Вінницький державний педагогічний університет
імені Михайла Коцюбинського
Факультет математики, фізики і технологій

Кафедра математики та інформатики

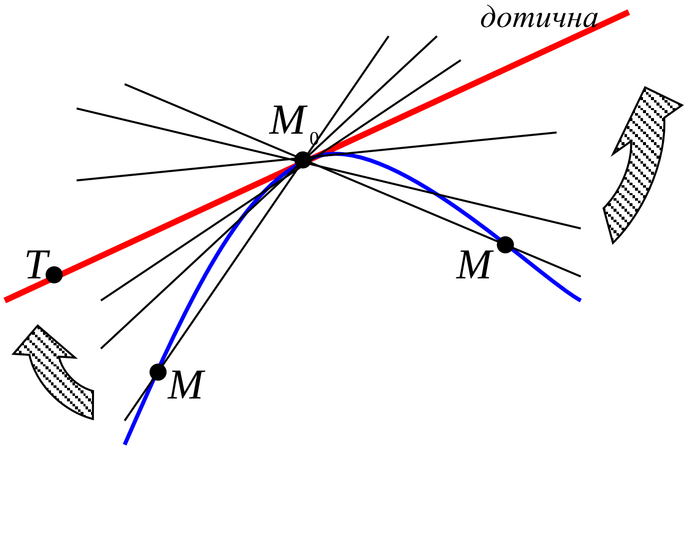
РОБОЧИЙ ЗОШИТ СТУДЕНТА

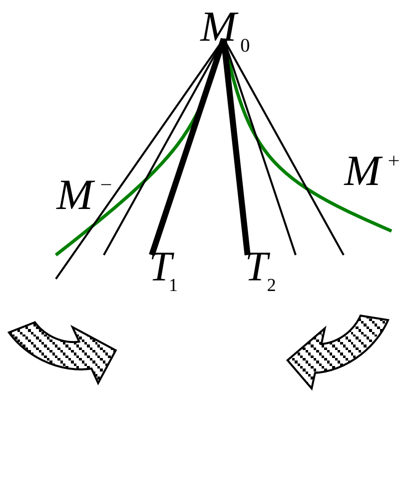
з математичного аналізу

II семестр

Диференціальне числення функції однієї змінної.

(за вимогами кредитно-трансферної системи)





Вінниця 2017

Робочий зошит студента

Дисципліна: математичний аналіз
Розділ: Диференціальне числення функції однієї змінної.

Укладачі: доктор педагогічних наук,
професор **Ковтонюк М.М.**
кандидат фізико-математичних наук,
доцент **Бак С.М.**

Рецензенти: кандидат фізико-математичних наук, доцент **Тимошенко О.З.**

Затверджено рішенням кафедри математики ВДПУ імені Михайла Коцюбинського, протокол №11 від 5.12.2016 року.

Передмова

Робочий зошит з математичного аналізу призначений для використання студентами денної і заочної форм навчання фізико-математичних спеціальностей при вивченні тем "Диференціальне числення функції однієї змінної", „Застосування диференціального числення при дослідженні функцій" в умовах кредитно-модульного навчання.

У **Робочому** зошиті подано робочий план студента з вказаних тем, за яким весь загальний обсяг матеріалу поділено на два загальні і чотири змістові модулі, наведено розрахунки рейтингових балів за видами поточного контролю, а також за модулями.

Кожен модуль складається з практичних занять з добіркою типових завдань для аудиторного і самостійного опрацювання та тексти самостійних робіт.

Після кожного модуля подано текст контрольної роботи або тестового завдання в кількості 30 варіантів. Для допомоги у виконанні самостійної роботи в зошиті подано список рекомендованої літератури і шкалу оцінювання знань згідно з ECTS.

1. Робочий план студента.

Робочий план студента складений на основі навчальної програми з математичного аналізу, затвердженої Вченою радою Вінницького державного педагогічного університету імені Михайла Коцюбинського.

