Вінницький державний педагогічний університет
імені Михайла Коцюбинського
Факультет математики, фізики і технологій

Кафедра математики

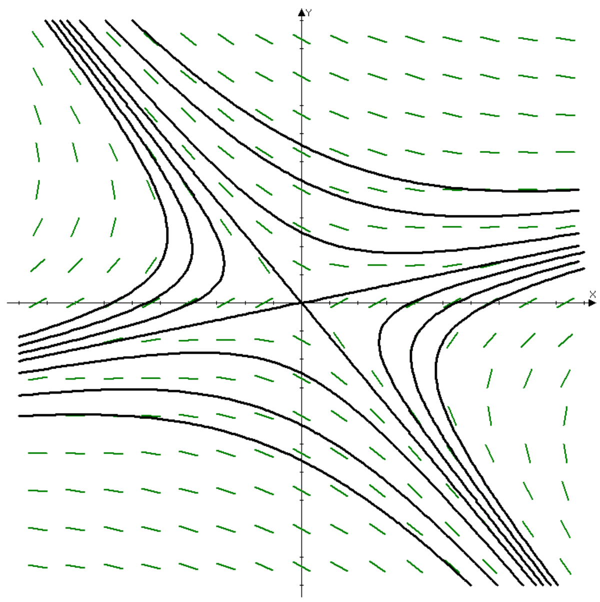
Робочий зошит студента

з прикладами та методичними вказівками

з дисципліни

Диференціальні рівняння

Звичайні диференціальні рівняння n-го порядку, системи диференціальних рівнянь, диференціальні рівняння в частинних похідних та математичне моделювання реальних процесів з їх допомогою



Вінниця, 2017

Робочий зошит студента
з прикладами та методичними вказівками

Дисципліна: Диференціальні рівняння
Розділ: Звичайні диференціальні рівняння n-го порядку, системи диференціальних рівнянь, диференціальні рівняння в частинних похідних та математичне моделювання реальних процесів з їх допомогою

Укладачі: доктор педагогічних наук,
професор Ковтонюк М.М.,

Рецензент: кандидат фізико-математичних наук,
доцент Тимошенко О.З.

Робочий зошит з прикладами та методичними вказівками для студентів четвертого курсу спеціальності «Математика» містить тематичний план з навчальної дисципліни та розподіл годин й розподіл рейтингових балів згідно кредитно-трансферної системи оцінювання, контрольні запитання та завдання для самостійної і аудиторної роботи, розв'язані приклади з детальним поясненням, методичними вказівками, варіанти домашніх контрольних робіт, типові завдання для аудиторних контрольних робіт.

Рекомендовано до друку рішенням кафедри математики ВДПУ імені Михайла Коцюбинського протокол №6 від 17 січня 2017 року.

Таблиця 1. Розподіл рейтингових балів за видами діяльності

№	*Вид діяльності*	*Бали*	*Кількість робіт*	*Сума балів*
1.	Практичні заняття	0,5	8	4
2.	Домашні роботи	0,5	8	4
2.	Індивідуальна домашня робота	18	1	18
3.	Самостійна робота	18	1	18
5.	Контрольна робота	18	1	18
6.	Колоквіум	18	1	18
	Всього за семестр			**80**
	Екзамен			**20**
Підсумковий рейтинговий бал				**160**

Таблиця 2. Розподіл рейтингових балів за модулями

№	Назви теоретичних блоків	Кількість балів							
		лекційні заняття	практичні заняття	індивід. дом. робота	домаш. роботи	контр. роботи	сам. робота	колоквіум	всього
Модуль 1. Звичайні диференціальні рівняння вищих порядків, системи диференціальних рівнянь першого порядку									
1	<u>Змістовий модуль 2</u> Звичайні диференціальні рівняння n-го порядку та математичне моделювання реальних процесів з їх допомогою	3	3	30	2				38
2	<u>Змістовий модуль 3</u> Системи диференціальних рівнянь та математичне моделювання реальних процесів з їх допомогою	2	2		2		30		36
3	<u>Змістовий модуль 4</u> Диференціальні рівняння в частинних похідних та математичне моделювання реальних процесів з їх допомогою	2	2		2	40		40	86
Всього за 6 семестр		**7**	**7**	**30**	**6**	**40**	**30**	**40**	**160** **80%**
Екзамен									**40** **20%**
Підсумковий рейтинговий бал									**200**
Нормований рейтинговий бал									**100**

Складання модуля 1: 24.05.10-30.05.10

Змістові модулі та тематичне планування

Модуль 2. Звичайні диференціальні рівняння n-го порядку та математичне моделювання реальних процесів з їх допомогою

2.10. Диференціальні рівняння n-го порядку загального вигляду

а) Основні поняття і означення. Геометричний і механічний зміст диференціального рівняння другого порядку.

б) Теорема про існування та єдність розв’язку задачі Коші. Зведення диференціального рівняння n-го порядку до системи диференціальних рівнянь першого порядку.

в) Поняття про загальний і частинний розв’язок.

г) Класи диференціальних рівнянь, що допускають зниження порядку.

2.11. Лінійні диференціальні рівняння n-го порядку

а) Поняття про лінійний диференціальний оператор n-го порядку.

б) Дійсні і комплексні розв’язки однорідного лінійного диференціального рівняння.

в) Властивості розв’язків ОЛДР.

г) Фундаментальна система розв’язків. Визначник Вронського.

д) Структура загального розв’язку ЛОДР n-го порядку.

2.12. Лінійні однорідні диференціальні рівняння n-го порядку з сталими коефіцієнтами.

а) Характеристичне рівняння ЛОДР n-го порядку з сталими коефіцієнтами.

б) Загальний розв’язок у випадку різних дійсних коренів характеристичного рівняння.

в) Випадок кратних коренів.

г) Загальний розв’язок однорідного диференціального рівняння 2-го порядку.

2.13. Лінійні неоднорідні диференціальні рівняння n-го порядку

а) Загальний розв’язок лінійного неоднорідного диференціального рівняння.

б) Метод варіації довільних сталих (метод Лагранжа).

в) Метод невизначених коефіцієнтів.

г) Загальний розв’язок рівняння другого порядку.

2.14. Інтегрування диференціальних рівнянь за допомогою степеневих рядів

а) Зображення розв’язку ЛОДР 2-го порядку у вигляді суми степеневого ряду.

б) Рівняння Ерміта (застосування у квантовій механіці).

в) Рівняння Бесселя.

г) Рівняння Гауса (гіпергеометричне рівняння).

д) Рівняння Лежандра.

2.15. Застосування ЗДР до розв’язування задач науки і техніки.

а) Вільні гармонійні коливання.

б) Затухаючі коливання.

в) Вимушені коливання: нерезонансний і резонансний випадки.

Модуль 3. Системи диференціальних рівнянь та математичне моделювання реальних процесів з їх допомогою

3.16. Системи диференціальних рівнянь загального вигляду

а) Основні поняття і означення, нормальна СДР. Задача Коші.

б) Механічне тлумачення нормальної СДР та її розв’язків. Поняття про фазовий простір.

в) Теорема існування та єдиності для нормальної СДР.

3.17. Лінійні системи диференціальних рівнянь

а) Деякі відомості з теорії матриць.

б) Однорідні СЛДР.

в) Фундаментальна система розв’язків. Визначник Вронського.

г) Загальний розв’язок ОЛСДР.

3.18. Неоднорідні системи лінійних диференціальних рівнянь а)Загальний розв’язок неоднорідної системи лінійних диференціальних рівнянь

б) Метод варіації довільних сталих (метод Лагранжа) відшукання розв’язків ЛНС.

в) Метод невизначених коефіцієнтів (нерезонансний і резонансний випадок).

г) Зведення лінійного диференціального рівняння n-го порядку до лінійної системи диференціальних рівнянь.

3.19. Системи лінійних диференціальних рівнянь з сталими коефіцієнтами

а) Побудова загального розв’язку у випадку простих коренів.

б) Жорданова нормальна форма матриці.

в) Випадок кратних коренів характеристичного рівняння.

3.20. Застосування СДР до дослідження процесів реальної дійсності

а) Коливні процеси в електриці.

б) Фазові траєкторії і інтегральні криві.

в) Динаміка бойових дій.

Модуль 4. Диференціальні рівняння в частинних похідних та математичне моделювання реальних процесів з їх допомогою

4.21. Диференціальні рівняння в частинних похідних

а) Основні поняття і означення.

б) Класифікація диференціальних рівнянь в частинних похідних другого порядку.

4.22. Рівняння гіперболічного типу

а) Рівняння коливання струни.

б) Рівняння коливання мембрани.

в) Метод Фур’є.

4.23. Рівняння параболічного типу

а) Рівняння теплопровідності.

б) Метод Фур’є.

4.24. Рівняння еліптичного типу

а) Рівняння Лапласа. Задачі, що приводять до рівняння Лапласа.

б) Задача Діріхле для круга.

в) Інтеграл Пуассона.

4.25. Застосування ДР у частинних похідних до дослідження процесів реальної дійсності

а) Коливання струн музичних інструментів.

б) Температурні хвилі. Вплив радіоактивного розпаду на температуру земної кори.

в) Задачі електростатики.

Практичне заняття № 1

Тема: ***ДР вищих порядків, що допускають пониження порядку.***

Контрольні запитання

1. Який загальний вид має рівняння n-го порядку, розв’язане відносно старшої похідної? Що називають розв’язком (інтегральною *кривою) (загальним, частинним) такого рівняння? У яких формах він може бути заданий?*

2. *Як формулюється задача Коші для рівняння n-го порядку, розв'язаного відносно старшої похідної? Який геометричний і механічний зміст має ця задача для рівняння другого порядку? Чи означає в цьому випадку єдиність розв'язку задачі Коші, що через задану точку (x_0, y_0) проходить тільки одна інтегральна крива?*
3. *За якої умови задача Коші має розв'язок? Коли цей розв'язок буде єдиним?*
4. *Як знаходять загальні розв'язки рівнянь $F\left(x,\, y^{(n)}\right) = 0$, $F\left(y, y^{(n)}\right) = 0$, $F\left(y^{(n-1)},\, y^{(n)}\right) = 0$, $F\left(y^{(n-2)},\, y^{(n-1)},\, y^{(n)}\right) = 0$, $F\left(y, y', y'', ..., y^{(n)}\right) = 0$.*

Приклад 1. *Знайти загальний та частинний розв'язок ДР* $\dfrac{d^3y}{dx^3} = x\ln x$, *що задовольняє початкові умови: при* $x_0 = 1,\; y_0 = 0,\; y_0' = 0,\; y_0'' = -\dfrac{1}{4}$.

► В даному разі це є рівняння $F\left(x,\, y^{(n)}\right) = 0$, розв'язане відносно $y^{(n)}$ (окремий випадок лінійного рівняння). Маємо

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) = x\ln x, \qquad d\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) = x\ln x dx$$

отже,

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \int x\ln x x dx + C_1 = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{1}{4}x^2 + C_1, \tag{1}$$

$$d\left(\frac{dy}{dx}\right) = \left(\frac{x^2}{2}\ln x - \frac{1}{4}x^2 + C_1\right)dx,$$

$$\frac{dy}{dx} = \int\left(\frac{x^2}{2}\ln x - \frac{1}{4}x^2 + C_1\right)dx + C_2,$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^3}{6}\ln x - \frac{x^3}{18} - \frac{x^3}{12} + C_1x + C_2,$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^3}{6}\ln x - \frac{5}{36}x^3 + C_1x + C_2; \tag{2}$$

$$y = \int\left(\frac{x^3}{6}\ln x - \frac{5}{36}x^3 + C_1x + C_2\right)dx + C_3$$

або

$$y=\frac{x^4}{24}\ln x-\frac{x^4}{96}-\frac{5}{144}x^4+C_1\frac{x^2}{2}+C_2x+C_3. \quad (3)$$

Остаточно:

$$y=\frac{x^4}{24}\ln x-\frac{13}{288}x^4+C_1\frac{x^2}{2}+C_2x+C_3.$$

Шукаємо тепер частинний розв'язок, що задовольняє зазначені початкові умови. З рівності (1) маємо: $y_0''=-\frac{1}{4}=-\frac{1}{4}+C_1$; отже, $C_1=0$. Далі з рівності (2) знаходимо $C_2=\frac{5}{36}$. Нарешті рівність (3) дає змогу визначити C_3: $C_3=-\frac{3}{32}$.

Таким чином, шуканий частинний розв'язок буде

$$y=\frac{x^4}{24}\ln x-\frac{13}{288}x^4+\frac{5}{36}x-\frac{3}{32}. \blacktriangleleft$$

Приклад 2. *Знайти загальний розв'язок рівняння* $y'''-y''^2=0$.

► Маємо рівняння типу $F\left(y^{(n-1)},\ y^{(n)}\right)=0$. Введемо заміну $y''=z$, тоді $y'''=\frac{dz}{dx}$. Отже,

$$\frac{dz}{dx}=z^2, \qquad \frac{dz}{z^2}=dx, \qquad -\frac{1}{z}=x+C_1.$$

Але $z=\frac{d^2y}{dx^2}$, тому $\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{1}{x+C_1}$. Як бачимо, дістали рівняння, розглянуте в прикладі 1.

Далі маємо: $d\left(\frac{dy}{dx}\right)=-\frac{dx}{x+C_1}, \qquad \frac{dy}{dx}=-\ln\left(x+C_1\right)+C_2.$

Звідси $y=-\int\ln\left(x+C_1\right)dx+C_2x+C_3.$

Остаточно:

$$y=-x\ln\left(x+C_1\right)+\ln\left(x+C_1\right)+C_2x+C_3. \blacktriangleleft$$

Приклад 3. *Знайти розв'язок рівняння* $y''+y^{-3}=0$*, який задовольняє початкові умови: при* $x=1,\ y=1,\ y'=0$.

► Маємо рівняння типу $F\left(y,y^{(n)}\right)=0$, розв'яжемо його відносно похідної: $y''=-y^{-3}$, помножимо обидві частини на $2y'dx$:

$$2y'y''dx = -2y^{-3}y'dx, \qquad d\left(y'^2\right) = -2y^{-3}dy, \qquad y'^2 = \frac{1}{y^2} + C_1.$$

Звідси

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 0 = \frac{1}{1} + C_1, \; C_1 = -1.$$

Далі маємо

$$\frac{dy}{dx} = \pm\sqrt{\frac{1}{y^2} - 1}, \qquad \frac{ydy}{\pm\sqrt{1-y^2}} = dx, \qquad \pm\sqrt{1-y^2} = x + C_2.$$

Беручи до уваги початкові умови, знаходимо $C_2 = -1$. Таким чином, частинний розв'язок диференціальне рівняння набере вигляду:

$$1 - y^2 = (x-1)^2 \text{ або } x^2 + y^2 - 2x = 0. \blacktriangleleft$$

Приклад 4. *Розв'язати рівняння* $y'''\left(1 + y'^2\right) - 3y'y''^2 = 0.$ (4)

► Як бачимо, це рівняння типу $F\left(y', ..., y^{(n)}\right) = 0$, тобто не містить явно шукану функцію і не містить явно аргумент, отже його порядок можна знизити на дві одиниці.

Покладемо $y' = z$. Тоді $y'' = \dfrac{dz}{dx}, \; y''' = \dfrac{d^2z}{dx^2}$, і рівняння матиме вигляд:

$$\frac{d^2z}{dx^2}\left(1 + z^2\right) - 3z\left(\frac{dz}{dx}\right)^2 = 0. \qquad (5)$$

Користуючись тепер тим, що рівняння (4) не містить явно незалежної змінної, знизимо його порядок ще на одиницю. Поклавши $\dfrac{dz}{dx} = p$ і розглядаючи z як незалежну змінну, будемо мати

$$\frac{d^2z}{dx^2} = \frac{dp}{dz}\frac{dz}{dx} = \frac{dp}{dz} \cdot p.$$

Отже, рівняння (5) набере вигляду

$$p\frac{dp}{dz}\left(1 + z^2\right) - 3zp^2 = 0 \qquad \text{або} \qquad \frac{dp}{dz}\left(1 + z^2\right) - 3zp = 0.$$

Відокремлюючи змінні, дістанемо:

$$\frac{dp}{p} - \frac{3zdz}{1+z^2} = 0, \qquad \ln p - \frac{3}{2}\ln\left(1 + z^2\right) = \ln C_1, \qquad p = C_1\sqrt{\left(1 + z^2\right)^3},$$

і звідси

$$\frac{dz}{dx}=C_1\sqrt{\left(1+z^2\right)^3}, \qquad \int\frac{dz}{\sqrt{\left(1+z^2\right)^3}}=C_1x+C_2.$$

Зробивши в інтегралі заміну $z=tg\,t,\ dz=\frac{1}{\cos^2 t}dt$, будемо мати

$$\int\frac{\cos^3 t\ dt}{\cos^2 t}=\int\cos t\,dt=\sin t=\frac{z}{\sqrt{1+z^2}}.$$

Таким чином

$$\frac{z}{\sqrt{1+z^2}}=C_1x+C_2.$$

Звідси

$$\frac{z^2}{\sqrt{1+z^2}}=\left(C_1x+C_2\right)^2, \qquad z^2=\frac{\left(C_1x+C_2\right)^2}{1-\left(C_1x+C_2\right)^2},$$

$$z=\pm\frac{C_1x+C_2}{\sqrt{1-\left(C_1x+C_2\right)^2}}, \qquad \frac{dy}{dx}=\pm\frac{C_1x+C_2}{\sqrt{1-\left(C_1x+C_2\right)^2}},$$

$$dy=\pm\frac{C_1x+C_2}{\sqrt{1-\left(C_1x+C_2\right)^2}}dx.$$

Інтегруючи останню рівність, знайдемо

$$y+C_3=\mp\sqrt{1-\left(C_1x+C_2\right)^2} \text{ або } \left(y+C_3\right)^2+\left(C_1x+C_2\right)^2=1. \blacktriangleleft$$

Приклад 5. *Розв'язати рівняння* $xyy''+xy'^2-yy'=0$**.**

► Ліва частина даного рівняння є однорідна функція (виміру 2) відносно шуканої функції та її похідних. Отже, покладемо $\frac{y'}{y}=z$ або $y'=zy$. Тоді $y''=z'y+zy'=z'y+z^2y$, і рівняння після підстановки виразів для y' та y'' набере вигляду

$$xy^2\left(z'+z^2\right)+xz^2y^2-y^2z=0,$$

або (після скорочення на y^2)

$$x\left(z'+z^2\right)+xz^2-z=0.$$

Таким чином, ми дістали рівняння першого порядку (рівняння Бернуллі). Зробивши заміну (після ділення на z^2)

$$u=\frac{1}{z},\ \frac{du}{dx}=-\frac{1}{z^2}\frac{dz}{dx},$$

будемо мати лінійне рівняння

$$\frac{du}{dx}+\frac{u}{x}=2.$$

Розв'язок відповідного однорідного рівняння має вигляд:

$$\ln u+\ln x=\ln C,\ u=\frac{C}{x}.$$

Тому

$$\frac{1}{x}\frac{dC}{dx}=2, \qquad dC=2xdx, \qquad C=x^2+C_1,$$

$$u=\left(x^2+C_1\right)\frac{1}{x}=\frac{C_1}{x}+x.$$

Отже,

$$z=\frac{y'}{y}=\frac{x}{x^2+C_1}.$$

З останньої рівності маємо

$$\frac{dy}{y}=\frac{x}{x^2+C_1}dx, \qquad \ln y=\frac{1}{2}\left(x^2+C_1\right)+\ln C_2.$$

