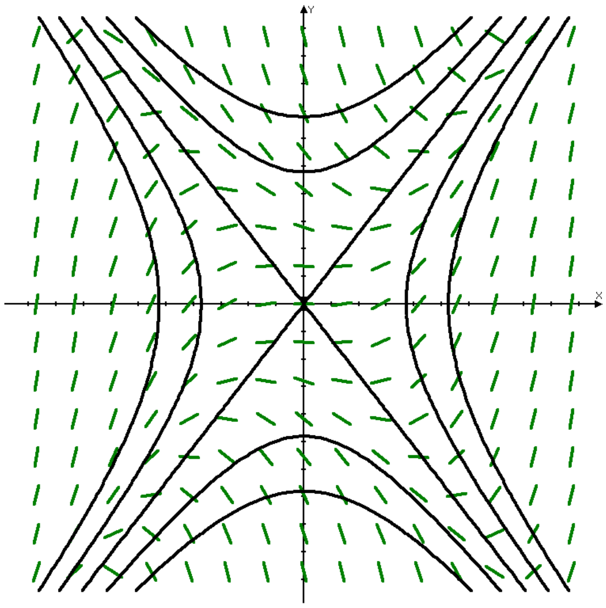
☺ Запишемо рівняння сім'ї ізоклин:

$$k = 5x^2 - 3y^2,\ k \in R.$$

Як видно з рівняння, ізоклинами є гіперболи з центром в точці $(0;0)$.

При $k=-2$ маємо ізоклину $5x^2-3y^2=-2$, в кожній точці якої поле напрямів утворює з віссю Ox кут $\alpha = arctg(-2) = 116°33'54''$. При $k=-1$ маємо ізоклину $5x^2-3y^2=-1$, в кожній точці якої поле напрямів утворює з віссю Ox кут $\alpha = arctg0 = 135°$. При $k=0$ ізоклиною є дві прямі, що перетинаються в початку координат. Поле напрямів в кожній точці цих прямих утворює кут $\alpha = arctg0 = 0°$ з віссю Ox. При $k=1$ маємо ізокліну $5x^2-3y^2=1$; поле напрямів утворює кут $\alpha = arctg1 = 45^0$ з віссю Ox. При $k = 2$ маємо ізоклину $5x^2 - 3y^2 = 2$; поле напрямів утворює кут $\alpha = arctg\,2 = 63^0 26'6''$ з віссю Ox.

Зобразимо графічно утворене поле напрямів та ізоклини:



☻

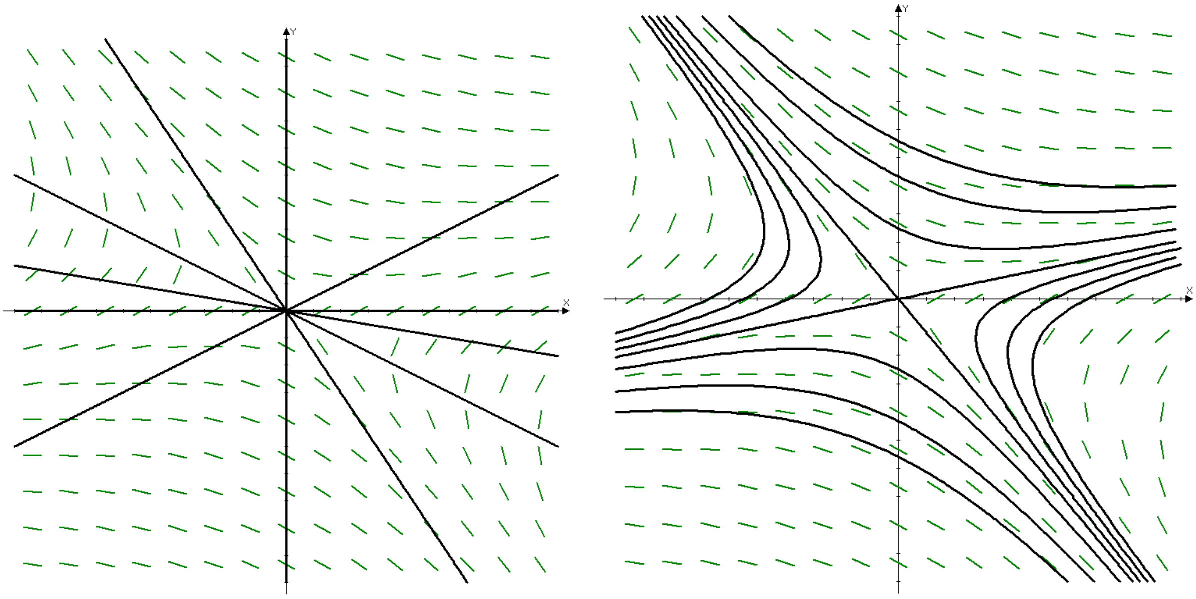
Приклад 2. *За допомогою ізоклин побудувати наближено інтегральні криві рівняння* $(x+y)\dfrac{dy}{dx} = x - y$.