Таблиця 1. Шкала оцінювання знань студентів у 2015-2016 навчальному році

Мінімальний бал для отримання позитивної оцінки – 50, максимальний - 100	Оцінка за розширеною шкалою	Оцінка ЄКТС
90-100	відмінно	A
80-89	дуже добре	B
65-79	добре	C
55-64	задовільно	D
50-54	достатньо	E
35-49	незадовільно	FX
1-34	неприйнятно	F

Таблиця 2. Розподіл рейтингових балів за видами діяльності

№	Вид діяльності	Коефіцієнт вартості (бали)	Кількість робіт	Результат (бали)
1.	Творче завдання	63	1	63
2.	Практичні заняття	1	19	19
3.	Домашні завдання	1	18	18
4.	Самостійні роботи	60	1	60
5.	Контрольна робота	60	2	120
6.	Колоквіум	60	2	120
Всього за 2-й семестр:				**400 (80%)**
Екзамен				**100 (20%)**
Підсумковий рейтинговий бал				**500 (100%)**
Нормований рейтинговий бал				**100**

Опис навчальної дисципліни

<table>
<tr><td rowspan="2">Найменування показників</td><td rowspan="2">Галузь знань, напрям підготовки, освітньо-кваліфікаційний рівень</td><td>Характеристика навчальної дисципліни</td></tr>
<tr><td>денна форма навчання</td></tr>
<tr><td>Кількість кредитів – 5,0</td><td>Галузь знань
11 «Математика та статистика»</td><td>Нормативна</td></tr>
<tr><td>Модулів – 1</td><td rowspan="5">Спеціальність
111 «Математика»</td><td>Рік підготовки:</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Змістових модулів – 2</td><td>1-й</td></tr>
<tr><td>Семестр</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Загальна кількість годин – 150</td><td>2-й</td></tr>
<tr><td>Лекції</td></tr>
<tr><td rowspan="8">Тижневих годин для денної форми навчання:
аудиторних – 4,0
самостійної роботи студента – 6,0</td><td rowspan="8">Освітній ступінь:
бакалавр</td><td>34 год.</td></tr>
<tr><td>Практичні</td></tr>
<tr><td>38 год.</td></tr>
<tr><td>Лабораторні</td></tr>
<tr><td></td></tr>
<tr><td>Самостійна робота</td></tr>
<tr><td>78 год.</td></tr>
<tr><td>Вид контролю: залік</td></tr>
</table>

МОДУЛЬ 1.

Практичне заняття №1

Тема: ***Означення похідної. Таблиця похідних. Правила диференціювання.***

Контрольні запитання.

1. Що називається приростом функції $y = f\left(x\right)$ в точці x_0?
2. Дайте означення похідної функції $y = f\left(x\right)$ в точці x_0.
3. Вивчіть таблицю похідних основних елементарних функцій.
4. Коли кажуть, що функція має в точці x_0 нескінченну похідну?
5. Що таке односторонні похідні функції в точці? Який зв’язок між односторонніми похідними і похідною функції в точці? Наведіть приклад функції, в якої існують односторонні похідні в деякій точці, але не існує похідна в цій точці.
6. Вивчіть формули для похідних суми, різниці, добутку і частки двох функцій. Використовуючи їх, виведіть формули для похідних функцій $\operatorname{tg} x,\ \operatorname{ctg} x,\ \operatorname{sh} x,\ \operatorname{ch} x,\ \operatorname{th} x,\ \operatorname{cth} x.$

✍**1.** *Користуючись означенням похідної, обчислити похідні таких функцій:*

а) $y=3x^2-4x.$ б) $y=\dfrac{1}{x}.$ в) $y=\sqrt{x}.$ г) $y=\cos 3x.$

д) $y=\dfrac{1}{x^2+2}.$

✍**2**. **[13]** *Дослідити на диференційовність функції:*

а) $f(x)=|x|.$ б) $f(x)=\begin{cases} x^3, & x\ge 0,\\ x^2, & x<0.\end{cases}$

в) $f(x)=\begin{cases} \ln(1+x), & x\ge 0,\\ x, & x<0.\end{cases}$ г) $f(x)=\begin{cases} x^2e^{-x^2}, & |x|\le 1,\\ \dfrac{1}{e}, & |x|>1.\end{cases}$