Остаточно

$$y=C_2\sqrt{x^2+C_1} \quad ◀$$

Приклад 6. *Розв'язати рівняння* $yy'''-y'y''=0.$

► Якщо поділити обидві частини рівняння на y^2, помічаємо, що ліва частина тоді буде похідною від $\frac{y''}{y}$, тобто

$$\frac{y'''y-y'y''}{y^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{y''}{y}\right)=0.$$

Звідси

$$\frac{y''}{y}=C_1, \quad y''=C_1y.$$

Це рівняння буде вже рівнянням другого порядку типу $F\left(y',y^{(n)}\right)=0$. Отже,

$$2y'y''dx=2C_1yy'dx, \quad d\left(y'^2\right)=2C_1ydy, \quad y'^2=C_1y^2+C_2,$$

$$y'=\pm\sqrt{C_1y^2+C_2}, \qquad \frac{dy}{\sqrt{C_1y^2+C_2}}=\pm dx.$$

Зінтегрувавши, будемо мати:

$$C_1x=\ln\left(y+\sqrt{y^2+C_2}\right)+\ln C_3, \qquad e^{C_1x}=C_3\left(y+\sqrt{y^2+C_2}\right).$$

Останнє рівняння можна розв'язати відносно y:

$$e^{C_1x}\left(\sqrt{y^2+C_2}-y\right)=C_3C_2, \qquad \sqrt{y^2+C_2}-y=C_3C_2e^{-C_1x}.$$

З рівностей

$$y+\sqrt{y^2+C_2}=\frac{1}{C_3}e^{C_1x}, \qquad \sqrt{y^2+C_2}-y=C_3C_2e^{-C_1x}$$

маємо

$$2y=\frac{1}{C_3}e^{C_1x}-C_2C_3e^{-C_1x}, \qquad y=C_2'e^{C_1x}+C_3'e^{-C_1x}.$$

(тут $C_2'=\dfrac{1}{2C_3}$, $C_3'=-\dfrac{C_3C_2}{2}$). ◄

Завдання для самостійного розв'язання

1. [3] Перевірити, чи є дана функція розв'язком вказаного диференціального рівняння:

1.1 $y=C_1\sin x+C_2\cos x, \quad y''+y=0;$

1.2 $y=C_1e^{x}+C_2e^{-x}+C_3e^{2x}, \quad y'''-2y''-y'+2y=0;$

1.3 $y=\dfrac{1}{x}\left(C_1e^{x}+C_2e^{-x}\right), \quad xy''+2y'-xy=0;$

1.4 $y=C_1x^{\frac{3}{2}}+C_2, \quad 2xy''=y'.$

2. Зінтегрувати диференціальні рівняння вказаного типу та відшукати частинний розв'язок, якщо вказані початкові умови:

рівняння типу $F\left(x,y^{(n)}\right)=0$

2.1. $y'''=0$; при $x_0=0,\ y_0=1,\ y_0'=0,\ y_0''=2.$

2.2. $y^{IV}=\sin 2x.$

2.3. $y^{IV}=\operatorname{ch}x$; при $x_0=0,\ y_0=2,\ y_0'=1,\ y_0''=1,\ y_0'''=0.$

2.4. $y''=e^{x}\cos x$; при $x_0=0,\ y_0=0,\ y_0'=\dfrac{3}{2}.$

2.5. $y'''=\sin^3 x.$

2.6. $y''=\arcsin x.$

2.7. $y'''=e^{x}-\dfrac{1}{x}.$

2.8. $y^{IV}=e^{x}-1$; при $x_0=0,\ y_0=2,\ y_0'=0,\ y_0''=0,\ y_0'''=0.$

2.9. $y''' = \dfrac{\left(1+x^2\right)e^x}{\left(1+x\right)^3}$

рівняння типу $F\left(y^{(n-1)},\ y^{(n)}\right)=0$**:**

2.10. $y''' - y''^3 = 0.$

рівняння типу $F\left(y', y'', y'''\right)=0$**:**

2.11. $y'''\left(1+y'^2\right) - 3y'y''^2 = 0.$

рівняння типу $F\left(y,\ y^{(n)}\right)=0$**:**

2.12. $y'' = \dfrac{1}{3}y^{-\frac{1}{3}}.$ 2.13. $y^3y'' = -1;$

2.14. $y'' = \dfrac{1}{\sqrt{y}};$ 2.15. $y'' = 8e^y;$

рівняння типу $F\left(x, y', y'',...,\ y^{(n)}\right)=0$**:**

2.16. $xy'' = y'\ln\dfrac{y'}{x}.$ 2.17. $y''^2 + y'^2 - y'^4 = 0.$

2.18. $2yy'' - y'^2 - 1 = 0.$ 2.19. $x^2y''' - y''^2 = 0.$

рівняння типу $F\left(y, y', y'',...,\ y^{(n)}\right)=0$**:**

2.20. $y\left(1-\ln y\right)y'' + \left(1+\ln y\right)y'^2 = 0.$

2.21. $yy'' - y'\left(2\sqrt{yy'} - y'\right) = 0.$ 2.22. $y''y = y'y^2 + y'^2;$

2.23. $y''y + y'^2 = y^2\ln y;$ 2.24. $\left(y-1\right)y'' = 2y'^2;$

рівняння типу $F\left(y', y'',...,\ y^{(n)}\right)=0$**:**

2.25. $y'''y' - y''^2 - y'^3 = 0;$ 2.26. $y''' = \left(y''\right)^2;$ 2.27. $\left(y''\right)^2 = 1 + y'^2.$

2. Знайти частинні розв'язки рівнянь, що задовольняють вказані початкові умови:

2.1. $y''\left(x^2+1\right) - 2xy' = 0$; при $x = 0,\ y\left(0\right) = 1,\ y'\left(0\right) = 3.$

2.2. $yy'' - y'^2 + y'^3 = 0$; при $x = 1,\ y\left(1\right) = 1,\ y'\left(1\right) = 1.$

2.3. $y''y^3 + 1 = 0$; при $x = 1,\ y = 1,\ y' = 1.$

3. $y''y'y = y'^3 + y''^2$. Знайти інтегральну криву, що проходить через точку $M\left(0,\ 0\right)$ і дотикається до прямої $y = -x.$

4. Знайти плоскі криві, у яких радіус кривизни пропорційній кутові нормалі.

5. Знайти криві, у яких радіус кривизни дорівнює відрізкові нормалі, заключному між даними паралельними прямими.

Практичне заняття № 2

Тема: ***Лінійна залежність і незалежність функцій. Визначник Вронського. Лінійні однорідні рівняння вищих порядків. Знаходження загального розв'язку ЛОДР, якщо відомий один частинний розв'язок.***

Контрольні запитання

1. *Який загальний вид має лінійне рівняння n-го порядку? При якій умові задача Коші для лінійного рівняння має єдиний розв'язок? У якому інтервалі існують розв'язки?*
2. *Які розв'язки однорідного лінійного рівняння називаються лінійно незалежними? Що таке фундаментальна система розв'язків? Чи може нульовий розв'язок входити до складу фундаментальної системи розв'язків? Яка умова є необхідною і достатньою для того, щоб дана система розв'язків була фундаментальною? Скільки фундаментальних систем розв'язків має задане однорідне лінійне рівняння?*
3. *Як побудувати загальний розв'язок однорідного лінійного рівняння, якщо відомо фундаментальну систему розв'язків?*
4. *Як знайти загальний розв'язок неоднорідного лінійного рівняння, якщо відомий один частинний розв'язок й загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння?*

Приклад 1. *Дано функції* $y_1 = \frac{1}{2}\sin^2 x$, $y_2 = -3\cos^2 x$, $y_3 = 2$, $y_4 = x$ *на проміжку* $(-\infty;+\infty)$. *Визначити, чи будуть вони лінійно залежні чи лінійно незалежні.*

► Використаємо означення лінійно незалежних функцій. Складемо рівняння:

$$\alpha_1\left(\frac{1}{2}\sin^2 x\right) + \alpha_2\left(-3\cos^2 x\right) + \alpha_3 \cdot 2 + \alpha_4 x = 0. \qquad (6)$$

Якщо покласти $\alpha_1 = 2$, $\alpha_2 = -\frac{1}{3}$, $\alpha_3 = -\frac{1}{2}$, $\alpha_4 = 0$, рівняння (6) стане тотожністю:

$$2\left(\frac{1}{2}\sin^2 x\right) - \frac{1}{3}\left(-3\cos^2 x\right) - \frac{1}{2}\cdot 2 + 0 \cdot x \equiv \sin^2 x + \cos^2 x \equiv 0.$$

Отже, знайшлися числа α_1, α_2, α_3, α_4 не всі рівні одночасно нулю і такі, що рівняння (6) перетворюється в тотожність. Тому, дані функції y_1, y_2, y_3, y_4 лінійно залежні. ◄

Приклад 2. *Дано функції* $y_1 = x$, $y_2 = 2x+3$, $y_3 = 3x+5$. *Виявснити, чи будуть вони лінійно незалежні чи ні.*

► Складемо рівняння:

$$\alpha_1 x + \alpha_2(2x+3) + \alpha_3(3x+5) = 0, \tag{7}$$

або

$$(\alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3)x + (3\alpha_2 + 5\alpha_3) = 0.$$

Це многочлен першого степеня, він тотожньо рівний нулю тоді і тільки тоді, коли його коефіцієнти рівні нулю:

$$\begin{cases} \alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 = 0, \\ 3\alpha_2 + 5\alpha_3 = 0. \end{cases}$$

Маємо однорідну систему двох лінійних рівнянь з трьома невідомими. Як відомо, така система має безліч розв'язків, в тому числі і не нульові. Отже, функції y_1, y_2, y_3 лінійно залежні. ◄

Приклад 3. *Знайти визначник Вронського для системи функцій* $y_1 = 2$, $y_2 = \cos x$, $y_3 = \cos 2x$.

► $$W[y_1, y_2, y_3] = \begin{vmatrix} 2 & \cos x & \cos 2x \\ 0 & -\sin x & -2\sin 2x \\ 0 & -\cos x & -4\cos 2x \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} \sin x & 2\sin 2x \\ \cos x & 4\cos 2x \end{vmatrix} =$$ ◄

$$= 8\sin x \cos 2x - 4\sin 2x \cos x = -8\sin^3 x.$$

Приклад 4. *Довести, що функції* $y_1 = x$, $y_2 = x^2$, $y_3 = x^3$ (8) *утворюють фундаментальну систему розв'язків для рівняння*

$$x^3 y''' - 3x^2 y'' + 6xy' - 6y = 0.$$

► Система функцій (8) лінійно незалежна, оскільки тотожність

$$\alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3 = 0$$

може мати місце тільки в тому випадку, якщо $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$.

Крім того, безпосередня підстановка легко покаже, що y_1, y_2, y_3 є розв'язками заданого диференціального рівняння. Отже, згідно з означеням функції (8) утворюють фундаментальну систему розв'язків для цього рівняння.

Визначник Вронського для функцій $y_1 = x$, $y_2 = x^2$, $y_3 = x^3$ дорівнює:

$$W[x, x^2, x^3] = \begin{vmatrix} x & x^2 & x^3 \\ 1 & 2x & 3x^3 \\ 0 & 2 & 6x \end{vmatrix} = 2x^3.$$

Він перетворюється в нуль при $x=0$. При цьому значенні для рівняння (8) порушується теорема існування і єдиності, оскільки коефіцієнти рівняння

$$y''' - \frac{3}{x}y'' + \frac{6}{x^2}y' - \frac{6}{x^3}y = 0$$

розривні в точці $x=0$. ◄

Приклад 5. *Показати, що функції* x, x^3, e^x *утворюють фундаментальну систему розв'язків деякого лінійного однорідного диференціального рівняння третього порядку. Написати це рівняння і знайти його особливі точки.*

► Покажемо спочатку, що функції x, x^3, e^x лінійно незалежні. Припустимо, що при деяких $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ виконується тотожність:

$$\alpha_1 x + \alpha_2 x^3 + \alpha_3 e^x = 0.$$

Продиференціювавши цю тотожність чотири рази, отримаємо, що $\alpha_3 e^x = 0$, і тому $\alpha_3 = 0$. Але тоді: $\alpha_1 x + \alpha_2 x^3 = 0$.

Це рівняння може тотожньо виконуватися лише, якщо $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$. Отже, функції x, x^3, e^x лінійно незалежні.

Загальний розвязок рівняння має вигляд: $y = C_1 x + C_2 x^3 + C_3 e^x$ (9).

Продиренціювавши його тричі, отримаємо:

$$\begin{cases} y' = C_1 + 3C_2 x^2 + C_3 e^x, \\ y'' = 6C_2 x + C_3 e^x, \\ y''' = 6C_2 + C_3 e^x. \end{cases} \qquad (10)$$

Розв'язавши систему (10) відносно C_1, C_2, C_3 і підставивши їхні значення в (9), отримаємо шукане диференціальне рівняння:

$$y'''\left(2x^3 - 6x^2 + 6x\right) + y''\left(-2x^3 + 6x - 6\right) + y'\left(6x^2 - 6x\right) + y\left(6 - 6x\right) = 0.$$

Особливою точкою цього диференціального рівняння буде $x=0$.

Складемо визначник Вронського для функцій

$$W\left[x, x^2, e^x\right] = \begin{vmatrix} x & x^2 & e^x \\ 1 & 3x^2 & e^x \\ 0 & 6x & e^x \end{vmatrix} = xe^x(2x^2 - 6x + 6).$$

Він перетворюється в нуль при $x=0$. ◄

Нехай задано лінійне однорідне диференціальне рівняння другого порядку $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0;$ *де* $p(x)$ *і* $q(x)$- *неперервні на* $(a;b)$

функції, $y_1(x)$ *частинний розв'язок цього рівняння такий, що* $y_1(x) \neq 0$ *для* $\forall x \in (a;b)$. *Загальний розв'язок можна знайти за формулою Абеля:*

$$y(x) = C_1 y_1 + C_2 y_1(x) \int \frac{e^{-\int P(x)dx}}{y_1^2(x)} dx \qquad (11)$$

де C_1, C_2 *- довільні сталі.*

Приклад 6. *Знайти загальний розв'язок ЛОДР, коли відомий нетривіальний частинний розв'язок:* $y'' + 4xy' + (4x^3 + 2)y = 0$, $y_1(x) = e^{-x^2}$.

► Очевидно, що функції $p(x) = 4x$, $q(x) = 4x^3 + 2$ неперервні на всій множині дійсних чисел, крім того $y_1(x) \neq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$.
Знайдемо загальний розв'язок, скориставшись формулою Абеля (11):

$$y(x) = C_1 \cdot e^{-x^2} + C_2 \cdot e^{-x^2} \int \frac{e^{-\int 4xdx}}{\left(e^{-x^2}\right)^2} dx =$$

$$= C_1 \cdot e^{-x^2} + C_2 \cdot e^{-x^2} \cdot \int \frac{e^{-2x^2}}{e^{-2x^2}} dx = C_1 e^{-x^2} + C_2 e^{-x^2} \cdot \int dx = C_1 \cdot e^{-x^2} + C_2 \cdot e^{-x^2} x$$

Отже, $y(x) = e^{-x^2}(C_1 + C_2 x)$. ◄

Приклад 7.
Знайти загальний розв'язок ЛОДР $xy'' + 2y' + xy = 0$, *коли відомий нетривіальний частинний розв'язок* $y_1(x) = \dfrac{\sin x}{x}$.

► Зведемо задане рівняння до вигляду $y'' + p(x)y' + q(x) = 0$, поділивши на x $(x \neq 0)$ ліву і праву частину рівняння:

$$xy'' + 2y' + xy = 0,$$

Функції $p(x) = \dfrac{2}{x}$, $q(x) = 1$ неперервні на $(-\infty;0) \cup (0;+\infty)$, крім того $y_1(x) \neq 0$, $\forall x \in (-\infty;0) \cup (0;+\infty)$. Знайдемо загальний розв'язок, скориставшись формулою Абеля (11):

$$y(x) = C_1 \cdot \frac{\sin x}{x} + C_2 \cdot \frac{\sin x}{x} \cdot \int \frac{e^{-\int \frac{2}{x} dx}}{\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2} dx = C_1 \cdot \frac{\sin x}{x} + C_2 \cdot \frac{\sin x}{x} \cdot \int \frac{e^{-2\ln x}}{\frac{\sin^2 x}{x^2}} dx =$$

$$= C_1 \cdot \frac{\sin x}{x} + C_2 \cdot \frac{\sin x}{x} \cdot \int \frac{\frac{1}{x^2}}{\frac{\sin^2 x}{x^2}} dx = C_1 \frac{\sin x}{x} + C_2 \frac{\sin x}{x} \cdot \int \frac{dx}{\sin^2 x} =$$

$$= C_1 \frac{\sin x}{x} + C_2 \frac{\sin x}{x} ctgx = C_1 \frac{\sin x}{x} + C_2 \frac{\cos x}{x}.$$

Отже, $y(x) = \frac{1}{x}(C_1 \sin x + C_2 \cos x)$. ◄

Приклад 8. *Знайти загальний розв'язок рівняння Ейлера*

$$x^3 y''' - 2x^2 y'' - 3xy' - 5y = 0. \tag{12}$$

► Зведемо задане рівняння до ЛОДР зі сталими коефіцієнтами, ввівши підстановку

$$x = e^t.$$

Знаходимо $y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx}$, де $\frac{dt}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dt}} = \frac{1}{e^t}$, тоді

$$y' = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{1}{e^t}; \tag{13}$$

$$y'' = \frac{d(y')}{dx} = \frac{d(y')}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \left(\frac{d^2 y}{dt^2} \cdot \frac{1}{e^t} - \frac{dy}{dt} \cdot \frac{1}{e^t} \right) \cdot \frac{1}{e^t},$$

тобто

$$y'' = \left(\frac{d^2 y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} \right) \cdot \frac{1}{e^t}; \tag{14}$$

$$y''' = \frac{d(y'')}{dx} = \frac{d(y'')}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \left[\left(\frac{d^3 y}{dt^3} - \frac{d^2 y}{dt^2} \right) \cdot \frac{1}{e^{2t}} - 2\left(\frac{d^2 y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} \right) \cdot \frac{1}{e^{2t}} \right] \cdot \frac{1}{e^{2t}},$$

тобто

$$y''' = \left[\frac{d^3 y}{dt^3} - 3\frac{d^2 y}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt} \right] \cdot \frac{1}{e^{3t}}. \tag{15}$$

Тоді рівняння (12) набуде вигляду:

$$e^{3t} \cdot \underbrace{\left[\frac{d^3 y}{dt^3} - 3\frac{d^2 y}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt} \right] \cdot \frac{1}{e^{3t}}}_{y'''_{ttt}} - 2 \cdot e^{2t} \cdot \underbrace{\left(\frac{d^2 y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} \right) \cdot \frac{1}{e^{2t}}}_{y''_{tt}} - 3 \cdot e^t \cdot \underbrace{\frac{dy}{dt} \cdot \frac{1}{e^t}}_{y'_t} - 5y = 0,$$

$$\frac{d^3 y}{dt^3} - 5\frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{dy}{dt} - 5y = 0. \tag{16}$$

Рівняння (16) є лінійним однорідним диференціальним рівнянням 3-го порядку. Складемо характеристичне рівняння:

$$k^3 - 5k^2 + k - 5 = 0,$$
$$(k-5)k^2 + k - 5 = 0,$$
$$(k^2+1)(k-5) = 0,$$
$$\left[\begin{array}{l} k^2+1=0, \\ k-5=0; \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} k_{1,2} = \pm i; \\ k_3 = 5. \end{array}\right.$$

Загальний розв'язок рівняння (16): $y = C_1 \cos t + C_2 \sin t + C_3 e^{5t}$.