☺ Позначимо $y' = k$, отримаємо рівняння сімейства ізоклин $(x+y)k = x - y$. Тобто ізоклинами є прямі $(k+1)y = (1-k)x$, які проходять через початок координат. При $k = -2$ маємо ізоклину $y = -3x$, в кожній точці якої дотичні до інтегральних кривих утворюють з віссю Ox кут $\alpha = \mathrm{arctg}(-2) = 116°33'54''$. При $k = -1$ ізоклину $x = 0$ інтегральні криві перетинають під кутом 45°, при цьому дотичні в точках цієї ізоклини до інтегральних кривих перетинають вісь абсцис під кутом $\alpha = \mathrm{arctg}(-1) = 135°$. При $k = 0$ отримаємо ізоклину $y = x$, в точках якої дотичні до інтегральних кривих розташовані під кутом $\alpha = \mathrm{arctg}\,0 = 0°$ до осі абсцис. При $k = 1$ маємо ізоклину $y = 0$, яку інтегральні криві перетинають під кутом $\alpha = \mathrm{arctg}1 = 45°$. При $k = 2$ отримаємо ізоклину $y = -\dfrac{1}{3}x$, в точках якої дотичні до інтегральних кривих розташовані під кутом

$\alpha = \operatorname{arctg} 2 = 63^0 26' 6''$ до осі абсцис. Якщо рівняння ізоклин розв'язати відносно *y*:

$$y = \frac{k+1}{k-1} x$$

і перейти до границі при $k \to \infty$, то отримаємо ізоклину $y = x$, в точках якої інтегральні криві мають вертикальні дотичні. Побудувавши кілька ізоклин і поле напрямів, далі будуємо наближено інтегральні криві рівняння:



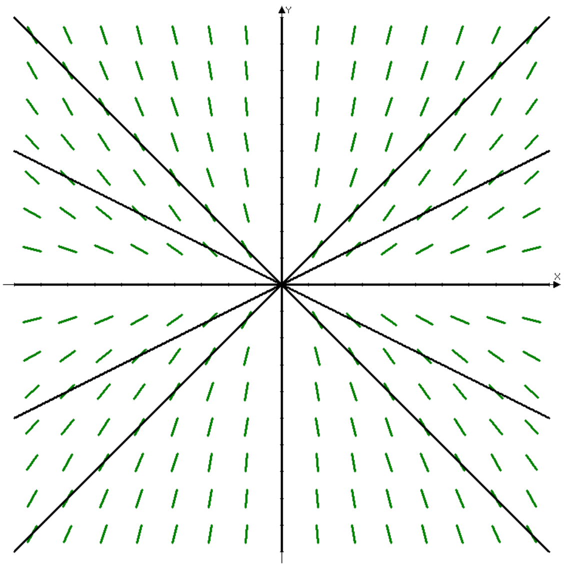
☻

Приклад 3. *За допомогою ізоклин побудувати наближено інтегральні криві рівняння* $xy' = 2y$.