✍**3.** *Вибрати значення параметрів α і β так, щоб функція $f(x)$ була неперервною на $\mathbb{R}$; диференційовною на $\mathbb{R}$:*

а) $f(x)=\begin{cases} \alpha x+\beta, & x\le 1,\\ x^2, & x>1.\end{cases}$ б) $f(x)=\begin{cases} (x+\alpha)e^{-\beta x}, & x<0,\\ \alpha x^2+\beta x+1, & x\ge 0.\end{cases}$

в) $f(x)=\begin{cases} 5x+1, & x\le 0,\\ \alpha x^2+x+\beta, & x\in(0;1),\\ -x, & x\ge 1.\end{cases}$ г) $f(x)=\begin{cases} x^3, & x\le x_0,\\ \alpha x+\beta, & x>x_0.\end{cases}$

✍**4.** *Користуючись загальними правилами диференціювання, знайти похідні від таких функцій:*

а) $y=x\sqrt{x}.$ б) $y=\sqrt[3]{4x\sqrt{5x}}.$

в) $\varphi(t)=\dfrac{\sqrt{t}\cdot\sqrt[3]{t}}{2t^2\cdot\sqrt{t^3}}.$ г) $y=\dfrac{2}{3}x^3-6x^2+7x-8.$

д) $y=arctgx+x+arcctgx.$ е) $y=\cos\dfrac{\pi}{3}+\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{x^3}+\dfrac{1}{x^4}-\dfrac{1}{x^5}.$

є) $y=\sqrt[4]{x^3}-\dfrac{3}{\sqrt[3]{x}}+\dfrac{2}{x^2}+\dfrac{1}{x}.$ ж) $y=\left(3x^2-7x+2\right)\left(1-2x-6x^3\right).$

з) $y=2x\cos x.$ и) $y=\log_2 x\cdot\ln x\cdot\log_3 x.$

і) $y=x^2\operatorname{arctg} x.$ ї) $y=\dfrac{2x^2-5}{x+5}.$

й) $y=\dfrac{x^4-x^2+1}{x^4+x^2+1}.$

✍**5.** *Користуючись загальними правилами диференціювання, знайти похідні від таких функцій:*

а) $f(x)=2x\cos x.$ б) $f(x)=e^x\left(x^2-4x+10\right).$

в) $f(x)=x^2\operatorname{ctg}x$ в) $f(x)=x^2\cos x$

г) $f(x)=x^8\operatorname{ctg}x.$ д) $f(x)=\sqrt[3]{x}\log_3 x.$

е) $f(x)=12x^2\cdot\sqrt[3]{x^7}\cdot\ln x.$ є) $f(x)=x^7\cdot\operatorname{ctg}x\cdot 2^x.$

ж) $f(x)=(x-1)\left(x^2+5\right)\sin x.$ з) $f(x)=x^3\sin x\cdot\ln x.$

и) $y=\dfrac{1-x^3}{1-x^5}.$ і) $y=\dfrac{2}{\left(1-x^2\right)\left(1+x^4\right)}.$

ї) $y=\dfrac{8-3\sqrt{x^3}+2x}{1+6x\sqrt{x}-3x^2}.$ й) $y=\dfrac{\operatorname{arctg}x}{\arcsin x}.$

✍**6.** *Обчислити значення похідної в заданій точці:*

а) $y=\dfrac{5-2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}-1},\ x_0=1.$ б) $y=\dfrac{2^x}{\sin x},\ x_0=5.$

в) $y=\dfrac{\sqrt[3]{x^5}}{\operatorname{tg}x},\ x_0=\dfrac{\pi}{4}.$ г) $y=\dfrac{\ln x}{\sqrt[5]{x^2}},\ x_0=7.$

д) $y=\dfrac{\log_4 x}{x^2},\ x_0=4.$ е) $y=\dfrac{6x^5}{\log_2 x},\ x_0=2.$

є) $y=\dfrac{x^3+1}{x^3-1},\ x_0=2.$ ж) $y=\dfrac{x}{\arcsin x},\ x_0=-\dfrac{1}{2}.$

з) $y=\dfrac{\sin x-x\cos x}{\cos x+x\sin x},\ x_0=\dfrac{\pi}{2}.$

🕮Практичне заняття №2

Тема: ***Техніка диференціювання. Похідна складеної і оберненої функції, логарифмічне диференціювання. Похідна функції заданої параметрично. Похідна неявно заданої функції.***

Контрольні запитання.