Оскільки $x = e^t$, то $t = \ln x$. Тоді загальний розв'язок рівняння (2) має вигляд: $y = C_1 \cos \ln x + C_2 \sin \ln x + C_3 x^5$. ◄

Приклад 8. *Знайти загальний розв'язок рівняння*

$$y'' - \frac{3}{x} y' + \frac{4}{x^2} y = x \ln x. \tag{17}$$

► Зведемо задане рівняння (17) до рівняння Ейлера, помноживши ліву і праву частину на x^2:

$$x^2 y'' - 3xy' + 4y = x^3 \ln x. \tag{18}$$

Отримане рівняння зведемо до ЛНДР зі сталими коефіцієнтами використавши підстановку $x = e^t$, та врахувавши, що

$$y' = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{1}{e^t}, \tag{13}$$

$$y'' = \left(\frac{d^2 y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} \right) \cdot \frac{1}{e^{2t}} \tag{14},$$

отримаємо:

$$e^{2t} \cdot \left(\frac{d^2 y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} \right) \cdot \frac{1}{e^{2t}} - 3 \cdot e^t \cdot \frac{dy}{dt} \cdot \frac{1}{e^t} + 2y = te^{3t},$$

або

$$\frac{d^2 y}{dt^2} - 4\frac{dy}{dt} + 4y = te^{3t}. \tag{19}$$

Рівняння (18) є лінійним неоднорідним диференціальним рівнянням 2-го порядку загальний розв'язок якого має вигляд:

$$y_{з.н.} = y_{з.о.} + y_{ч.н.} = C_1 e^{2t} + C_2 t e^{2t} + (t+1)e^{3t}.$$

Підставивши в останню рівність $t = \ln x$, отримаємо загальний розв'язок рівняння (17):

$$y = C_1 x^2 + C_2 x^2 \ln x + (1 + \ln x) x^3. \text{ ◄}$$

Завдання для самостійного розв'язання

1. Визначити, чи системи функцій лінійно залежні:

1.1. $y_1 = x$, $y_2 = x^2$, $y_3 = x^3$

1.2. $y_1 = e^{2x} \sin 3x$, $y_2 = e^{2x} \cos 3x 2x + 3$.

2. Довести лінійну залежність вказаних функцій:

2.1. $y_1 = a$, $y_2 = \cos^2 x$, $y_3 = \sin^2 x$

2.2. $y_1 = x$, $y_2 = 2x$, $y_3 = x^2$

2.3. $y_1 = \sin x$, $y_2 = \sin\left(x + \frac{\pi}{8}\right)$, $y_3 = \sin\left(x - \frac{\pi}{8}\right)$.

3. Знайти визначник Вронського для заданих систем функцій:

3.1. e^x, $2e^x$, e^{-x}

3.2. $\frac{1}{x}, e^{\frac{1}{x}},$

3.3. π, $\arcsin x$, $\arccos x$,

3.4. $\begin{cases} 0, & 0 \le x \le 1, \\ (x-1)^2, & 1 < x \le 2, \end{cases}$ $\begin{cases} (x-1)^2, & 0 \le x \le 1, \\ 0, & 1 < x \le 2, \end{cases}$

3.5 $\sin x$, $\sin\left(x + \frac{\pi}{8}\right)$, $\sin\left(x - \frac{\pi}{8}\right)$, $x \in \mathbb{R}$;

3.6 2π, $\operatorname{arctg} \frac{x}{2\pi}$, $\operatorname{arcctg} \frac{x}{2\pi}$, $x \in \mathbb{R}$;

3.7 $y_k(x) = x^k$, $k = \overline{0, n}$, $x \in \mathbb{R}$.

4. Скласти диференціальне рівняння по заданій фундаментальній системі розв'язків:

4.1. $x, \cos x, \sin x.$ 4.2. e^x, xe^x 4.3. $2x, x-2, e^x$.

5. Скласти однорідне лінійне диференціальне рівняння, якщо задана фундаментальна система розв'язків:

5.1. $y_1 = e^{-x}$, $y_2 = e^x$;

5.2. $y_1 = e^x$, $y_2 = xe^x$, $y_3 = x^2 e^x$;

5.3. $y_1 = \sin 3x$, $y_2 = \cos 3x$;

5.4. $y_1 = \cos^2 x$, $y_2 = \sin^2 x$;

5.5. $y_1 = e^x$, $y_2 = xe^x$;

5.6. $y_1 = e^x$, $y_2 = e^x \cos x$, $y_3 = e^x \sin x$.

6. Знаючи фундаментальну систему розв'язків лінійного однорідного диференціального рівняння $y_1 = x,\quad y_2 = x^2,\quad y_3 = x^3,$ знайти його частинний розв'язок y, який задовольняє початковим умовам $y(1)=0,$ $y'(1)=-1,\ y''(1)=2.$

Практичне заняття № 3

Тема: ***Лінійні однорідні диференціальні рівняння вищих порядків зі сталими коефіцієнтами***

Контрольні запитання

1. *У чому полягає суть методу Ейлера інтегрування однорідних лінійних рівнянь із сталими коефіцієнтами? Як залежить структура фундаментальної системи розв'язків від виду коренів характеристичного рівняння? У якій області визначений загальний розв'язок?*

Приклад 1. *Знайти загальний розвязок рівняння* $y''' - 6y'' + 11y' - 6y = 0.$

► Шукаючи частинні розв'язки у вигляді $y = e^{kx}$, дістанемо рівняння

$$f(k) \equiv k^3 - 6k^2 + 11k - 6 = 0,$$

яке називається *характеристичним рівнянням,* а його корені – *характеристичними числами* даного рівняння. Будова характеристичного рівняння дуже проста і не потребує додаткових пояснень. Його можна завжди написати одразу.

Корені характеристичного рівняння: $k_1 = 1, k_2 = 2, k_3 = 3.$ Тому $y_1(x) = e^x,\ y_2(x) = e^{2x},\ y_3(x) = e^{3x}$ і загальний розв'язок рівняння буде

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + C_3 e^{3x}.\ ◄$$

Приклад 2. *Розв'язати рівняння* $y^V - 9y^{III} = 0.$

► Характеристичне рівняння $k^5 - 9k^3 = 0$ має корені $k_1 = k_2 = k_3 = 0, k_4 = 3, k_5 = -3.$ Коли якийсь корінь k_i характеристичного рівняння має кратність m, то йому відповідають якраз m частинних розв'язків:

$$e^{k_i x},\ xe^{k_i x},\ x^2 e^{k_i x},\ \ldots,\ x^{m-1} e^{k_i x}.$$

Отже, в даному разі частинні розв'язки будуть

$$y_1(x) = e^{0x} = 1,\ y_2(x) = xe^{0x} = x,\ y_3(x) = x^2 e^{0x} = x^2,$$

$$y_4 = e^{3x},\ y_5 = e^{-3x},$$

а тому загальний розв'язок рівняння запишеться:

$$y = C_1 \cdot 1 + C_2 x + C_3 x^2 + C_4 e^{3x} + C_5 e^{-3x}.\ ◄$$

Приклад 3. *Знайти загальний розв'язок рівняння* $y^{V} - y^{IV} + 2y''' - 2y'' + 16y' - 16y = 0.$

► Маємо

$$f(k) \equiv k^5 - k^4 + 2k^3 - 2k^2 + 16k - 16 = 0.$$

Корінь рівняння $k = 1$ - очевидний; отже,

$$k^5 - k^4 + 2k^3 - 2k^2 + 16k - 16 = (k-1)(k^4 + 2k^2 + 16) = 0$$

або

$$(k-1)(k^2+4)^2 = 0.$$

Звідси $k_1 = 1, k_2 = k_3 = 2i, k_4 = k_5 = -2i$. Частинні розв'язки будуть

$$y_1(x) = e^x,\ y_2(x) = e^{2ix},\ y_3(x) = xe^{2ix},\ y_4(x) = e^{-2ix},\ y_5(x) = xe^{-2ix}$$

або ж

$$y_1(x) = e^x, \qquad y_2(x) = \cos 2x,$$

$$y_3(x) = \sin 2x, \qquad y_4(x) = x\cos 2x,$$

$$y_5(x) = x\sin 2x.$$

Тому

$$= C_1e^x + C_2\cos 2x + C_4\sin 2x + C_3x\cos 2x + C_5x\sin 2x = C_1e^x +$$
$$+ (C_2 + C_3)\cos 2x + (C_4 + C_5x)\sin 2x. \ ◄$$

Завдання для самостійного розв'язання

1. Скласти лінійні однорідні рівняння, знаючи їх характеристичні рівняння:

1.1 $\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0;$

1.2 $\lambda(\lambda+1)(\lambda+2) = 0;$

1.3 $\lambda^3 = 0;$

1.4 $\lambda^5 - 5\lambda^4 + 12\lambda^3 - 16\lambda^2 + 12\lambda - 4 = 0.$

2. Знаючи корені характеристичного рівняння, написати загальний розв'язок однорідного рівняння:

2.1 $\lambda_{1,2} = 4, \lambda_3 = 3, \lambda_4 = 5;$

2.2 $\lambda_1 = 3 - 2i,\ \lambda_2 = 3 + 2i,\ \lambda_3 = 7;$

2.3 $\lambda_{1,2} = 2 \pm i, \lambda_{3,4} = -3 \pm 4i;$

2.4 $\lambda_{1,2,3} = 8,\ \lambda_{4,5} = 7 \pm 9i.$

3. Знайти загальні розв'язки лінійних однорідних рівнянь; знайти також частинні розв'язки там, де вказані початкові умови.

3.1. $y'' + 5y' + 4y = 0.$

3.2. $y'' - 2y' + 10y = 0.$

3.3. $y'' - a^2y = 0.$

3.4. $y''' + 3y'' - 4y' - 12y = 0.$

3.5. $y''' + 6y'' + 12y' + 8y = 0.$

3.6. $y''' - 4y' = 0.$

3.7. $y^{IV} - 13y'' + 36y = 0.$

3.8. $y^{IV} - 8y' = 0.$

3.9. $y^{IV} + 8y''' + 24y'' + 32y' + 16y = 0.$

3.10. $y^{IV} + 5y'' + 6y = 0.$

3.11. $y''' + y'' + 9y' + 9y = 0.$

3.12. $y^{V} - 3y^{IV} + 2y''' = 0.$

3.13. $y^{VI} - 9y'' = 0.$ 3.14. $y^{IV} - 2y''' + 2y' - y = 0.$

3.15. $y^{IV} - 4y''' + 4y'' = 0.$ 3.16. $y^{VI} - 5y^{V} + 4y^{IV} = 0.$

4. Знайти частинні розв'язки диференціальних рівнянь:

4.1 $y'' - 4y' + 4y = 0$ при $y(0) = 3,\ \ y'(0) = -1;$

4.2 $y'' - 4y' = 0$ при $y(0) = 7,\ \ y'(0) = 8;$

4.3 $y'' - 5y' + 4y = 0$ при $y(0) = 1,\ \ y'(0) = 1;$

4.4 $y'' + 4y' + 29y = 0$ при $y(0) = 0,\ \ y'(0) = 15;$

4.5 $y'' + y = 0$ при $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1,\ \ y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0;$

4.6 $y'' - 6y' + 9y = 0$ при $y(0) = 0,\ \ y'(0) = 2.$

Практичне заняття № 4

Тема: ***Лінійні неоднорідні диференціальні рівняння вищих порядків зі сталими коефіцієнтами (метод варіації довільних сталих).***

Контрольні запитання

1. *У чому полягає суть методу Лагранжа знаходження загального розв'язку неоднорідного лінійного рівняння?*
2. *У яких випадках і в якому виді може бути знайдено частинний розв'язок неоднорідного лінійного рівняння зі сталими коефіцієнтами методом невизначених коефіцієнтів?*

Приклад 1. *Розв'язати рівняння* $y'' + y = \mathrm{tg}^2\, x$.

► Загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння $y''+y = 0$ нам відомий: $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x$; отже, можемо застосувати спосіб варіації довільних сталих.

Складаємо систему:

$$C_1' \cos cx + C_2' \sin x = 0. \qquad -C_1' \sin x + C_2' \cos x = \mathrm{tg}^2\, x.$$

Звідси

$$C_1' = -\mathrm{tg}^2\, x \sin x, \quad C_2' = \mathrm{tg}^2\, x \cos x,$$

$$C_1(x) = -\int \mathrm{tg}^2\, x \sin x dx + \gamma_1 = -\frac{1}{\cos x} - \cos x + \gamma_1;$$

$$C_2(x) = \int \mathrm{tg}^2\, x \cos x dx + \gamma_2 = \ln \mathrm{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) - \sin x + \gamma_2.$$

Таким чином, шуканий загальний розв'язок неоднорідного рівняння буде

$$y=\left(-\frac{1}{\cos x}-\cos x+\gamma_1\right)\cos x+[\ln\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)-\sin x+\gamma_2]\sin x=$$
$$=\gamma_1\cos x+\gamma_2\sin x+\sin x\ln\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)-2. \blacktriangleleft$$

Приклад 2. *Розв'язати рівняння* $y''-4y'+5y=\dfrac{e^{2x}}{\cos x}$**.**

► Загальний розв'язок ЛОДР $y''-4y'+5y=0$:
$$y_{з.о.}=C_1e^{2x}\cos x+C_2e^{2x}\sin x.$$

Припустимо, що константи C_1, C_2 є функціями від змінної *x,* тоді загальний розв'язок ЛНДР будемо шукати у вигляді:
$$y_{з.н.}=C_1(x)e^{2x}\cos x+C_2(x)e^{2x}\sin x.$$

Для знаходження функцій $C_1(x), C_2(x)$ складаємо систему:
$$\begin{cases}C_1'(x)e^{2x}\cos x+C_2'(x)e^{2x}\sin x=0;\\ C_1'(x)\left(2e^{2x}\cos x-e^{2x}\sin x\right)+C_2'(x)\left(2e^{2x}\sin x+e^{2x}\cos x\right)=\dfrac{e^{2x}}{\cos x};\end{cases}$$
звідси
$$\begin{cases}C_1'(x)\cos x+C_2'(x)\sin x=0;\\ C_1'(x)\left(2\cos x-\sin x\right)+C_2'(x)\left(2\sin x+\cos x\right)=\dfrac{1}{\cos x}.\end{cases}$$

З цієї системи знаходимо:
$$C_2'(x)=1\Rightarrow C_2(x)=x+A;$$
$$C_1'(x)=\frac{-\sin x}{\cos x}=tgx\Rightarrow C_1(x)=\ln|\cos x|+B.$$

Отже, ЗР ЛНДР
$$y_{з.н.}=(\ln|\cos x|+B)e^{2x}\cos x+(x+A)e^{2x}\sin x. \blacktriangleleft$$

Приклад 3. *Розв'язати рівняння* $y''+4y'+4y=\dfrac{e^{-2x}}{x^3}$**.**

► Загальний розв'язок ЛОДР $y''+4y'+4y=0$:
$$y_{з.о.}=C_1e^{-2x}+C_2xe^{-2x}.$$

Припустимо, що константи C_1, C_2 є функціями від змінної *x,* тоді загальний розв'язок ЛНДР будемо шукати у вигляді:
$$y_{з.н.}=C_1(x)e^{-2x}+C_2(x)xe^{-2x}.$$

Для знаходження функцій $C_1(x), C_2(x)$ складаємо систему:

$$\begin{cases} C_1'(x)e^{-2x} + C_2'(x)xe^{-2x} = 0; \\ C_1'(x)(-2)e^{-2x} + C_2'(x)(-2xe^{-2x} + e^{-2x}) = \dfrac{e^{-2x}}{x^3}; \end{cases}$$

звідси

$$\begin{cases} C_1'(x) + C_2'(x)x = 0; \\ (-2)C_1'(x) + C_2'(x)(-2x+1) = \dfrac{1}{x^3}. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1'(x) = -\dfrac{1}{x^2}; \\ C_2'(x) = \dfrac{1}{x^3}; \end{cases}$$

звідси

$$C_1(x) = \int -\frac{1}{x^2}dx = -\int x^{-2}dx = \frac{1}{x} + A; \quad C_2(x) = \int \frac{1}{x^3}dx = \int x^{-3}dx = \frac{1}{-2x^2} + B.$$

Отже, ЗР ЛНДР

$$y_{з.н.} = (\frac{1}{x} + A)e^{-2x} + (-\frac{1}{2x^2} + B)xe^{-2x}. \blacktriangleleft$$

Завдання для самостійного розв'язання

1. Знайти загальні розв'язки лінійних неоднорідних рівнянь, використовуючи метод варіації довільних сталих:

1.1 $y'' - y = \dfrac{e^x}{1+e^x}$;

1.2 $y'' + 4y = \dfrac{1}{\cos 2x}$;

1.3 $y'' + y = ctgx$;

1.4 $y'' - y = \dfrac{\sin x\left(2 - \cos^2 x\right)}{\cos^3 x}$;

1.5 $y'' - 4y' + 5y = \dfrac{e^{2x}}{\cos x}$;

1.6 $y'' - 2y' + y = \dfrac{e^x}{\sqrt{4 - x^2}}$;

1.7 $y''' - 2y'' - y' + 2y = \dfrac{2x^3 + x^2 - 4x - 6}{x^4}$;

1.8 $y''' - 7y'' - 10y' + 16y = x^2$;

1.9 $y^{IV} + 2y'' + y = \sin x.$

2. Знайти частинні розв'язки диференціальних рівнянь, які задовольняють початковим умовам:

2.1 $y'' - 2y' = e^x\left(x^2 + x - 3\right),$ $\quad y(0) = 2,\; y'(0) = 2;$

2.2 $y'' + y = -\sin 2x,$ $\quad y(\pi) = 1,\; y'(\pi) = 1;$

2.3 $y'' - 4y' + 5y = 2x^2e^x,$ $\quad y(0) = 2,\; y'(0) = 3;$

2.4 $y'' - 2y' + 2y = 4e^x \cos x,$ $\quad y(\pi) = \pi e^{\pi},\; y'(\pi) = e^{\pi};$