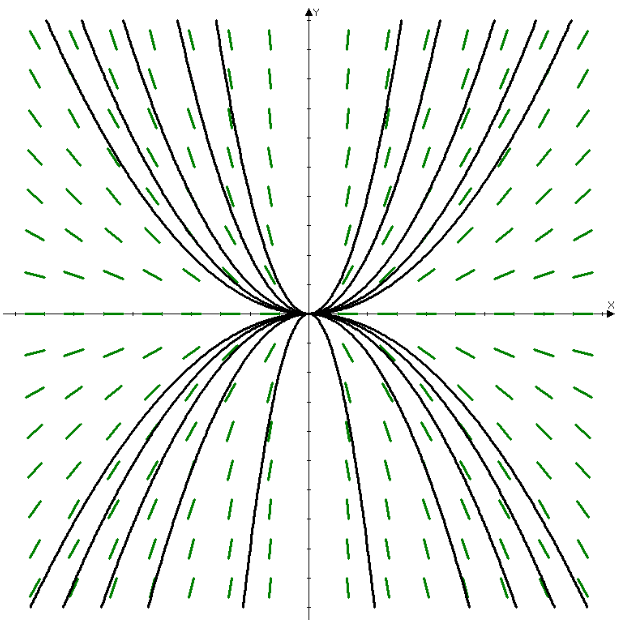
☺ Позначимо $y' = k$, отримаємо рівняння сімейства ізоклин $xk = 2y$. Тобто ізоклинами є прямі, які проходять через початок координат. При $k = -2$ маємо ізоклину $y = -x$, в кожній точці якої дотичні до інтегральних кривих утворюють з віссю *Ox* кут $\alpha = \operatorname{arctg}(-2) = 116°33'54''$. При $k = -1$ ізоклину $x = -2y$ інтегральні криві перетинають під кутом 45°, при цьому дотичні в точках цієї ізоклини до інтегральних кривих перетинають вісь абсцис під кутом $\alpha = \operatorname{arctg}(-1) = 135°$. При $k = 0$ отримаємо ізоклину $y = 0$, в точках якої дотичні до інтегральних кривих розташовані під кутом $\alpha = \operatorname{arctg} 0 = 0°$ до осі абсцис. При $k = 1$ маємо ізоклину $x = 2y$, яку інтегральні криві перетинають під кутом $\alpha = \operatorname{arctg} 1 = 45°$. При $k = 2$ отримаємо ізоклину $y = x$, в точках якої дотичні до інтегральних кривих розташовані під кутом $\alpha = \operatorname{arctg} 2 = 63^{0}26'6''$ до осі абсцис. Якщо рівняння ізоклин розв'язати відносно x:

$$x = \frac{2}{k} y$$

і перейти до границі при $k \to \infty$, то отримаємо ізоклину $x = 0$, в точках якої інтегральні криві мають вертикальні дотичні. Побудувавши кілька ізоклин і поле напрямів,



далі будуємо наближено інтегральні криві рівняння:



☻

ЗАВДАННЯ

1. Знайти наближений розв'язок диференціального рівняння

$$\frac{dy}{dx} = Ae^{x} + By \qquad\qquad \frac{dy}{dx} = Ay - B\sin x$$

що задовольняє початкову умову $y(0)=1$, використовуючи метод послідовних наближень Пікара. На координатній площині побудувати наближені графіки інтегральних кривих, побудовані за цим методом. Знайти три перших відмінних від нуля члени розвинення в степеневий ряд розв'язку задачі Коші.

2. Знайти наближений розв'язок диференціального рівняння

$$\frac{dy}{dx} = Axye^{\frac{Bx}{y}} \qquad\qquad \frac{dy}{dx} = Ay - \frac{Bx}{y}$$

на відрізку $[0;1]$, що задовольняє початкову умову $y(0)=C$, використовуючи методи Ейлера та Рунге-Кутта. На координатній площині побудувати наближені графіки інтегральних кривих, побудовані за цими методами.