2.5 $y''' - 2y'' + y' = 4(\sin x + \cos x),$ $\quad y(0) = 1,\; y'(0) = 0,\; y''(0) = -1;$

2.6 $y''' - 3y' = 3\left(2 - x^2\right),$ $\quad y(0) = y'(0) = y''(0) = 1.$

Практичне заняття № 5

Тема: ***Лінійні неоднорідні диференціальні рівняння вищих порядків зі сталими коефіцієнтами (метод невизначених коефіцієнтів).***

Інтегрування лінійного неоднорідного диференціального рівняння зі сталими коефіцієнтами $y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + \ldots + p_n y = f(x)$

Права частина диференціального рівняння	*Корені характеристичного рівняння*	*Вигляд частинного розв'язку*
$f(x) = P_m(x)$, $P_m(x)$ - многочлен степеня m	а) число 0 не є коренем характер. рівняння	$R_m(x)$, $R_m(x)$ - многочлен степеня m
	б) число 0 є коренем характер. рівняння кратності l	$x^l R_m(x)$, $R_m(x)$ - многочлен степеня m
$f(x) = e^{\alpha x} P_m(x)$, $P_m(x)$ - многочлен степеня m, α - дійсне число	а) число α не є коренем характер. рівняння	$R_m(x) e^{\alpha x}$, $R_m(x)$ - многочлен степеня m
	б) число α є коренем характеристичного рівняння кратності l	$x^l R_m(x) e^{\alpha x}$, $R_m(x)$ - многочлен степеня m
$f(x) = P_m(x)\cos\beta x + Q_n(x)\sin\beta x$ $P_m(x)$ - многочлен степеня m, $Q_n(x)$ - многочлен степеня n	а) число βi не є коренем характер. рівняння	$U_k(x)\cos\beta x + V_k(x)\sin\beta x$, де $U_k(x)$, $V_k(x)$ - многочлени степеня k, $k = \max\{m, n\}$
	б) число βi є коренем характеристичного рівняння кратності l	$x^l [U_k(x)\cos\beta x + V_k(x)\sin\beta x]$, $U_k(x)$, $V_k(x)$ - многочлени степеня k, $k = \max\{m, n\}$
$f(x) = e^{\alpha x}[P_m(x)\cos\beta x + Q_n(x)\sin\beta x]$ $P_m(x)$ - многочлен степеня m, $Q_n(x)$ - многочлен степеня n, α - дійсне число	а) число $\alpha + \beta i$ не є коренем характер. рівняння	$e^{\alpha x}[U_k(x)\cos\beta x + V_k(x)\sin\beta x]$, $U_k(x)$, $V_k(x)$ - многочлени степеня k, $k = \max\{m, n\}$
	б) число $\alpha + \beta i$ є коренем характер. рівняння кратності l	$x^l e^{\alpha x}[U_k(x)\cos\beta x + V_k(x)\sin\beta x]$, $U_k(x)$, $V_k(x)$ - многочлени степеня k, $k = \max\{m, n\}$

а) $f(x) = P_n(x)$

Приклад 1. *Розв'язати рівняння* $y'' - 4y' + 13y = x^2$.

► Характеристичне рівняння відповідного однорідного рівняння $y'' - 4y' + 13y = 0$ є $k^2 - 4k + 13 = 0$; корені його: $k_1 = 2 + 3i, k_2 = 2 - 3i$. Загальний розв'язок відповідного однорідного лінійного рівняння буде

$$y = A_1 e^{(2+3i)x} + A_2 e^{(2-3i)x} = e^{2x}(C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x).$$

Згідно з теорією частинний розв'язок $Y_0(x)$ неоднорідного рівняння шукаємо у вигляді $Y_0(x) = Ax^2 + Bx + C$ (права частина містить $e^{0\cdot x} = 1$, тобто $\alpha = 0$ і, отже, $\alpha \neq k_1 \neq k_2$).

Маємо $Y_0'(x) = 2Ax + B,\ Y_0''(x) = 2A.$ Підстановка в рівняння дає:

$$2A - 4(2Ax + B) + 13\left(Ax^2 + Bx + C\right) \equiv x^2.$$

Звідси $A = \frac{1}{13},\ B = \frac{8}{169},\ C = -\frac{6}{2197}$. Отже,

$$Y_0(x) = \frac{1}{13}x^2 + \frac{8}{169}x - \frac{6}{2197}.$$

Загальний розв'язок – сума будь-якого частинного та загального відповідного однорідного – буде

$$y = e^{2x}(C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x) + \frac{1}{13}\left(x^2 + \frac{8}{13}x - \frac{6}{169}\right). \blacktriangleleft$$

б) $f(x) = e^{\alpha x} P_n(x)$

Приклад 2. *Розв'язати рівняння* $y''' - 5y'' + 8y' - 4y = e^{2x}$.

► Загальний розв'язок ЛОДР $y''' - 5y'' + 8y' - 4y = 0$:

$$y_{з.о.} = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + C_3 x e^{2x}.$$

Оскільки $P_0(x) = 1; \alpha = 2$ - корінь характеристичного рівняння кратності 2, то частинний розв'язок ЛНДР:

$$y_{ч.н.} = Ax^2 e^{2x};$$

$$y'_{ч.н} = 2Axe^{2x} + x^2 A \cdot 2e^{2x};$$

$$y''_{ч.н} = 2A(1 + 2x)e^{2x} + 2A\left(x + x^2\right)2e^{2x} = 2A\left(2x^2 + 4x + 1\right)e^{2x};$$

$$y'''_{ч.н} = 2A\left(4x + 4\right)e^{2x} + 2A\left(2x^2 + 4x + 1\right)2e^{2x} = 2A\left(4x^2 + 12x + 6\right)e^{2x};$$

$$\underbrace{2A\left(4x^2 + 12x + 6\right)e^{2x}}_{y'''} - 5\cdot\underbrace{2A\left(2x^2 + 4x + 1\right)e^{2x}}_{y''} + 8\cdot\underbrace{2A\left(x + x^2\right)e^{2x}}_{y'} - 4\cdot\underbrace{Ax^2e^{2x}}_{y} = e^{2x};$$

поділив ліву і праву частину на e^{2x}, розкривши дужки, звівши подібні доданки, отримаємо: $A = -\frac{1}{4}$. Отже, $y_{ч.н.} = -\frac{x^2}{4}e^{2x}$; тоді

$$y_{з.н.} = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + C_3 x e^{2x} - \frac{x^2}{4}e^{2x}. \blacktriangleleft$$

в) $P_n(x)\cos\beta x + Q_n(x)\sin\beta x$

Приклад 3. *Розв'язати рівняння* $y'' + 9y = 6\cos 3x$.

► Загальний розв'язок ЛОДР $y'' + 9y = 0$:

$$y_{з.о.} = C_1\cos 3x + C_2\sin 3x.$$

Оскільки $P_0(x) = 6$, $Q_0(x) = 0$, $\alpha = 3i$ - є коренем характеристичного рівняння кратності 2, то частинний розв'язок ЛНДР шукаємо у вигляді:

$$y_{ч.н.} = x(A\cos 3x + B\sin 3x).$$

Звідси

$$y'_{ч.н} = A\cos 3x + B\sin 3x + x(-3A\sin 3x + 3B\cos 3x);$$

$$y''_{ч.н.} = -6A\sin 3x + 6B\cos 3x - 9Ax\cos 3x - 9Bx\sin 3x.$$

Підставляємо значення *y*, та першої і другої похідної в задане рівняння:

$$-6A\sin 3x + 6B\cos 3x - 9Ax\cos 3x - 9Bx\sin 3x + 9x(A\cos 3x + B\sin 3x) = 6\cos 3x;$$

зводимо подібні біля $\sin 3x$ та $\cos 3x$:

$$-6A\sin 3x + 6B\cos 3x = 6\cos 3x;$$

випишемо множники, що стоять біля $\sin 3x$ та $\cos 3x$ зліва і справа:

$$\begin{array}{l|l} \sin 3x & -6A = 0; \\ \cos 3x & 6A = 6; \end{array} \quad \text{звідси} \quad \begin{cases} B = 1; \\ A = 0. \end{cases}$$

Отже, частинний розв'язок ЛНДР:

$$y_{ч.н.} = x\sin 3x;$$

загальний розв'язок ЛНДР:

$$y_{з.н.} = C_1\cos 3x + C_2\sin 3x + x\sin 3x; \ ◄$$

г) $e^{\alpha x}\left(P_n(x)\cos\beta x + Q_n(x)\sin\beta x\right)$

Приклад 1. *Розв'язати рівняння* $y'' - 9y = e^{3x}x\cos x$.

► Загальний розв'язок ЛОДР $y'' - 9y = 0$:

$$y_{з.о.} = C_1e^{3x} + C_2e^{-3x}.$$

Оскільки $P_0(x) = 1$, $Q_0(x) = 0$, $\alpha = 3 + i$ - не є коренем характеристичного рівняння, то частинний розв'язок ЛНДР шукаємо у вигляді:

$$y_{ч.н.} = e^{3x}\left((Ax + B)\cos x + (Cx + D)\sin x\right).$$

Звідси

$$y' = 3e^{3x}\left(\left(Ax+B\right)\cos x + \left(Cx+D\right)\sin x\right) + e^{3x}\left(A\cos x + C\sin x - (Ax+B)\sin x + (Cx+D)\cos x\right);$$

$$y'' = 9e^{3x}\left(\left(Ax+B\right)\cos x + \left(Cx+D\right)\sin x\right) + 6e^{3x}\left(A\cos x + C\sin x - (Ax+B)\sin x + (Cx+D)\cos x\right) +$$

$$+e^{3x}(-2A\sin x + 2C\cos x - (Ax+B)\cos x - (Cx+D)\sin x).$$

Підставляємо значення y, та першої і другої похідної в задане рівняння:

$$9e^{3x}\left(\left(Ax+B\right)\cos x + \left(Cx+D\right)\sin x\right) + 6e^{3x}\left(A\cos x + C\sin x - (Ax+B)\sin x + (Cx+D)\cos x\right) +$$

$$+e^{3x}(-2A\sin x + 2C\cos x - (Ax+B)\cos x - (Cx+D)\sin x) - 9e^{3x}\left(\left(Ax+B\right)\cos x + \left(Cx+D\right)\sin x\right) =$$

$$= e^{3x} x\cos x;$$

скорочуємо ліву і праву частину на e^{3x}, відкриваємо дужки та групуємо:

$$\left(9A + 6C - A - 9A\right)x\cos x + \left(9B + 6A + 6D + 2C - B - 9B\right)\cos x +$$

$$+\left(9C - 6A - C - 9C\right)x\sin x + \left(9D + 6C - 6B - 2A - D - 9D\right)\sin x = x\cos x.$$

Випишемо множники, що стоять біля $x\sin x$, $\sin x$, $xcox$, $\cos x$ зліва і справа:

$$\begin{array}{r|l} x\cos x & 6C - A = 1; \\ \cos x & 6A + 6D + 2C - B = 0; \\ x\sin x & -6A - C = 0; \\ \sin x & 6C - 6B - 2A - D = 0; \end{array}$$

звідси

$$A = -\frac{1}{37},\ C = \frac{6}{37},\ D = \frac{2}{1369},\ B = \frac{234}{1369}.$$

Отже, частинний розв'язок ЛНДР:

$$y_{ч.н.} = e^{3x}\left(\left(-\frac{1}{37}x + \frac{234}{1369}\right)\cos x + \left(\frac{6}{37}x + \frac{2}{1369}\right)\sin x\right),$$

загальний розв'язок лінійного неоднорідного диференціального рівняння:

$$y_{з.н.} = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-3x} + e^{3x}\left(\left(-\frac{1}{37}x + \frac{234}{1369}\right)\cos x + \left(\frac{6}{37}x + \frac{2}{1369}\right)\sin x\right).$$ ◄

Завдання для самостійного розв'язання

1. Знайти загальні розв'язки лінійних неоднорідних рівнянь.

1.1. $y'' - y = x^2 + 1.$

1.2. $y''' - 2y'' = x - 2.$

1.3. $y'' - 4y' + 4y = xe^x.$

1.4. $y^{IV} + y'' = x^2 + x.$

1.5. $y''' - 4y' = x^2.$

1.6 $y'' - 9y = e^{3x}\cos x.$

1.7. $y^{IV} - y = 5e^x \sin x.$

1.8 $y''' - 4y'' + 5y' - 2y = 2x + 3.$

1.9. $y^V - 4y''' = x^2 - 1.$

1.10 $y'' - y = \frac{e^x}{1+e^x}.$

1.11 $y''' - 2y' + 4y = e^x \cos x + \sin 2x + x^2.$

1.12 $y''' - 3y'' + 3y' - y = 2e^x.$

1.13 $y'' - 4y = e^{2x}.$

Практичне заняття № 6

Тема: ***Розв'язування диференціальних рівнянь за допомогою степеневих рядів. Самостійна робота.***

Найбільш поширеним прийомом інтегрування рівнянь є подання шуканого розв'язку у вигляді степеневого ряду. Розглянемо рівняння другого порядку:

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0. \tag{20}$$

Припустимо, що коефіцієнти $p(x)$ *і* $q(x)$ *рівняння* (20) *є аналітичними функціями на інтервалі* $|x - x_0| < a$, *тобто на цьому проміжку розкладаються в степеневі ряди*

$$p(x) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k (x - x_0)^k, \; q(x) = \sum_{k=0}^{\infty} q_k (x - x_0)^k. \tag{21}$$

Теорема. *Якщо функції* $p(x)$ *і* $q(x)$*- аналітичні при* $|x - x_0| < a$, *то будь-який розв'язок* $y = y(x)$ *рівняння (20) є аналітичним при* $|x - x_0| < a$, *тобто розкладається в степеневий ряд* $y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$, *який збігається при* $|x - x_0| < a$.

Ця теорема дає можливість проінтегрувати рівняння (20), тобто побудувати розв'язок цього рівняння у вигляді степеневого ряду. Для цього шукають розв'язки рівняння (20) у вигляді ряду за степенями x *з невизначеними коефіцієнтами, поклавши* $x_0 = 0$*:*

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k.$$

Контрольні запитання

1. *При якій умові лінійне однорідне рівняння другого порядку має частинний розв'язок, що задовольняє заданим початковим умовам і можна подати у вигляді степеневого ряду за степенями різниці x-x_0, де x_0 -початкове значення незалежної змінної? Як можна вибирати початкове значення шуканої функції і її похідних? У чому суть методу невизначених коефіцієнтів, чому рівні вільний член і коефіцієнт при x-x_0, як визначаються інші коефіцієнти? У якій*

області збігається ряд, що є розв'язком?

2. *Як знайти загальний розв'язок лінійного однорідного рівняння другого порядку за допомогою степеневих рядів?*

Приклад 1. *Знайти розв'язок рівняння* $y'' + xy = 0$.

I метод

► Нехай при $x = 0$: $y = C_0$, $y' = C_1$. Виконаємо послідовне диференціювання:

$$y'' + xy = 0$$
$$y''' + xy' - y = 0 - 1 \cdot C_0 = -C_0,$$
$$y^{(4)} = -xy'' - 2y' = -2C_1,$$
$$y^{(5)} = -xy''' - 3y'' = 0,$$
$$y^{(6)} = -xy^{(4)} - 4y''' = 4C_0,$$
$$y^{(7)} = -xy^{(5)} - 5y^{(4)} = 10C_1$$
$$y^{(8)} = -xy^{(6)} - 6y^{(5)} = 0,$$
$$y^{(9)} = -xy^{(7)} - 7y^{(4)} = -28C_0,$$
$$y^{(10)} = -xy^{(8)} - 8y^{(7)} = -80C_1.$$

Підставимо ці значення в ряд Маклорена:

$$y(x) = y(0) + \frac{y'(0)}{1!}x + \frac{y''(0)}{2!}x^2 + \frac{y'''(0)}{3!}x^3 + \frac{y^{IV}(0)}{4!}x^4 + \ldots + +\frac{y^{IV}(0)}{n!}x^n + \ldots =$$

$$= C_0 + C_1 x - C_0\frac{x^3}{3!} + C_1\frac{2x^4}{4!} + C_0\frac{1\cdot 4\cdot x^6}{6!} + C_1\frac{2\cdot 5\cdot x^7}{7!} + \ldots =$$

$$= C_0\left(1 - \frac{x^3}{3!} + \frac{2x^4}{4!} + \frac{1\cdot 4\cdot x^6}{6!} + C_1\frac{1\cdot 7\cdot x^9}{9!} + \ldots\right) + C_1 x\left(1 - \frac{2}{4!}x^3 + \frac{2\cdot 5}{7!}x^6 - \frac{2\cdot 5\cdot 8}{10!}x^9 + \ldots\right) =$$

$$= C_0\sum_0^{\infty}\frac{(-1)^n x^{3n}(3n-2)!}{(3n)!} + C_1 x\sum_0^{\infty}\frac{(-1)^n x^{3n}(3n-1)!}{(3n+1)!}.$$

Отримали загальний інтеграл заданого диференціального рівняння у вигляді нескінченного ряду. Цей розв'язок має зміст, коли ряд збіжний. Застосовуючи ознаку збіжності Д'Аламбера, можна показати , що ряд збігається при $\forall x$. ◄

II метод

► Шукаємо розв'язок даного рівняння у вигляді: $y = \sum_0^{\infty} C_k x^k$.

Підставивши $y=\sum_0^\infty C_k x^k$, $y'=\sum_1^\infty kC_k x^{k-1}$, $y''=\sum_2^\infty k(k-1)C_k x^{k-2}$ у задане рівняння, отримаємо:

$$\sum_2^\infty k(k-1)C_k x^{k-2}+x\sum_0^\infty C_k x^k=0.$$

Прирівняємо до 0 коефіцієнти при однакових степенях x, отримаємо систему рівнянь для визначення C_k:

$$x^0: 2\cdot 1\cdot C_2=0,$$
$$x^1: 3\cdot 2\cdot C_3+C_0=0,$$
$$x^2: 4\cdot 3\cdot C_4+C_1=0,$$
$$x^3: 5\cdot 4\cdot C_5+C_2=0,$$
$$x^4: 6\cdot 5\cdot C_6+C_3=0,$$
$$x^5: 7\cdot 6\cdot C_7+C_4=0,$$
$$x^6: 8\cdot 7\cdot C_8+C_5=0,$$
…………………..
$$x^k: k(k-1)\cdot C_{k+2}+C_{k-1}=0,$$
…………………

З цих рівнянь знаходимо:

$$C_2=0,\qquad C_5=-\frac{C_2}{4\cdot 5}=0,\qquad C_8=-\frac{C_5}{7\cdot 8}=0,$$

$$C_3=-\frac{C_0}{2\cdot 3},\quad C_6=-\frac{C_3}{5\cdot 6}=\frac{C_0}{2\cdot 3\cdot 5\cdot 6},\quad C_9=-\frac{C_6}{8\cdot 9}=-\frac{C_0}{2\cdot 3\cdot 5\cdot 6\cdot 8\cdot 9},$$

$$C_4=-\frac{C_1}{3\cdot 4},\quad C_7=-\frac{C_4}{6\cdot 7}=\frac{C_1}{3\cdot 4\cdot 6\cdot 7},\quad C_{10}=-\frac{C_7}{9\cdot 10}=-\frac{C_1}{3\cdot 4\cdot 6\cdot 7\cdot 9\cdot 10}.$$

З останніх рівностей бачимо, що C_2, C_5, $C_8,\ldots,C_{3k+2}$, … рівні 0, тобто $C_{3k+2}=0$, $k=0,1,2,...$

Коефіцієнти C_3, $C_6,\ldots,C_{3k}$, … виражаються через коефіцієнт C_0:

$$C_{3k}=-\frac{(-1)^k}{(3k-1)\cdot 3k}\cdot C_0,\ k=1,2,...$$

Коефіцієнти C_4, $C_7,\ldots,C_{3k+1}$, … виражаються через коефіцієнт C_1:

$$C_{3k+1}=-\frac{(-1)^k}{3k\cdot(3k+1)}\cdot C_1,\ k=1,2,...$$

Покладемо $C_0=1$, $C_1=0$, тоді відмінні від 0 лише коефіцієнти C_{3k}:

$$C_{3k} = -\frac{(-1)^k}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8\cdot 9\cdot\ldots\cdot(3k-1)\cdot 3k},\ k=1,2,\ldots$$

Побудований один розв'язок:

$$y_1(x) = 1 + \sum_1^\infty \frac{(-1)^k x^{3k}}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8\cdot 9\cdot\ldots\cdot(3k-1)\cdot 3k}.$$

Другий розв'язок, лінійно незалежний зі знайденим, отримаємо при $C_0 = 0,\ C_1 = 1$.Тоді відмінні від 0 будуть коефіцієнти C_{3k+1}:

$$C_{3k+1} = -\frac{(-1)^k}{3\cdot 4\cdot 6\cdot 7\cdot 9\cdot 10\cdot\ldots\cdot 3k(3k+1)},\ k=1,2,\ldots$$

Отже,

$$y_2 = x + \sum_1^\infty \frac{(-1)^k x^{3k+1}}{3\cdot 4\cdot 6\cdot 7\cdot 9\cdot 10\cdot\ldots\cdot 3k(3k+1)}.$$

Ряди, що представляють y_1 та y_2 збігаються при $\forall x$ і є аналітичними функціями.

ЗРДР:

$$y = C_1\left(1 + \sum_1^\infty \frac{(-1)^k x^{3k}}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8\cdot 9\cdot\ldots\cdot(3k-1)\cdot 3k}\right) + C_2\left(x + \sum_1^\infty \frac{(-1)^k x^{3k+1}}{3\cdot 4\cdot 6\cdot 7\cdot 9\cdot 10\cdot\ldots\cdot 3k(3k+1)}\right). ◄$$

Приклад 2. *Знайти розв'язок рівняння* $y'' + xy' + y = 0$.

► Шукаємо розв'язок даного рівняння у вигляді :

$$y = \sum_0^\infty C_k x^k.$$

Підставивши $y = \sum_0^\infty C_k x^k,\quad y' = \sum_1^\infty kC_k x^{k-1},\quad y'' = \sum_2^\infty k(k-1)C_k x^{k-2}$ у задане рівняння, отримаємо:

$$\sum_2^\infty k(k-1)C_k x^{k-2} + x\sum_0^\infty C_k x^k = 0,$$

або

$$\left(2C_2x^0 + 3\cdot 2\cdot C_3x + 4\cdot 3\cdot C_4x^2 + 5\cdot 4\cdot C_5x^3 + \ldots\right) +$$
$$+ x\left(C_1x^0 + 2C_2x + 3C_3x^2 + \ldots\right) + \left(C_0x^0 + C_1x + C_2x^2 + C_3x^3 + \ldots\right) = 0$$

Прирівняємо до 0 коефіцієнти при однакових степенях x:

$$x^0:\ 2C_2 + C_0 = 0,$$

$$x^1: 2\cdot 3\cdot C_3 + 2C_1 = 0, \text{ або } 3\cdot C_3 + C_1 = 0$$

$$x^2: 3\cdot 4\cdot C_4 + 3C_2 = 0\ . \text{ або } 4\cdot C_4 + C_2 = 0$$

$$x^3: 4\cdot 5\cdot C_5 + 4C_3 = 0 \text{ . або } 5C_5 + C_3 = 0$$

…………………………………

$$x^k: (k+2)(k+1)\cdot C_{k+2} + (k+1)C_k = 0, \text{ або } (k+2)C_{k+2} + C_k = 0$$

Отриману систему рівнянь можна записати у вигляді:

$$C_2 = -\frac{C_0}{2}, \qquad C_3 = -\frac{C_1}{3},$$

$$C_4 = -\frac{C_2}{4} = \frac{C_0}{2\cdot 4}, \qquad C_5 = -\frac{C_3}{5} = \frac{C_1}{3\cdot 5},$$

………………… ………………..

Коефіцієнти C_4, …, C_{2k},…. виражаються через C_0:

$$C_{2k} = -\frac{(-1)^k}{2\cdot 4\cdot 6\cdot ...2k} = \frac{(-1)^k}{2^k\cdot k!}, k = 1,2....$$

Коефіцієнти C_3, C_5 …, C_{2k+1},…. виражаються через C_1:

$$C_{2k+1} = -\frac{(-1)^k}{3\cdot 5\cdot ...(2k+1)}, k = 1,2....$$

Покладемо $C_0 = 1$, $C_1 = 0$, тоді відмінні від 0 лише коефіцієнти C_{2k}:

$$C_{2k} = -\frac{(-1)^k}{2\cdot 4\cdot 6\cdot ...2k}, k = 1,2....$$

Отже, перший частинний розв'язок:

$$y_1(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{2\cdot 4} - \frac{x^6}{2\cdot 4\cdot 6} + ... + \frac{(-1)^k x^{2k}}{2\cdot 4\cdot 6...(2k)} + ... = e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Другий розв'язок, лінійно незалежний з $y_1(x)$, знайдемо, поклавши $C_0 = 0$, $C_1 = 1$, тоді відмінні від 0 лише коефіцієнти C_{2k+1}:

$$C_{2k+1} = -\frac{(-1)^k}{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot ...\cdot (2k+1)},\ k = 1,2....$$

Отже,

$$y_2 = x - \frac{x^3}{1\cdot 3} + \frac{x^5}{1\cdot 3\cdot 5} - \frac{x^7}{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7} + ... + \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7...(2k+1)} = \sum_0^{\infty}\frac{(-1)^k x^{2k+1}}{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7...(2k+1)}.$$

Ряди, що представляють y_1 та y_2 збігаються при $\forall x$ і є аналітичними функціями.

Тому ЗРДР:

$$y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) = C_1 e^{-\frac{x^2}{2}} + C_2\sum_0^{\infty}\frac{(-1)^k x^{2k+1}}{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7...(2k+1)}. \blacktriangleleft$$

Завдання для самостійного розв'язання

1. **1.** Знайти перших три члени розкладу в степеневий ряд частинного інтегралу диференціального рівняння, що задовольняє початковим умовам:

1.1 $y' - y^2 = x(x+1),\ \ y(0) = 1;$ 1.2 $y' + y^2 = e^x,\ \ y(0) = 0.$

2. Знайти перших чотири члени розкладу в степеневий ряд частинного інтегралу диференціального рівняння, що задовольняє початковим умовам:

2.1 $y'' - y\cos x = x,\ \ y(0) = 1,\ \ y'(0) = 0;$

2.2 $y'' - y'\sin x + y = 1,\ \ y(0) = y'(0) = 1.$

2.3 $y'' + xy' + y = 0,\ \ y(0) = 0,\ \ y'(0) = 1;$

2.4 $y'' = x^2 y,\ \ y(0) = y'(0) = 1;$

2.5 $y'' + y' - x^2 y = 0,\ \ y(0) = 1,\ \ y'(0) = 0;$

2.6 $y'' - xy' = y,\ \ y(0) = 1,\ \ y'(0) = 0.$

3. Проінтегрувати дані рівняння за допомогою степеневих рядів:

3.1 $y'' - xy' - 2y = 0;$ 3.2 $y'' + xy' + y = 0;$

3.3 $(1 - x^2)y'' - 4xy' - 2y = 0;$ 3.4 $y'' - ye^x = 0.$

Самостійна робота (30 балів)

Завдання 1. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння, що допускає пониження порядку:

а) $(1 - x^2)y'' - xy = 2$; б) $y'' = y'e^y$.

Завдання 2. Розв'язати диференціальне рівняння методом варіації довільної сталої: $y'' - y = \dfrac{e^x}{e^x + 1}$

Завдання 3. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння $y''' - 4y'' + 5y' - 2y = (16 - 12x)e^{-x}$.

Завдання 4. Знайти частинний розв'язок диференціального рівняння, що задовольняє початковим даним:

$y'' - 2y' + y = -12\cos 2x - 9\sin 2x,\ y(0) = -2,\ y'(0) = 0$.

Практичне заняття № 7

Тема: ***Застосування звичайних диференціальних рівнянь до дослідження процесів реальної дійсності.***

Завдання для самостійного розв’язання

1 [4]. В точці $(1;-2)$ дотична до кривої паралельна осі Ox. В довільній точці цієї кривої радіус кривизни R дорівнює квадрату абсциси цієї точки. Скласти рівняння кривої.

2 [4]. Радіус кривизни у довільній точці кривої дорівнює кубу довжини відрізка нормалі в цій точці. Скласти рівняння кривої, знаючи, що вона проходить через точку $(0;1)$ і в цій точці дотична до кривої паралельна осі Ox.

3 [4]. Визначити криві, у яких радіус кривизни дорівнює довжині нормалі.

4 [4]. Знайти криві, у яких радіус кривизни пропорційний довжині нормалі. Прийняти коефіцієнт пропорційності $k=-1,1,2$.

5 [4]. Водій трамваю, включаючи поступово реостат, збільшує потужність вагонного двигуна таким чином, що сила тяги зростає на 120 кг протягом кожної секунди. Знайти закон руху вагона при таких даних: вага вагона $P=10$ т, опір тертя сталий і дорівнює 200 кГ, початкова швидкість дорівнює нулю.

6 [4]. Важке тіло без початкової швидкості ковзає по похилій площині. Знайти закон тертя, якщо кут нахилу дорівнює α, а коефіцієнт тертя μ.

7 [4]. Моторний човен вагою 300 кГ рухається прямолінійно з початковою швидкістю 66 м/с. Опір води пропорційний швидкості і дорівнює 10 кГ при швидкості 1 м/с. Через який час швидкість буде дорівнювати 8 с/м?

8 [4]. Матеріальна точка маси m рухається вздовж прямої під дією сили ньютонівського притягання до маси M, розміщеної в початку координат. На початку руху вона знаходилась в точці $A(x_0)$ і її початкова швидкість дорівнювала v_0. Якою повинна бути початкова швидкість, щоб відстань від рухомої точки до початку координат могла необмежено зростати (друга космічна швидкість)? Виразити другу космічну швидкість через x_0 і a – прискорення сили тяжіння в точці $A(x_0)$.

9 [4]. Матеріальна точка маси m падає під дією сили тяжіння. Знайти закон руху точки, якщо опір повітря падінню пропорційний квадрату швидкості. Точка початково знаходилась в $A(x_0)$ і її початкова швидкість дорівнювала нулю.

10 [4]. Локомотив рухається по горизонтальній ділянці шляху зі швидкістю 72 км/год. В який час і на якій відстані він буде зупинений гальмом, якщо опір руху після початку гальмування дорівнює 0,2 його ваги.

11 [4]. Сила, яка притягує пружину, пропорційна збільшенню її довжини і дорівнює 1 кг, коли довжина збільшилась на 1 см. До пружини підвішено вантаж вагою 2 кг. Знайти період коливального руху, яке отримає цей вантаж, якщо його трохи відтягнути донизу і потім відпустити.

12 [4]. Сила пропорційна зміщенню і дорівнює 2 кг при зміщенні в 1 м. Опір середовища пропорційний швидкості. Амплітуда після трьох коливань зменшується в 10 разів. Знайти період коливання.

13 [4]. Матеріальна точка з масою m притягується кожним з двох центрів з силою, пропорційною відстані. Коефіцієнт пропорційності k. Відстань між центрами $2b$. В початковий момент точка знаходиться на лінії центрів на відстані c від її середини. Початкова швидкість дорівнює нулю. Знайти закон руху.

14 [4]. Ланцюг, який висить на гладкому крючку, зісковзує вниз. На початку руху по одну сторону крючка звисає 10 м ланцюга, а по другу 8 м. Не враховуючи опору, знайти: 1) через який час з крючка зісковзує весь ланцюг і 2) якою буде швидкість ланцюга в початковий момент її вільного падіння.

Практичне заняття № 8

Тема: ***Лінійні системи диференціальних рівнянь. Розв'язування систем лінійних диференціальних рівнянь попередньо звівши їх до лінійного ДР вищого порядку.***

Контрольні запитання

1. *Який загальний вид має нормальна система дифференціальних рівнянь? Як визначають її порядок? Коли ця система називається лінійною? Що називається розв'язком (інтегральною кривою) нормальної системи n-го порядку?*
2. *Як ставиться задача Коші для нормальної системи? У якому випадку вона має розв'язок? Коли цей розв'язоку буде єдиним?*

3. Що таке загальний розв'язок нормальної системи n-го порядку?

4. Яке розв'язок називається частинним, особливим? У якому випадку нормальна система не має особливих розв'язків?

5. У чому полягає механічне тлумачення нормальної системи і її розв'язку? У чому полягає механічне тлумачення задачі Коші? Що таке точка рівноваги?

Приклад 1. *Розв'язати ЛСДР*

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = y_1 - y_2, \\ \dfrac{dy_2}{dx} = 2y_1 + 3y_2. \end{cases} \qquad (22)$$

► Розв'яжемо задану систему, звівши її до лінійного ДР 2-го порядку відносно функції y_1. Для цього продиференціюємо перше рівняння по змінній x, пам'ятаючи, що y_1, y_2 є функції від x, дістанемо $y_1'' = y_1' - y_2'$. Підставимо в останню рівність значення y_2' із другого рівняння, тоді

$$y_1'' = y_1' - 2y_1 - 3y_2.$$

Визначивши y_2 з першого рівняння системи:

$$-y_2 = y_1' - y_1, \qquad (23)$$

і підставивши в останнє рівняння, після зведення подібних, отримаємо лінійне однорідне ДР 2-го порядку:

$$y_1'' + 2y_1' - y_1 = 0.$$

Розв'язок цього рівняння має вигляд

$$y_1 = e^{2x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x).$$

Підставивши отримане значення $y_1 = e^{2x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x)$ та $y_1' = e^{2x}((2C_1 + C_2)\cos x + (2C_2 - C_1)\sin x)$ в (23), знаходимо

$$y_2 = -e^{2x}[(C_1 + C_2)\cos x + (C_2 - C_1)\sin x].$$

З цих формул бачимо, що лінійно незалежними розв'язками системи (23) є вектори

$$\overline{y_1} = \begin{bmatrix} e^{2x}\cos x \\ -e^{2x}(\cos x - \sin x) \end{bmatrix}; \quad \overline{y_2} = \begin{bmatrix} e^{2x}\sin x \\ -e^{2x}(\cos x + \sin x) \end{bmatrix}. \text{ ◄}$$

Завдання для самостійного розв'язання

1. Розв'язати системи лінійних диференціальних рівнянь звівши їх до лінійних диференціальних рівнянь вищого порядку і вилучити, де це вказано, розв'язок, що задовольняє початкові умови.

1.1. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y, \\ \dfrac{dy}{dt} = -x. \end{cases}$.

1.2. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - 5y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 2x - y. \end{cases}$

1.3. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -3x - y, \\ \dfrac{dy}{dt} = x - y. \end{cases}$

1.4. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -3x - 4y, \\ \dfrac{dy}{dt} = -2x - 5y. \end{cases}$

1.5. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y + z, \\ \dfrac{dy}{dt} = x + z, \\ \dfrac{dz}{dt} = x + y. \end{cases}$

1.6. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -x - y + t^2, \\ \dfrac{dy}{dt} = -y - z + 2t, \\ \dfrac{dz}{dt} = -z + t. \end{cases}$

1.7. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y - z, \\ \dfrac{dy}{dt} = x + y + t, \\ \dfrac{dz}{dt} = x + z - t. \end{cases}$

Практичне заняття № 9

Тема: ***Лінійні однорідні системи диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами.***

Розв'язання однорідних систем лінійних диференціальних рівнянь за допомогою характеристичного рівняння системи (з використанням метода Ейлера)

Контрольні запитання

1. *Який загальний вигляд має лінійна система? Коли вона називається однорідною?*
2. *За якої умови задача Коші для лінійної системи має єдиний розв'язок? У якому інтервалі існують розв'язки? Чому лінійна система не має особливих розв'язків?*
3. *Які розв'язки однорідної лінійної системи називаються лінійно незалежними? Що таке фундаментальна система розв'язків? Чи може нульовий розв'язок входити до складу фундаментальної системи розв'язків? Яка умова є необхідною і достатньою для того, щоб дана система розв'язків була фундаментальною?*

Скільки фундаментальних систем розв'язків має задана однорідна лінійна система?