3. Побудувати ізоклини, поле напрямів та накреслити схематично хід інтегральних кривих для таких диференціальних рівнянь:

а) $\frac{dy}{dx} = Ax^2y^B$,	б) $\frac{dy}{dx} = Ay - e^{Bx}$,

<table>
<tr><td colspan="2">в) $\dfrac{dy}{dx} = (Ay + B)^2,$</td><td colspan="2">г) $\dfrac{dy}{dx} = Ax + By,$</td></tr>
<tr><td colspan="2">д) $\dfrac{dy}{dx} = Ax^2 - By^2,$</td><td colspan="2">е) $\dfrac{dy}{dx} = Ax + By^2,\ \ y(0) = 0,$</td></tr>
<tr><td colspan="2">є) $\dfrac{dy}{dx} = A\sqrt[C]{y^B},$</td><td colspan="2">ж) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{Ax + By}{Bx + Cy}.$</td></tr>
<tr><td>№ варіанта</td><td>A</td><td>B</td><td>C</td></tr>
<tr><td>1</td><td>2</td><td>2</td><td>1</td></tr>
<tr><td>2</td><td>2</td><td>2</td><td>2</td></tr>
<tr><td>3</td><td>2</td><td>2</td><td>3</td></tr>
<tr><td>4</td><td>2</td><td>2</td><td>4</td></tr>
<tr><td>5</td><td>2</td><td>2</td><td>5</td></tr>
<tr><td>6</td><td>2</td><td>2</td><td>6</td></tr>
<tr><td>7</td><td>2</td><td>2</td><td>7</td></tr>
<tr><td>8</td><td>2</td><td>2</td><td>8</td></tr>
<tr><td>9</td><td>3</td><td>2</td><td>1</td></tr>
<tr><td>10</td><td>3</td><td>2</td><td>2</td></tr>
<tr><td>11</td><td>3</td><td>2</td><td>3</td></tr>
<tr><td>12</td><td>3</td><td>2</td><td>4</td></tr>
<tr><td>13</td><td>3</td><td>2</td><td>5</td></tr>
<tr><td>14</td><td>3</td><td>2</td><td>6</td></tr>
<tr><td>15</td><td>3</td><td>2</td><td>7</td></tr>
<tr><td>16</td><td>3</td><td>2</td><td>8</td></tr>
<tr><td>17</td><td>4</td><td>2</td><td>1</td></tr>
<tr><td>18</td><td>4</td><td>2</td><td>2</td></tr>
<tr><td>19</td><td>4</td><td>2</td><td>3</td></tr>
<tr><td>20</td><td>4</td><td>2</td><td>4</td></tr>
<tr><td>21</td><td>4</td><td>2</td><td>5</td></tr>
<tr><td>22</td><td>4</td><td>2</td><td>6</td></tr>
<tr><td>23</td><td>4</td><td>2</td><td>7</td></tr>
<tr><td>24</td><td>4</td><td>2</td><td>8</td></tr>
</table>