4. *Як побудувати загальний розв'язок однорідної лінійної системи, якщо відомо фундаментальну систему розв'язків? У якій області визначений загальний розв'язок? Як розв'язати задачу Коші за допомогою формули загального розв'язку?*
5. *У чому полягає метод Ейлера інтегрування однорідних лінійних систем зі сталими коефіцієнтами? Як залежить структура фундаментальної системи розв'язків від виду коренів характеристичного рівняння?*

Приклад 1. *Розв'язати ЛОСДР*

$$\begin{cases} x' = 2x + 2y, \\ y' = x + 3y. \end{cases}$$

► Будемо шукати частинні розв'язки у вигляді $x = ae^{kt}$, $y = be^{kt}$, де k - власне значення матриці $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, вектор $\vec{r}(a, b)$ - власний вектор числа k. Підставимо $x = ae^{kt}$, $y = be^{kt}$, $x' = ake^{kt}$, $y' = bke^{kt}$ в задану систему:

$$\begin{cases} ake^{kt} = 2ae^{kt} + 2be^{kt}, \\ bke^{kt} = ae^{kt} + 3be^{kt}. \end{cases}$$

Скоротимj ліву і праву частину рівнянь системи на e^{kt}, та зведемо подібні за змінними a, b:

$$\begin{cases} (2-k)a + \quad 2b = 0, \\ \quad a + (3-k)b = 0. \end{cases} \tag{24}$$

Ми отримали лінійну однорідну систему рівнянь. Вона має нетривіальний розв'язок, якщо її визначник, складений з коефіцієнтів біля змінних a, b, дорівнює нулю:

$$\begin{vmatrix} 2-k & 2 \\ 1 & 3-k \end{vmatrix} = 0. \tag{25}$$

Рівняння (25) називають характеристичним рівнянням системи лінійних диференціальних рівнянь. Знайдемо розв'язки цього рівняння:

$$(2-k)(3-k) - 1 \cdot 2 = 0,$$

$$k^2 - 5k + 4 = 0,$$

$$k_1 = 1, \quad k_2 = 4.$$

Корені характеристичного рівняння (25) системи різні, тому можна визначити два лінійно незалежних розв'язки заданої системи у вигляді

$$x_1 = a_1 e^{k_1 t} = a_1 e^t, \; y_1 = b_1 e^{k_1 t} = b_1 e^t,$$

$$x_2 = a_2 e^{k_2 t} = a_2 e^{4t}, \; y_2 = b_2 e^{k_2 t} = b_2 e^{4t}.$$

Для знаходження власного вектора $\vec{r}_1(a_1, b_1)$, що відповідає $k_1 = 1$ (а значить, першого частинного розв'язку системи $x_1 = a_1 e^t$, $y_1 = b_1 e^t$) підставимо $k_1 = 1$ в систему (24):

$$\begin{cases} (2-1)a_1 + \quad 2b_1 = 0, \\ \quad a_1 + (3-1)b_1 = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} a_1 + 2b_1 = 0, \\ a_1 + 2b_1 = 0. \end{cases}$$

Очевидно, остання система має безліч розв'язків, один з яких (обираємо його довільно, врахувавши, що $a_1 \neq 0, \; b_1 \neq 0$): $a_1 = -2, \; b_1 = 1$. Отже, $k_1 = 1$ відповідає власний вектор $\vec{r}_1(-2{,}1)$, тоді перший частинний розв'язок має вигляд: $x_1 = -2e^t$, $y_1 = e^t$.

Для знаходження власного вектора $\vec{r}_2(a_2, b_2)$, що відповідає власному числу $k_2 = 4$ (а значить, другого частинного розв'язку $x_2 = a_2 e^t$, $y_2 = b_2 e^t$ системи) підставимо $k_2 = 4$ в систему (24):

$$\begin{cases} (2-4)a_2 + \quad 2b_2 = 0, \\ \quad a_2 + (3-4)b_2 = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} -2a_2 + 2b_2 = 0, \\ \quad a_2 - \; b_2 = 0. \end{cases}$$

Очевидно, остання система також має безліч розв'язків, один з яких (обираємо його довільно, врахувавши, що $a_2 \neq 0, b_2 \neq 0$): $a_2 = 1, b_2 = 1$. Отже, власному числу $k_2 = 4$ відповідає власний вектор $\vec{r}_2(1{,}1)$, тоді другий частинний розв'язок має вигляд: $x_2 = e^{4t}$, $y_2 = e^{4t}$.

Загальний розв'язок системи має вигляд: $\begin{cases} x = C_1 x_1 + C_2 x_2, \\ y = C_1 y_1 + C_2 y_2, \end{cases}$ або

$$\begin{cases} x = -2C_1 e^t + C_2 e^{4t}, \\ y = C_1 e^t + C_2 e^{4t}. \end{cases} \blacktriangleleft$$

Приклад 2. *Розв'язати ЛОСДР*

$$\begin{cases} x' = 3x + y, \\ y' = -x + y. \end{cases}$$

► Будемо шукати частинні розв'язки у вигляді $x = ae^{kt}$, $y = be^{kt}$, де k - власне значення матриці $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, вектор $\vec{r}(a, b)$ - власний вектор числа k. Підставимо $x = ae^{kt}$, $y = be^{kt}$, $x' = ake^{kt}$, $y' = bke^{kt}$ в задану систему:

$$\begin{cases} ake^{kt} = 3ae^{kt} + be^{kt}, \\ bke^{kt} = -ae^{kt} + be^{kt}. \end{cases}$$

Скоротиму ліву і праву частину рівнянь системи на e^{kt} та зведемо подібні за змінними a, b:

$$\begin{cases} (3-k)a + \qquad b = 0, \\ \qquad -a + (1-k)b = 0. \end{cases} \qquad (26)$$

Ми отримали лінійну однорідну систему рівнянь. Вона має нетривіальний розв'язок, якщо її визначник, складений з коефіцієнтів біля змінних a, b, дорівнює нулю:

$$\begin{vmatrix} 3-k & 1 \\ -1 & 1-k \end{vmatrix} = 0. \qquad (27)$$

Рівняння (27) називають характеристичним рівнянням системи лінійних диференціальних рівнянь. Знайдемо розв'язки цього рівняння:

$$(3-k)(1-k) - 1 \cdot (-1) = 0,$$

$$(k-2)^2 = 0,$$

$$k_{1,2} = 2.$$

Корені характеристичного рівняння (27) системи рівні, тому не можна визначити два лінійно незалежних власних вектори, що відповідають власному числу $k = 2$. Значить існує лише один частинний розв'язок вигляду $x_1 = a_1 e^{2t}$, $y_1 = b_1 e^{2t}$. Для знаходження цього розв'язку, аналогічно до попереднього прикладу, визначимо власний вектор $\vec{r}_1(a_1, b_1)$, підставивши $k = 2$ в систему (26):

$$\begin{cases} (3-2)a_1 + \qquad b_1 = 0, \\ \qquad -a_1 + (1-2)b_1 = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} a_1 + b_1 = 0, \\ -a_1 - b_1 = 0. \end{cases}$$

Система має безліч розв'язків, один з яких $a_1 = 1, b_1 = -1$. Отже, власному числу $k = 2$ відповідає власний вектор $\vec{r}_1(1,-1)$, тоді перший частинний розв'язок ДР має вигляд: $x_1 = e^{2t}$, $y_1 = -e^{2t}$.

Другий частинний розв'язок ДР, лінійно незалежний із знайденим, шукаємо у вигляді $x_2 = (a_2 + a_1 t)e^{2t}$, $y_2 = (b_2 + b_1 t)e^{2t}$. З цією метою визначаємо із системи приєднаний вектор $\vec{r}_2(a_2, b_2)$ до вектора $\vec{r}_1(1,-1)$:

$$\begin{cases} (3-k)a_2 + \qquad b_2 = 1, \\ \qquad -a_2 + (1-k)b_2 = -1; \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases}(3-2)a_2 + \qquad b_2 = 1, \\ \qquad -a_2 + (1-2)b_2 = -1;\end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases}a_2 + b_2 = 1, \\ -a_2 - b_2 = -1.\end{cases}$$

Остання система має безліч розв'язків, один з яких $a_2 = 1, b_2 = 0$. Отже, приєднаний вектор $\vec{r}_2(1{,}0)$, тоді другий частинний розв'язок має вигляд: $x_2 = (1+t)e^{2t}$, $y_2 = -te^{2t}$.

Загальний розв'язок системи має вигляд:

$$\begin{cases}x = C_1 x_1 + C_2 x_2, \\ y = C_1 y_1 + C_2 y_2,\end{cases} \text{або} \begin{cases}x = C_1 e^{2t} + C_2(1+t)e^{2t}, \\ y = -C_1 e^{2t} - C_2 te^{2t}.\end{cases} \blacktriangleleft$$

Приклад 3. *Розв'язати ЛОСДР*

$$\begin{cases}x' = x - y, \\ y' = 4x + y.\end{cases}$$

► Будемо шукати частинні розв'язки у вигляді $x = ae^{kt}$, $y = be^{kt}$, де k - власне значення матриці $A = \begin{pmatrix}1 & -1 \\ 4 & 1\end{pmatrix}$, вектор $\vec{r}(a, b)$ - власний вектор числа. Підставимо $x = ae^{kt}$, $y = be^{kt}$, $x' = ake^{kt}$, $y' = bke^{kt}$ в задану систему:

$$\begin{cases}ake^{kt} = ae^{kt} - be^{kt}, \\ bke^{kt} = 4ae^{kt} + be^{kt}.\end{cases}$$

Скоротиму ліву і праву частину рівнянь системи на e^{kt} та зведемо подібні за змінними a, b:

$$\begin{cases}(1-k)a \qquad - b = 0, \\ \qquad 4a + (1-k)b = 0.\end{cases} \tag{28}$$

Ми отримали лінійну однорідну систему рівнянь. Вона має нетривіальний (ненульовий) розв'язок, якщо її визначник, складений з коефіцієнтів біля змінних a, b, дорівнює нулю:

$$\begin{vmatrix}1-k & -1 \\ 4 & 1-k\end{vmatrix} = 0. \tag{29}$$

Рівняння (29) є характеристичним рівнянням системи лінійних диференціальних рівнянь. Знайдемо розв'язки цього рівняння:

$$(1-k)(1-k) - 4 \cdot (-1) = 0,$$

$$k^2-2k+5=0,$$
$$k_{1,2}=1\pm 2i.$$

Корені характеристичного рівняння (29) системи є два взаємноспряжені комплексні числа. Тому для знаходження розв’язку системи достатньо знайти власний вектор, що відповідає одному зі спряжених комплексних чисел $k_{1,2}=1\pm 2i$. Знайдемо власний вектор $\vec{r}(a,b)$ для $k=1+2i$, підставивши $k=1+2i$ в систему (28):

$$\begin{cases}(1-1-2i)a \qquad -b=0,\\ 4a+(1-1-2i)b=0,\end{cases} \qquad \begin{cases}-2i\cdot a \quad -b=0,\\ 4a-2i\cdot b=0.\end{cases}$$

Остання система має безліч розв’язків, один з яких $a=1,\ b=-2i$. Отже, власному числу $k=1+2i$ відповідає власний вектор $\vec{r}(1,-2i)$, тоді розв’язки будуть мати вигляд:

$$x=ae^{kt}=ae^{(1+2i)t}=ae^{2t}(\cos 2t+i\sin 2t)=e^{2t}(\cos 2t+i\sin 2t),$$
$$y=be^{kt}=be^{(1+2i)t}=be^{2t}(\cos 2t+i\sin 2t)=$$
$$=-2i\cdot e^{2t}(\cos 2t+i\sin 2t)=e^{2t}(2\sin 2t-i\cdot 2\cos 2t).$$

Скористаємось тим фактом, що якщо $u(t)+iv(t)$ комплексний розв’язок системи ДР, то $u(t)$ та $v(t)$ є частинними розв’язками цієї систем. Тому частинні розв’язки заданої системи набувають вигляду:

$$x_1=\operatorname{Re}x=\operatorname{Re}\left(e^{2t}(\cos 2t+i\sin 2t)\right)=e^{2t}\cos 2t,$$
$$y_1=\operatorname{Re}y=\operatorname{Re}\left(e^{2t}(2\sin 2t-i2\cos 2t)\right)=2e^{2t}\sin 2t;$$
$$x_2=\operatorname{Im}x=\operatorname{Im}\left(e^{2t}(\cos 2t+i\sin 2t)\right)=e^{2t}\sin 2t,$$
$$y_2=\operatorname{Im}x=\operatorname{Im}\left(e^{2t}(\cos 2t+i\sin 2t)\right)=-2e^{2t}\cos 2t.$$

Загальний розв’язок системи має вигляд:

$$\begin{cases}x=C_1x_1+C_2x_2,\\ y=C_1y_1+C_2y_2,\end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases}x=C_1e^{2t}\cos 2t+C_2e^{2t}\sin 2t,\\ y=2C_1e^{2t}\sin 2t-2C_2e^{2t}\cos 2t.\end{cases} \qquad \blacktriangleleft$$

Приклад 4. *Знайти розв’язок системи*

$$\begin{cases}\dfrac{dy_1}{dx}=2y_1+6y_2-15y_3,\\ \dfrac{dy_2}{dx}=y_1+y_2-5y_3,\\ \dfrac{dy_3}{dx}=y_1+2y_2-6y_3.\end{cases}$$

► Будемо шукати частинні розв'язки у вигляді $x = ae^{kt}$, $y = be^{kt}$, $z = ce^{kt}$ де k - власне значення матриці $A = \begin{pmatrix} 2 & 6 & -15 \\ 1 & 1 & -5 \\ 1 & 2 & -6 \end{pmatrix}$, вектор $\vec{r}(a,b,c)$ - власний вектор числа. Характеристичне рівняння

$$\begin{vmatrix} 2-k & 6 & -15 \\ 1 & 1-k & -5 \\ 1 & 2 & -6-k \end{vmatrix} = 0$$

має один корінь $k = -1$ кратності 3. Знайдемо власні вектори, що відповідають $k = -1$ з системи:

$$\begin{cases} 3a + 6b - 15c = 0, \\ a + 2b - 5c = 0, \\ a + 2b - 5c = 0. \end{cases}$$

Ця система має три однакових рівняння, тому можна визначити два лінійно незалежні власні вектори $\vec{r}_1(1,2,1)$, $\vec{r}_2(3,1,1)$.

Система

$$\begin{cases} 3a + 6b - 15c = 1, \\ a + 2b - 5c = 2, \\ a + 2b - 5c = 1. \end{cases}$$

не має розв'язків, тому вектор $\vec{r}_1(1,2,1)$ не має приєднаного вектора.

Система

$$\begin{cases} 3a + 6b - 15c = 3, \\ a + 2b - 5c = 1, \\ a + 2b - 5c = 1. \end{cases}$$

має ненульовий розв'язок $(1,0,0)$. Отже вектор $\vec{r}_2(3,1,1)$ має приєднаний вектор $\vec{r}_3(1,0,0)$. Отже, загальний розвязок системи буде

$$\begin{cases} y_1 = (C_1 + 3C_2 + C_3(1+3x))e^{-x}, \\ y_2 = (2C_1 + C_2 + C_3 x)e^{-x}, \\ y_3 = (C_1 + C_2 + C_3 x)e^{-x}. \end{cases} \qquad ◄$$

Приклад 5. *Знайти розв'язок системи*

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = 4y_1 - y_2, \\ \dfrac{dy_2}{dx} = 3y_1 + y_2 - y_3, \\ \dfrac{dy_3}{dx} = y_1 + y_3. \end{cases}$$

► Будемо шукати частинні розв'язки у вигляді $x = ae^{kt}$, $y = be^{kt}$, $z = ce^{kt}$ де k - власне значення матриці $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, вектор $\vec{r}(a,b,c)$ - власний вектор числа. Характеристичне рівняння

$$\begin{vmatrix} 4-k & -1 & 0 \\ 3 & 1-k & -1 \\ 1 & 0 & 1-k \end{vmatrix} = 0$$

має один корінь $k = 2$ кратності 3. Знайдемо власні вектори, що відповідають $k = 2$ з системи:

$$\begin{cases} 2a - b = 0 \\ 3a - b - c = 0 \\ a - c = 0 \end{cases}$$

Ця система має три різних рівняння, тому можна визначити лише один власний вектор $\vec{r}_1(1,2,1)$. Система

$$\begin{cases} 2a - b = 1 \\ 3a - b - c = 2 \\ a - c = 1 \end{cases}$$

має ненульовий розв'язок $(1,1,0)$. Отже, вектор $\vec{r}_1(1,2,1)$ має приєднаний вектор $\vec{r}_2(1,1,0)$.

Система

$$\begin{cases} 2a - b = 1 \\ 3a - b - c = 1 \\ a - c = 0 \end{cases}$$

має ненульовий розв'язок $(1,1,1)$. Отже, вектор $\vec{r}_2(1,1,0)$ має приєднаний вектор $\vec{r}_3(1,1,1)$.

Отже, загальний розвязок системи диференціального рівняння буде

$$\begin{cases} y_1 = \left(C_1 + C_2(1+x) + C_3\left(1 + x + \dfrac{x^2}{2}\right)\right)e^{2x}, \\ y_2 = \left(2C_1 + C_2(1+2x) + C_3\left(1 + x + x^2\right)\right)e^{2x}, \\ y_3 = \left(C_1 + C_2 x + C_3\left(1 + \dfrac{x^2}{2}\right)\right)e^{2x}. \end{cases} \blacktriangleleft$$

Розв'язування лінійних систем диференціальних рівнянь методом невизначених коефіцієнтів

Приклад 6. *Розв'язати систему*

$$\begin{cases} x' = 2x + 2y, \\ y' = x + 3y. \end{cases}$$

► Будемо шукати частинні розв'язки у вигляді $x = ae^{kt}$, $y = be^{kt}$. Підставимо $x = ae^{kt}$, $y = be^{kt}$, $x' = ake^{kt}$, $y' = bke^{kt}$ в задану систему:

$$\begin{cases} ake^{kt} = 2ae^{kt} + 2be^{kt}, \\ bke^{kt} = ae^{kt} + 3be^{kt}. \end{cases}$$

Скоротиму ліву і праву частину рівнянь системи на e^{kt}, та зведемо подібні за змінними a, b:

$$\begin{cases} (2-k)a + 2b = 0, \\ a + (3-k)b = 0. \end{cases} \tag{30}$$

Ми отримали лінійну однорідну систему рівнянь. Вона має нетривіальний розв'язок, якщо її визначник, складений з коефіцієнтів біля змінних a, b, дорівнює нулю:

$$\begin{vmatrix} 2-k & 2 \\ 1 & 3-k \end{vmatrix} = 0. \tag{31}$$

Рівняння (31) є характеристичним рівнянням системи лінійних диференціальних рівнянь. Знайдемо розв'язки цього рівняння:

$$(2-k)(3-k) - 1 \cdot 2 = 0,$$

$$k^2 - 5k + 4 = 0,$$

$$k_1 = 1, \quad k_2 = 4.$$

Корені характеристичного рівняння (31) системи різні, тому загальний розв'язок заданої системи будемо шукати у вигляді:

$$x = a_1 e^{k_1 t} + a_2 e^{k_2 t} = a_1 e^t + a_2 e^{4t},$$
$$y = b_1 e^{k_1 t} + b_2 e^{k_2 t} = b_1 e^t + b_2 e^{4t}.$$

Для знаходження коефіцієнтів a_1, a_2, b_1, b_2 підставимо $x = a_1 e^t + a_2 e^{4t}$, $y = b_1 e^t + b_2 e^{4t}$, $x' = a_1 e^t + 4a_2 e^{4t}$, $y' = b_1 e^t + 4b_2 e^{4t}$ в задану систему:

$$\begin{cases} a_1 e^t + 4a_2 e^{4t} = 2\left(a_1 e^t + a_2 e^{4t}\right) + 2\left(b_1 e^t + b_2 e^{4t}\right), \\ b_1 e^t + 4b_2 e^{4t} = a_1 e^t + a_2 e^{4t} + 3\left(b_1 e^t + b_2 e^{4t}\right). \end{cases}$$

Зводимо подібні:

$$\begin{cases} 0 = (a_1 + 2b_1)e^t + (2b_2 - 2a_2)e^{4t}, \\ 0 = (a_1 + 2b_1)e^t + (a_2 - b_2)e^{4t}. \end{cases}$$

Система має розв'язок, якщо коефіцієнти біля e^t, e^{4t} дорівнюють нулю:

$$\begin{cases} 0 = a_1 + 2b_1, \\ 0 = 2b_2 - 2a_2, \\ 0 = a_1 + 2b_1 \\ 0 = a_2 - b_2; \end{cases} \qquad \begin{cases} a_1 = -2b_1, \\ a_2 = b_2. \end{cases}$$

Загальний розв'язок системи має вигляд: $\begin{cases} x = -2b_1 e^t + b_2 e^{4t}, \\ y = b_1 e^t + b_2 e^{4t}. \end{cases}$ ◄

Приклад 7. *Розв'язати систему*

$$\begin{cases} x' = 3x + y, \\ y' = -x + y. \end{cases}$$

► Будемо шукати частинні розв'язки у вигляді $x = ae^{kt}$, $y = be^{kt}$. Характеристичне рівняння системи:

$$\begin{vmatrix} 3-k & 1 \\ -1 & 1-k \end{vmatrix} = 0 \qquad (32)$$

має один корінь $k = 2$ кратності 2, тому загальний розв'язок системи будемо шукати у вигляді:

$$x = a_1 e^{kt} + a_2 t e^{kt} = a_1 e^{2t} + a_2 t e^{2t},$$
$$y = b_1 e^{kt} + b_2 t e^{kt} = b_1 e^{2t} + b_2 t e^{2t}.$$

Для знаходження коефіцієнтів a_1, a_2, b_1, b_2 підставимо $x = a_1 e^{2t} + a_2 te^{2t}$, $y = b_1 e^{2t} + b_2 te^{2t}$, $x' = 2a_1 e^{2t} + a_2 e^{2t} + 2a_2 te^{2t}$, $y' = 2b_1 e^{2t} + b_2 e^{2t} + 2b_2 te^{2t}$ в задану систему:

$$\begin{cases} 2a_1 e^{2t} + a_2 e^{2t} + 2a_2 te^{2t} = 3\left(a_1 e^{2t} + a_2 te^{2t}\right) + b_1 e^{2t} + b_2 te^{2t}, \\ 2b_1 e^{2t} + b_2 e^{2t} + 2b_2 te^{2t} = -\left(a_1 e^{2t} + a_2 te^{2t}\right) + b_1 e^{2t} + b_2 te^{2t}. \end{cases}$$

Зводимо подібні:

$$\begin{cases} 0 = (a_1 - a_2 + b_1)e^{2t} + (b_2 + a_2)te^{2t}, \\ 0 = (-a_1 - b_1 - b_2)e^{2t} + (-a_2 - b_2)te^{2t}. \end{cases}$$

Система має розв'язок, якщо коефіцієнти біля e^{2t}, te^{2t} дорівнюють нулю:

$$\begin{cases} 0 = a_1 - a_2 + b_1, \\ 0 = b_2 + a_2, \\ 0 = -a_1 - b_1 - b_2, \\ 0 = -a_2 - b_2; \end{cases} \qquad \begin{cases} a_1 = -b_1 - b_2, \\ a_2 = -b_2. \end{cases}$$

Отже, загальний розв'язок системи має вигляд:

$$\begin{cases} x = -(b_1 + b_2)e^{2t} - b_2 te^{2t}, \\ y = b_1 e^{2t} + b_2 te^{2t}. \end{cases}$$ ◄

Приклад 8. *Розв'язати систему*

$$\begin{cases} x' = x - y, \\ y' = 4x + y. \end{cases}$$

► Будемо шукати частинні розв'язки у вигляді $x = ae^{kt}$, $y = be^{kt}$. Характеристичне рівняння системи:

$$\begin{vmatrix} 1-k & -1 \\ 4 & 1-k \end{vmatrix} = 0. \qquad (33)$$

Корені рівняння (33) є два взаємоспряжені комплексні числа $k_{1,2} = 1 \pm 2i$, тому загальний розв'язок системи будемо шукати у вигляді:

$$x = a_1 e^{\alpha t}\cos\beta t + a_2 e^{\alpha t}\sin\beta t = a_1 e^t \cos 2t + a_2 e^t \sin 2t,$$

$$y = b_1 e^{\alpha t}\cos\beta t + b_2 e^{\alpha t}\sin\beta t = b_1 e^t \cos 2t + b_2 e^t \sin 2t.$$

Для знаходження коефіцієнтів a_1, a_2, b_1, b_2 підставимо

$$x = a_1e^t \cos 2t + a_2e^t \sin 2t,\ x' = (a_1 + 2a_2)e^t \cos 2t + (a_2 - 2a_1)e^t \sin 2t,$$
$$y = b_1e^t \cos 2t + b_2e^t \sin 2t,\ y' = (b_1 + 2b_2)e^t \cos 2t + (b_2 - 2b_1)e^t \sin 2t$$

в задану систему:

$$\begin{cases}(a_1 + 2a_2)e^t \cos 2t + (a_2 - 2a_1)e^t \sin 2t = a_1e^t \cos 2t + a_2e^t \sin 2t - (b_1e^t \cos 2t + b_2e^t \sin 2t),\\ (b_1 + 2b_2)e^t \cos 2t + (b_2 - 2b_1)e^t \sin 2t = 4\left(a_1e^t \cos 2t + a_2e^t \sin 2t\right) + b_1e^t \cos 2t + b_2e^t \sin 2t.\end{cases}$$

Зводимо подібні:

$$\begin{cases}0 = \left(-2a_2 - b_1\right)e^t \cos t + \left(2a_1 - b_2\right)e^t \sin t,\\ 0 = (4a_1 - 2b_2)e^t \cos t + \left(4a_2 + 2b_1\right)e^t \sin t.\end{cases}$$

Система має розв'язок, якщо коефіцієнти біля $e^t \cos t,\ e^t \sin t$ дорівнюють нулю:

$$\begin{cases}0 = -2a_2 - b_1,\\ 0 = 2a_1 - b_2,\\ 0 = 4a_1 - 2b_2,\\ 0 = 4a_2 + 2b_1;\end{cases} \qquad \begin{cases}b_1 = -2a_2,\\ b_2 = 2a_1.\end{cases}$$

Загальний розв'язок системи має вигляд:

$$\begin{cases}x = a_1e^{2t} \cos 2t + a_2e^{2t} \sin 2t,\\ y = -2a_2e^{2t} \cos 2t + 2a_1e^{2t} \sin 2t.\end{cases} \blacktriangleleft$$

Завдання для самостійного розв'язання

1. Розв'язати системи диференціальних рівнянь

1.1. $\begin{cases}\dfrac{dy}{dx} = y + 2z\\ \dfrac{dz}{dx} = 4y + 3z\end{cases}$

1.2. $\begin{cases}\dfrac{dy}{dx} = 3y + z\\ \dfrac{dz}{dx} = -y + z\end{cases}$

1.3. $\begin{cases}\dfrac{dy}{dx} = -7y + z\\ \dfrac{dz}{dx} = -2y - 5z\end{cases}$

1.7. $\begin{cases}\dfrac{dx}{dt} = y + z\\ \dfrac{dy}{dt} = 3x + z\\ \dfrac{dz}{dt} = 3x + y\end{cases}$

1.8. $\begin{cases}\dfrac{dx}{dt} = -x + y + z\\ \dfrac{dy}{dt} = x - y + z\\ \dfrac{dz}{dt} = x + y - z\end{cases}$

1.4. $\begin{cases} x' = x + 2y \\ y' = 2x + y \end{cases}$

1.5. $\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = 3 - 2z \\ \dfrac{dz}{dx} = 2y + 2x \end{cases}$

1.6. $\begin{cases} x' = x - 5z \\ y' = 2x + 4y + z \\ z' = x + 3z \end{cases}$

1.9. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 8y \\ \dfrac{dy}{dt} = -2z \\ \dfrac{dz}{dt} = 2x + 8y - 2z \end{cases}$

Практичне заняття № 10, 11

Тема: ***Неоднорідні системи лінійних диференціальних рівнянь.***

Контрольні запитання

1. *Який загальний вигляд має лінійна система? Коли вона називається неоднорідною?*
2. *Як знайти загальний розв'язок неоднорідної лінійної системи, якщо відомий один частинний розв'язок й загальний розв'язок відповідної однорідної системи?*
3. *У чому складається метод Лагранжа знаходження загального розв'язку неоднорідної лінійної системи?*

Метод варіації довільної сталої

Приклад 1. *Знайти загальний розв'язок системи:*

$$\begin{cases} x' = y + e^{2t}, \\ y' = x + 2e^{t}. \end{cases} \tag{34}$$

► Задана система є неоднорідною системою лінійних диференціальних рівнянь. Оскільки функції $f_1(t) = e^{2t}$, $f_2(t) = 2e^{t}$ є неперервними на всій множині дійсних чисел, то для розв'язання заданої системи можна використати метод варіації довільних сталих.

Загальним розв'язком однорідної системи лінійних диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} x' = y, \\ y' = x. \end{cases} \tag{35}$$

буде:

$$x = C_1 e^t + C_2 e^{-t},$$
$$y = -C_1 e^t + C_2 e^{-t}, \tag{36}$$
де C_1, C_2 - довільні сталі.

Для знаходження загального розв'язку системи (34) припустимо, що C_1 *і* C_2 є функціями від змінної t, тоді загальний розв'язок (36) набуде вигляду:
$$x = C_1(t)e^t + C_2(t)e^{-t},$$
$$y = -C_1(t)e^t + C_2(t)e^{-t}. \tag{37}$$
Для знаходження функцій $C_1(t)$, $C_2(t)$ підставимо x і y:
$$x = C_1(t)\cdot e^t + C_2(t)\cdot e^{-t},\ x' = C_1'(t)\cdot e^t + C_1(t)\cdot e^t + C_2'(t)\cdot e^{-t} - C_2(t)\cdot e^{-t},$$
$$y = -C_1(t)\cdot e^t + C_2(t)\cdot e^{-t},\ y' = -C_1'(t)\cdot e^t - C_1(t)\cdot e^t + C_2'(t)\cdot e^{-t} - C_2(t)\cdot e^{-t}$$
у систему (34); отримаємо:
$$\begin{cases} C_1'(t)\cdot e^t + C_1(t)\cdot e^t + C_2'(t)\cdot e^{-t} - C_2(t)\cdot e^{-t} = -\left(-C_1(t)\cdot e^t + C_2(t)\cdot e^{-t}\right) + e^{2t}, \\ -C_1'(t)\cdot e^t - C_1(t)\cdot e^t + C_2'(t)\cdot e^{-t} - C_2(t)\cdot e^{-t} = C_1(t)\cdot e^t + C_2(t)\cdot e^{-t} + 2e^t. \end{cases}$$
Оскільки система (35) є розв'язком однорідної лінійної системи диференціальних рівнянь (34), то остання система набуває вигляду:
$$\begin{cases} C_1'(t)\cdot e^t + C_2'(t)\cdot e^{-t} = e^{2t}, \\ -C_1'(t)\cdot e^t + C_2'(t)\cdot e^{-t} = 2e^t, \end{cases}$$
звідси
$$\begin{cases} C_2'(t) = \frac{1}{2}e^{3t}, \\ C_1'(t) = \frac{1}{2}(e^t - 2), \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} C_2(t) = \frac{1}{6}e^{3t} + c_2, \\ C_1(t) = \frac{1}{2}(e^t - 2t) + c_1. \end{cases} \tag{38}$$
Підставимо знайдені функції (38) в систему (35), отримаємо загальний розв'язок неоднорідної системи лінійних диференціальних рівнянь (33):
$$\begin{cases} x = \frac{2}{3}e^{2t} - te^t + c_1 e^t + c_2 e^{-t}, \\ y = -\frac{1}{3}e^{2t} + te^t - c_1 e^t + c_2 e^{-t}. \end{cases} \quad ◄$$

Метод невизначених коефіцієнтів для розв'язання неоднорідної системи лінійних диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} x' = a_1x + a_2y + f_1(t), \\ y' = b_1x + b_2y + f_2(t). \end{cases}$$

Функції $f_1(t)$, $f_2(t)$	*Корені характеристичного рівняння*	*Вид частинного розв'язку*
$f_1(t)=P_{m_1}(t)$, $f_2(t)=P_{m_2}(t)$, $P_{m_1}(t)$, $P_{m_2}(t)$ - многочлени степеня m_1, m_2, відповідно	0 є коренем характер. рів-ня кратності r	$\begin{cases} x_{ч.н.} = Q_{s+r}(t), \\ y_{ч.н.} = R_{s+r}(t), \end{cases}$ $s=\max(m_1, m_2)$
	0 не є коренем характер. рів-ня	$\begin{cases} x_{ч.н.} = Q_s(t), \\ y_{ч.н.} = R_s(t), \end{cases}$ $s=\max(m_1, m_2)$
$f_1(t)=P_{m_1}(t)e^{\alpha t}$, $f_2(t)=P_{m_2}(t)e^{\alpha t}$, $P_{m_1}(t)$, $P_{m_2}(t)$ - многочлени степеня m_1, m_2, відповідно	α є коренем характер. рів-ня кратності r	$\begin{cases} x_{ч.н.} = Q_{s+r}(t)e^{\alpha t}, \\ y_{ч.н.} = R_{s+r}(t)e^{\alpha t}, \end{cases}$ $s=\max(m_1, m_2)$
	α не є коренем характер. рів-ня	$\begin{cases} x_{ч.н.} = Q_s(t)e^{\alpha t}, \\ y_{ч.н.} = R_s(t)e^{\alpha t}, \end{cases}$ $s=\max(m_1, m_2)$
$f_1(t)=P_{m_1}(t)e^{\alpha t}cos\beta t + F_{n_1}(t)e^{\alpha t}\sin\beta t$, $f_1(t)=P_{m_2}(t)e^{\alpha t}cos\beta t + F_{n_2}(t)e^{\alpha t}\sin\beta t$, $P_{m_1}(t)$, $P_{m_2}(t)$, $F_{m_1}(t)$, $F_{m_2}(t)$ - многочлени степеня m_1, m_2, n_1, n_2, відповідно	$\alpha+\beta i$ - корінь характер. рів-ня кратності r	$\begin{cases} x_{ч.н.} = Q_{s+r}(t)e^{\alpha t}\cos\beta t + R_{s+r}(t)e^{\alpha t}\sin\beta t, \\ y_{ч.н.} = M_{s+r}(t)e^{\alpha t}\cos\beta t + N_{s+r}(t)e^{\alpha t}\sin\beta t, \end{cases}$ $s=\max(m_1, m_2, n_1, n_2)$
	$\alpha+\beta i$ не є коренем характер. рів-ня	$\begin{cases} x_{ч.н.} = Q_s(t)e^{\alpha t}\cos\beta t + R_s(t)e^{\alpha t}\sin\beta t, \\ y_{ч.н.} = M_s(t)e^{\alpha t}\cos\beta t + N_s(t)e^{\alpha t}\sin\beta t, \end{cases}$ $s=\max(m_1, m_2, n_1, n_2)$

Приклад 2. *Знайти загальний розв'язок системи:*

$$\begin{cases} x' = y - 5\cos t, \\ y' = 2x + y. \end{cases} \tag{39}$$

► Розв'яжемо неоднорідну систему лінійних диференціальних рівнянь, використовуючи метод невизначених коефіцієнтів. Розв'язок заданої системи буде складатись з загального розв'язку однорідного системи лінійних диференціальних рівнянь та частинного розв'язку неоднорідної системи лінійних диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} x_{з.н.} = x_{з.о.} + x_{ч.н.}, \\ y_{з.н.} = y_{з.о.} + y_{ч.н.}. \end{cases} \tag{40}$$

Спочатку розв'яжемо однорідну систему лінійних диференціальних рівнянь $\begin{cases} x' = y, \\ y' = 2x + y. \end{cases}$

Характеристичне рівняння системи $\begin{vmatrix} -k & 1 \\ 2 & 1-k \end{vmatrix} = 0$ має два різних корені $k_1 = -1,\ k_2 = 2$. Тоді загальний розв'язок системи ДР має вигляд:

$$\begin{cases} x_{з.о.} = C_1 e^{-t} + C_2 e^{2t}, \\ y_{з.о.} = -C_1 e^{-t} + 2C_2 e^{2t}. \end{cases} \tag{41}$$

Оскільки $f_1(t) = -5\cos t$, $f_2(t) = 0$, то частинний розв'язок неоднорідної системи лінійних диференціальних рівнянь шукаємо у вигляді:

$$\begin{cases} x_{ч.н.} = A_1 \sin t + A_2 \cos t, \\ y_{ч.н.} = B_1 \sin t + B_2 \cos t. \end{cases} \tag{42}$$

Шукаємо похідні від $x_{ч.н.}, y_{ч.н.}$ по змінній *t*:

$$\begin{cases} x'_{ч.н.} = A_1 \cos t - A_2 \sin t, \\ y'_{ч.н.} = B_1 \cos t - B_2 \sin t. \end{cases} \tag{43}$$

Підставляємо (42), (43) в задану систему (39):

$$\begin{cases} A_1 \cos t - A_2 \sin t = B_1 \sin t + B_2 \cos t - 5\cos t, \\ B_1 \cos t - B_2 \sin t = 2(A_1 \sin t + A_2 \cos t) + B_1 \sin t + B_2 \cos t. \end{cases}$$

Групуємо по cos *t* та sin *t*:

$$\begin{cases} (A_1 - B_2 + 5)\cos t + (-A_2 - B_1)\sin t = 0, \\ (B_1 - 2A_2 - B_2)\cos t + (-B_2 - 2A_1 - B_1)\sin t = 0. \end{cases}$$

Останні рівності мають місце, якщо множники біля cos *t* та sin *t* дорівнюють нулю:

$$\begin{cases} A_1 - B_2 + 5 = 0, \\ -A_2 - B_1 = 0, \\ B_1 - 2A_2 - B_2 = 0, \\ -B_2 - 2A_1 - B_1 = 0; \end{cases} \quad \text{звідси} \quad \begin{cases} A_1 = -2, \\ A_2 = -1 \\ B_1 = 1, \\ B_2 = 3. \end{cases}$$

Отже, частинний розв'язок неоднорідної системи лінійних диференціальних рівнянь має вигляд:

$$\begin{cases} x_{ч.н.} = -2\sin t - \cos t, \\ y_{ч.н.} = \sin t + 3\cos t. \end{cases} \tag{44}$$

Загальний розв'язок неоднорідної системи лінійних диференціальних рівнянь знайдемо, підставивши отримані розв'язки (41) та (44) в (40):

$$\begin{cases} x_{з.н.} = x_{з.о.} + x_{ч.н.} = C_1 e^{-t} + C_2 e^{2t} - 2\sin t - \cos t, \\ y_{з.н.} = y_{з.о.} + y_{ч.н.} = -C_1 e^{-t} + 2C_2 e^{2t} + \sin t + 3\cos t. \end{cases} \blacktriangleleft$$

Приклад 3. *Знайти загальний розв'язок системи:*

$$\begin{cases} x' = 2x + y - 7te^{-t} - 3, \\ y' = -x + 2y - 1. \end{cases} \qquad (45)$$