25	5	2	1
26	5	2	2
27	5	2	3
28	5	2	4
29	5	2	5
30	5	2	6

№	***Похідні деяких елементарних функцій***	***Первісні деяких функцій***
1	$\left(x^n\right)' = nx^{n-1}$	$\int dx = C$, $\int kdx = kx + C$
2	$\left(\sqrt{x}\right)' = -\frac{1}{2\sqrt{x}}$ $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$	$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C,$ якщо $n \neq -1$
3	$\left(a^x\right)' = a^x \ln a$, $\left(e^x\right)' = e^x$	$\int \frac{dx}{x} = \ln\|x\| + C$
4	$\left(\log_a x\right)' = \frac{1}{x\ln a}$, $\left(\ln x\right)' = \frac{1}{x}$	$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$, $\int e^x dx = e^x + C$
5	$\left(\sin x\right)' = \cos x$	$\int \sin x dx = -\cos x + C$
6	$\left(\cos x\right)' = -\sin x$	$\int \cos x dx = \sin x + C$
7	$\left(\mathrm{tg}\, x\right)' = \frac{1}{\cos^2 x}$	$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \mathrm{tg}\, x + C$
8	$\left(\mathrm{ctg}\, x\right)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$	$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\mathrm{ctg}\, x + C$
9	$\left(\arcsin x\right)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C = -\arccos\frac{x}{a} + C$
10	$\left(\arccos x\right)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a}} = \ln\left\|x + \sqrt{x^2+a}\right\| + C$
11	$\left(\mathrm{arctg}\, x\right)' = \frac{1}{1+x^2}$	$\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\mathrm{arctg}\frac{x}{a} + C$
12	$\left(\mathrm{arcctg}\, x\right)' = -\frac{1}{1+x^2}$	$\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left\|\frac{x-a}{x+a}\right\| + C$
13	$\left(\mathrm{sh}\, x\right)' = \mathrm{ch}\, x$	$\int \mathrm{sh}\, x dx = \mathrm{ch}\, x + C$
14	$\left(\mathrm{ch}\, x\right)' = \mathrm{sh}\, x$	$\int \mathrm{ch}\, x dx = \mathrm{sh}\, x + C$
15	$\left(\mathrm{th}\, x\right)' = \frac{1}{\mathrm{ch}^2 x}$	$\int \ln x dx = x\ln x - x + C$
16	$\left(\mathrm{cth}\, x\right)' = -\frac{1}{\mathrm{sh}^2 x}$	$\int \sin x dx = \ln\|\mathrm{tg}\frac{x}{2}\| + C$

Список рекомендованої літератури

1. Гудименко Ф.С., Павлюк І.А., Волкова В.О. Збірник задач з диференціальних рівнянь /За ред. доц. Ф.С. Гудименка. – Видавництво Київського університету, 1962. – 168с.
2. Диференціальні рівняння /І.І.Ляшко, О.К.Боярчук, Я.Г.Гай та ін. – К.:Вища шк. Головне видавництво, 1981. – 504с.
3. Задачник по курсу математического анализа /Под ред. Н.Я.Виленкина. – М.: Просвещение, 1971. – 336 с.
4. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. – М.: Наука, 1976. – 576с.
5. Матвеев Н.М. Сборник задач и упражнений по обыкновенным диференциальным уравнениям: Учебное пособие, 7-е изд., доп. – СПб.: Издательство «Лань», 2002. – 432с. – (Учебники для вузов. Специальная литература).
6. Рябушко А.П., Бархатов В.В., Державец В.В., Юруть И.Е. Сборник индивидуальных заданий по высшей математике. В 3 ч. Ч. 2. – Минск: Вышэйшая школа, 1990. – 352с.
7. Самойленко А.М., Перестюк М.О., Парасюк І.О. Диференціальні рівняння. – К.:Либідь, 2003. – 600с.
8. Самойленко А.М., Кривошия С.А., Перестюк М.О. Диференціальні рівняння в задачах. – К.:Либідь, 2003. – 504 с.
9. Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений. –М.: ГИФМЛ, 1958. – 468с.
10. Филиппов А.Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям. – М.: Интеграл-Пресс, 1988. – 208 с.
11. Шкіль М.І., Сотниченко М.А. Звичайні диференціальні рівняння. – К.:Вища шк., 1992. – 303с.
12. Програма навчальної дисципліни «Диференціальні рівняння» підготовки бакалавра з галузі знань 0402 «Фізико-математичні науки» напряму підготовки 6.040201 «Математика*». Розробники програми: доктор педагогічних наук, професор Ковтонюк М.М., кандидат фізико-математичних наук, доцент Тимошенко О.З. Рекомендовано Вченою радою Вінницького державного педагогічного університету імені Михайла Коцюбинського, пр. № 5 від 28.12. 2015 р. – Вінниця, 2015. – 10 с.