► Розв'яжемо неоднорідну систему лінійних диференціальних рівнянь, використовуючи метод невизначених коефіцієнтів. Розв'язок заданої системи буде складатись з загального розв'язку однорідного системи лінійних диференціальних рівнянь та частинного розв'язку неоднорідної системи лінійних диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} x_{з.н.} = x_{з.о.} + x_{ч.н.}, \\ y_{з.н.} = y_{з.о.} + y_{ч.н.}. \end{cases} \qquad (46)$$

Розв'яжемо однорідну систему лінійних диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} x' = 2x + y, \\ y' = -x + 2y. \end{cases}$$

Характеристичне рівняння системи $\begin{vmatrix} 2-k & 1 \\ -1 & 2-k \end{vmatrix} = 0$ має два комплексноспряжених корені $k_{1,2} = 1 \pm 2i$. Знаючи корені характеристичного рівняння, знаходимо загальний розв'язок останньої системи:

$$\begin{cases} x_{з.о.} = -C_1 e^{2t} \sin t - C_2 e^{2t} \cos t, \\ y_{з.о.} = -C_1 e^{2t} \cos t + C_2 e^{2t} \sin t. \end{cases} \qquad (47)$$

Оскільки $f_1(t) = -7te^{-t} - 3$, $f_2(t) = -1$, то частинний розв'язок неоднорідної системи лінійних диференціальних рівнянь шукаємо у вигляді:

$$\begin{cases} x_{ч.н.} = (A_1 t + A_2)e^{-t} + A_3, \\ y_{ч.н.} = (B_1 t + B_2)e^{-t} + B_3. \end{cases} \qquad (48)$$

Шукаємо похідні від $x_{ч.н.}, y_{ч.н.}$ по змінній t:

$$\begin{cases} x'_{ч.н.} = (A_1 - A_1 t - A_2)e^{-t}, \\ y'_{ч.н.} = (B_1 - B_1 t - B_2)e^{-t}. \end{cases} \tag{49}$$

Підставляємо (48), (49) в задану систему (45):

$$\begin{cases} (A_1 - A_1 t - A_2)e^{-t} = 2\Big((A_1 t + A_2)e^{-t} + A_3\Big) + (B_1 t + B_2)e^{-t} + B_3 - 7te^{-t} - 3, \\ (B_1 - B_1 t - B_2)e^{-t} = -\Big((A_1 t + A_2)e^{-t} + A_3\Big) + 2\Big((B_1 t + B_2)e^{-t} + B_3\Big) - 1. \end{cases}$$

Групуємо по e^{-t}, te^{-t} та вільні члени:

$$\begin{cases} (A_1 - 3A_2 - B_2)e^{-t} - (2A_1 + B_1 - 7)te^{-t} - 2A_3 - B_3 + 3 = 0, \\ (B_1 - 3B_2 + A_2)e^{-t} + (A_1 - 2B_1)te^{-t} + A_3 - 2B_3 + 1 = 0. \end{cases}$$

Останні рівності мають місце, якщо множники біля e^{-t}, te^{-t} та вільні члени рівні нулю:

$$\begin{cases} A_1 - 3A_2 - B_2 = 0, \\ 2A_1 + B_1 - 7 = 0, \\ -2A_3 - B_3 + 3 = 0, \\ B_1 - 3B_2 + A_2 = 0, \\ A_1 - 2B_1 = 0, \\ A_3 - 2B_3 + 1 = 0. \end{cases} \quad \text{звідси} \quad \begin{cases} A_1 = 2{,}8, \\ A_2 = 0{,}7, \\ A_3 = 1, \\ B_1 = 1{,}4, \\ B_2 = 0{,}7, \\ B_3 = 1. \end{cases}$$

Отже, частинний розв’язок неоднорідної системи лінійних диференціальних рівнянь має вигляд:

$$\begin{cases} x_{ч.н.} = (2{,}8t + 0{,}7)e^{-t} + 1, \\ y_{ч.н.} = (1{,}4t + 0{,}7)e^{-t} + 1. \end{cases} \tag{50}$$

Загальний розв’язок неоднорідної системи лінійних диференціальних рівнянь знайдемо, підставивши отримані розв’язки (47) та (50) в (46):

$$\begin{cases} x_{з.н.} = x_{з.о.} + x_{ч.н.} = -C_1 e^{2t}\sin t - C_2 e^{2t}\cos t + (2{,}8t + 0{,}7)e^{-t} + 1, \\ y_{з.н.} = y_{з.о.} + y_{ч.н.} = -C_1 e^{2t}\cos t + C_2 e^{2t}\sin t + (1{,}4t + 0{,}7)e^{-t} + 1. \end{cases} \quad ◄$$

Приклад 4. *Знайти загальний розв’язок системи:*

$$\begin{cases} x' = 2x + y + 2e^{t}, \\ y' = x + 2y - 3e^{4t}. \end{cases} \tag{51}$$

► Розв’яжемо неоднорідну систему лінійних диференціальних рівнянь, використовуючи метод невизначених коефіцієнтів. Розв’язок заданої системи буде складатись з загального розв’язку однорідного системи лінійних диференціальних рівнянь та частинного розв'язку неоднорідної системи лінійних диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} x_{з.н.} = x_{з.о.} + x_{ч.н.}, \\ y_{з.н.} = y_{з.о.} + y_{ч.н.}. \end{cases} \tag{52}$$

Розв'яжемо однорідну систему лінійних диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} x' = 2x + y, \\ y' = x + 2y. \end{cases} \tag{53}$$

Характеристичне рівняння системи $\begin{vmatrix} 2-k & 1 \\ 1 & 2-k \end{vmatrix} = 0$ має два різних корені $k_1 = 1,\ k_2 = 3$. Знаючи корені характеристичного рівняння, знаходимо загальний розв'язок системи (53):

$$\begin{cases} x_{з.о.} = C_1 e^t + C_2 e^{3t}, \\ y_{з.о.} = -C_1 e^t + C_2 e^{3t}. \end{cases} \tag{54}$$

Оскільки $f_1(t) = 2e^t$, $f_2(t) = -3e^{4t}$, та врахувавши, що $k_1 = 1$ - корінь характеристичного рівняння кратності один, то частинний розв'язок неоднорідної системи лінійних диференціальних рівнянь шукаємо у вигляді:

$$\begin{cases} x_{ч.н.} = (A_1 t + A_2)e^t + A_3 e^{4t}, \\ y_{ч.н.} = (B_1 t + B_2)e^t + B_3 e^{4t}. \end{cases} \tag{55}$$

Шукаємо похідні від $x_{ч.н.}, y_{ч.н.}$ по змінній *t*:

$$\begin{cases} x'_{ч.н.} = (A_1 + A_1 t + A_2)e^t + 4A_3 e^{4t}, \\ y'_{ч.н.} = (B_1 + B_1 t + B_2)e^t + 4B_3 e^{4t}. \end{cases} \tag{56}$$

Підставляємо (55), (56) в задану систему (51):

$$\begin{cases} (A_1 + A_1 t + A_2)e^t + 4A_3 e^{4t} = 2\left((A_1 t + A_2)e^t + A_3 e^{4t}\right) + (B_1 t + B_2)e^t + B_3 e^{4t} + 2e^t \\ (B_1 + B_1 t + B_2)e^t + 4B_3 e^{4t} = (A_1 t + A_2)e^t + A_3 e^{4t} + 2\left((B_1 t + B_2)e^t + B_3 e^{4t}\right) - 3e^{4t}. \end{cases}$$

Групуємо по e^t, te^t та e^{4t}:

$$\begin{cases} (A_1 - A_2 - B_2 - 2)e^t + (-A_1 - B_1)te^t + (2A_3 - B_3)e^{4t} = 0, \\ (B_1 - B_2 - A_2)e^t + (-A_1 - B_1)te^t + (2B_3 - A_3 + 3)e^{4t} = 0. \end{cases}$$

Останні рівності мають місце, якщо множники біля e^t, te^t та e^{4t} рівні нулю:

$$\begin{cases} A_1 - A_2 - B_2 - 2 = 0, \\ -A_1 - B_1 = 0, \\ 2A_3 - B_3 = 0, \\ B_1 - B_2 - A_2 = 0, \\ -A_1 - B_1 = 0, \\ 2B_3 - A_3 + 3 = 0. \end{cases} \quad \text{звідси} \quad \begin{cases} A_1 = 1, \\ A_2 = 0, \\ A_3 = -1, \\ B_1 = -1, \\ B_2 = -1, \\ B_3 = -2. \end{cases}$$

Отже, частинний розв'язок неоднорідної системи лінійних диференціальних рівнянь має вигляд:

$$\begin{cases} x_{ч.н.} = te^t - e^{4t}, \\ y_{ч.н.} = (-t-1)e^t - 2e^{4t}. \end{cases} \tag{57}$$

Загальний розв'язок неоднорідної системи лінійних диференціальних рівнянь знайдемо, підставивши отримані розв'язки (54) та (57) в (51):

$$\begin{cases} x_{з.н.} = x_{з.о.} + x_{ч.н.} = C_1e^t + C_2e^{3t} + te^t - e^{4t}, \\ y_{з.н.} = y_{з.о.} + y_{ч.н.} = -C_1e^t + C_2e^{3t} - (t+1)e^t - 2e^{4t}. \end{cases}$$ ◄

Завдання для самостійного розв'язання

1. Знайти розв'язок систем:

1.1. $\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = y + z + x \\ \dfrac{dz}{dx} = y - 2z + 2x \end{cases}$

1.2. $\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} + z = x^2 + 6x + 1 \\ \dfrac{dz}{dx} - y = -3x^2 + 3x + 1 \end{cases}$

1.3. $\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} + 3y - z = e^{2x} \\ \dfrac{dz}{dx} + y + 5z = e^x \end{cases}$

1.4. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -x + y + z + e^t \\ \dfrac{dy}{dt} = x - y + z + e^{3t} \\ \dfrac{dz}{dt} = x + y + z + 4 \end{cases}$

1.5. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y - z \\ \dfrac{dy}{dt} = x + y + t \\ \dfrac{dz}{dt} = x + z + t \end{cases}$

Контрольна робота (40 балів)

Типові завдання контрольної роботи

Завдання 1. Знайти частинний розв'язок лінійного однорідного диференціального рівняння:

$$y^{IV}+10y''+9y=0,\ y(0)=1,\ y'(0)=3,\ y''(0)=-9,\ y'''(0)=-27.$$

Завдання 2. Розв'язати систему диференціальних рівнянь двома способами:

а). зведенням до диференціального рівняння вищого порядку;

б). за допомогою характеристичного рівняння:

$$\begin{cases} x'=4x-8y, \\ y'=-8x+4y. \end{cases}$$

Завдання 3. Розв'язати систему лінійних диференціальних рівнянь методом Ейлера, якщо $x=x(t),\quad y=y(t),\quad z=z(t)$: $\begin{cases} x'=2x+z, \\ y'=3x-3y+2z, \\ z'=-x+2z, \end{cases}$

Завдання 4. Знайти перших чотири члени розкладу в степеневий ряд частинного інтегралу диференціального рівняння, що задовольняє початковим умовам: $y''-y\cos x=x,\ \ y(0)=1,\ \ y'(0)=0.$

Практичне заняття № 12

Тема: ***Рівняння в частинних похідних першого порядку.***

Завдання для самостійного розв'язання

1 [1]. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння: $\left(1+x^2\right)\frac{\partial z}{\partial x}+xy\frac{\partial z}{\partial y}=0$ та визначити інтегральну поверхню, що проходить через криву $z=y^2$ у площині $x=0$.

2 [1]. Знайти поверхню, що справджує рівняння

$$2xz\frac{\partial z}{\partial x}+2yz\frac{\partial z}{\partial y}=z^2-x^2-y^2.$$

3 [1]. Знайти загальний інтеграл рівняння $x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=0$. Визначити поверхню, що проходить через криву $\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ в площині $x=a$.

4 [1]. Знайти загальний інтеграл рівняння $y\frac{\partial z}{\partial x} - x\frac{\partial z}{\partial y} = 0$. Визначити поверхню, що проходить через криву $y^2 = 2pz$ в площині $x = 0$.

5 [1]. Знайти загальний інтеграл рівняння $\cos y\frac{\partial z}{\partial x} + \cos x\frac{\partial z}{\partial y} = \cos x \cos y$.

6 [1]. Знайти загальний інтеграл рівняння $\frac{\partial z}{\partial x} - a\frac{\partial z}{\partial y} = e^{mx}\cos py$.

7 [1]. Знайти загальний інтеграл рівняння $a\frac{\partial z}{\partial x} + b\frac{\partial z}{\partial y} = 1$.

8 [1]. Знайти загальний інтеграл рівняння $2xy\frac{\partial z}{\partial x} + \left(y^2 - x^2\right)\frac{\partial z}{\partial y} = 0$. Визначити поверхню, що проходить через криву $z = \sqrt{2ax}$ в площині $y = 0$.

9 [1]. Знайти загальний інтеграл рівняння $y\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = x^2 + y^2$.

10 [1]. Знайти загальний інтеграл рівняння $y^2\frac{\partial z}{\partial x} + xy\frac{\partial z}{\partial y} = zx$.

11 [1]. Знайти загальний інтеграл рівняння $\left(x^2 + y^2\right)\frac{\partial z}{\partial x} - y^2 - z^2 = 0$.

12 [1]. Знайти загальний інтеграл рівняння $x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = 2xy\sqrt{a^2 - z^2}$.

13 [1]. Знайти загальний інтеграл рівняння $\left(x^2 + z^2 - x^2\right)\frac{\partial z}{\partial x} - 2xy\frac{\partial z}{\partial y} + 2xz = 0$.

14 [1]. Знайти загальний інтеграл рівняння $x\frac{\partial z}{\partial x} - y\frac{\partial z}{\partial y} = z$. Визначити поверхню, що проходить через криву $z = x^3$, $y = x$.

Практичне заняття № 13

Тема: ***Застосування звичайних диференціальних рівнянь до дослідження процесів реальної дійсності (захист проектів).***

№	*Похідні деяких елементарних функцій*	*Первісні деяких функцій*
1	$\left(x^n\right)' = nx^{n-1}$	$\int dx = C$
2	$\left(\sqrt{x}\right)' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$\int kdx = kx + C$
3	$\left(\dfrac{1}{x}\right)' = -\dfrac{1}{x^2}$	$\int x^n dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C,$ *якщо* $n \neq -1$
4	$\left(a^x\right)' = a^x \ln a$	$\int \dfrac{dx}{x} = \ln\lvert x\rvert + C$
5	$\left(e^x\right)' = e^x$	$\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C$
6	$\left(\log_a x\right)' = \dfrac{1}{x\ln a}$	$\int e^x dx = e^x + C$
7	$\left(\ln x\right)' = \dfrac{1}{x}$	$\int \sin x dx = -\cos x + C$
8	$\left(\sin x\right)' = \cos x$	$\int \cos x dx = \sin x + C$
9	$\left(\cos x\right)' = -\sin x$	$\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$
10	$\left(\operatorname{tg} x\right)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$	$\int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$
11	$\left(\operatorname{ctg} x\right)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$	$\int \dfrac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\dfrac{x}{a} + C = -\arccos\dfrac{x}{a} + C$
12	$\left(\arcsin x\right)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\int \dfrac{dx}{\sqrt{x^2 + a}} = \ln\left\lvert x + \sqrt{x^2 + a}\right\rvert + C$
13	$\left(\arccos x\right)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\int \dfrac{dx}{a^2 + x^2} = \dfrac{1}{a}\operatorname{arctg}\dfrac{x}{a} + C$
14	$\left(\operatorname{arctg} x\right)' = \dfrac{1}{1+x^2}$	$\int \dfrac{dx}{x^2 - a^2} = \dfrac{1}{2a}\ln\left\lvert\dfrac{x-a}{x+a}\right\rvert + C$
15	$\left(\operatorname{arcctg} x\right)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$	$\int \operatorname{sh} x dx = \operatorname{ch} x + C$
16	$\left(\operatorname{sh} x\right)' = \operatorname{ch} x$	$\int \operatorname{ch} x dx = \operatorname{sh} x + C$
17	$\left(\operatorname{ch} x\right)' = \operatorname{sh} x$	$\int \ln x dx = x\ln x - x + C$
18	$\left(\operatorname{th} x\right)' = \dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$	$\int \dfrac{1}{\sin x} dx = \ln\lvert \operatorname{tg}\dfrac{x}{2}\rvert + C$
19	$\left(\operatorname{cth} x\right)' = -\dfrac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$	$\int \dfrac{1}{\cos x} dx = \ln\lvert \operatorname{tg}\left(\dfrac{x}{2} + \dfrac{\pi}{4}\right)\rvert + C$

Література

1. Гудименко Ф.С., Павлюк І.А., Волкова В.О. Збірник задач з диференціальних рівнянь /За ред. доц. Ф.С. Гудименка. – Видавництво Київського університету, 1962. – 168с.
2. Диференціальні рівняння /І.І.Ляшко, О.К.Боярчук, Я.Г.Гай та ін.– К.:Вища шк. Головне видавництво, 1981.– 504с.
3. Дюженкова Л.І., Колесник Т.В., Ляшенко М.Я. та ін. Математичний аналіз у прикладах і задачах. Ч.2– К.: Вища школа, 2003. – 470 с.
4. Задачник по курсу математического анализа /Под ред. Н.Я.Виленкина. – М.: Просвещение, 1971.–336 с.
5. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям.– М.:Наука, 1976. – 576с.
6. Матвеев Н.М. Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. – М.:Высш.школа, 1967.—564с.
7. Матвеев Н.М. Сборник задач и упражнений по обыкновенным дифференциальным уравнениям. –СПб:Изд-во «Лань», 2002.– 432с.
8. Рябушко А.П., Бархатов В.В., Державец В.В., Юруть И.Е. Сборник индивидуальных заданий по высшей математике. В 3 ч. Ч. 2. – Минск: Вышэйшая школа, 1990. – 352с.
9. Самойленко А.М., Перестюк М.О., Парасюк І.О. Диференціальні рівняння.– К.:Либідь, 2003.– 600с.
10. Самойленко А.М., Кривошия С.А., Перестюк М.О. Диференціальні рівняння в задачах.– К.:Либідь, 2003.– 504 с.
11. Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений.– М.:ГИФМЛ, 1958.– 468с.
12. Филиппов А.Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям. – М.:Интеграл-Пресс, 1988.– 208 с.
13. Шкіль М.І., Сотниченко М.А. Звичайні диференціальні рівняння.– К.:Вища шк., 1992.– 303с.
14. Програма навчальної дисципліни “Диференціальні рівняння”(за вимогами кредитно-модульної системи підготовки фахівця). 0101 Педагогічна освіта. Спеціальність: 6.010100 “Педагогіка і методика середньої освіти. Математика”. Освітньо-кваліфікаційний рівень: бакалавр. Кваліфікація: учитель математики. Розробник програми: кандидат фізико-математичних наук, доцент Ковтонюк М.М. Рекомендовано Вченою радою Вінницького державного педагогічного університету імені Михайла Коцюбинського, пр. № 5 від 28.12. 2005 р. – Вінниця, 2005. – 16 с.