1. Вивчіть формули для похідних суми, різниці, добутку і частки двох функцій. Використовуючи їх, виведіть формули для похідних функцій $\operatorname{tg}x,\ \operatorname{ctg}x,\ \operatorname{sh}x,\ \operatorname{ch}x,\ \operatorname{th}x,\ \operatorname{cth}x.$

2. Сформулюйте теорему про похідну оберненої функції. Який фізичний зміст формули для похідної оберненої функції? Користуючись цією формулою, виведіть формули для похідних обернених тригонометричних функцій.
3. Сформулюйте теорему про похідну складеної функції. Використовуючи цю формулу, виведіть формулу для похідної степеневої функції x^{α} , $\alpha \in \mathbb{R}$.

✍**1.** *Знайти похідні функцій:*

а) $y=\left(x^3-2x^2+5\right)^8$. б) $y=\left(\sqrt{x}-\dfrac{2}{x}\right)^{20}$.

в) $y=\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}$. г) $y=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$.

д) $y=\ln\sqrt[4]{\dfrac{x^2+x+1}{x^2-x-1}}$. е) $y=3^{\operatorname{arctg}(x+\pi)}$.

є) $y=\sin\cos^2 x\cdot\cos\sin^2 x$. ж) $y=\cos(3\arccos x)$.

✍**2.** *Обчислити похідну у вказаних точках:*

а) $y=\arcsin\dfrac{2x}{1+x^2}$, $x_0=0$; $x_0=2$. б) $y=2^{tg\frac{1}{x}}$, $x_0=\dfrac{1}{\pi}$.

в) $y=3\sin x\cos^2 x-\sin^3 x$, $x_0=\dfrac{\pi}{2}$. г) $y=\sin^4 3x-\sin 6x$, $x_0=\dfrac{\pi}{2}$.

✍**3.** *Знайти похідні функцій (логарифмічне диференціювання):*

а) $y=\left(x^2+1\right)^{2x}$. б) $y=x^{\frac{x}{\ln^2 x}}$.

в) $y=a^{a^{a}}+a^{a^{x}}+a^{x^{a}}+x^{a^{a}}+a^{x^{x}}+x^{x^{x}}$. г) $y=\left(\arcsin^2 x\right)^{arctgx}$.

д) $y=(chx)^{e^x}$. е) $y=\sqrt[3]{arctg\sqrt[5]{\cos\ln^3 x}}$.

✍**4.** **[13]** *Знайти похідну функції, заданої параметрично:*

а) $x=\sqrt[3]{1-\sqrt{t}}$, $y=\sqrt{1-\sqrt{t}}$, $t_0=\dfrac{1}{64}$; $M_0(1;1)$.

б) $x=\sin^2 t$, $y=\cos^2 t$, $t_0=\dfrac{\pi}{4}$; $M_0\left(\dfrac{3}{4};\dfrac{1}{4}\right)$.

в) $x = a\cdot \mathrm{ch}t,\ y = b\cdot \mathrm{sh}t,\ t_0 = \ln 2;\ M_0\left(a\cdot \mathrm{ch}1;\ b\cdot \mathrm{sh}1\right).$

г) $x = \ln\sin\dfrac{t}{2},\ y = \ln\sin t,\ 0 < t < \pi.$

д) $x = t\cdot \ln t,\ y = \dfrac{\ln t}{t},\ t_0 = 1.$

е) $x = a\left(\mathrm{sh}t - t\right),\ y = a\left(\mathrm{ch}t - 1\right),\ t_0 = 0.$

є) $x = t^3 - 3\pi,\ y = t^3 - 6\,\mathrm{arctg}\,t,\ t_0 = 1.$

✍**5.** *Знайти похідну функції, заданої неявно рівнянням:*

а) $y^5 + y^3 + y - x = 0;$

б) $y^2 = 2px,\ y > 0.$

в) $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1,\ y > 0.$

г) $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}},\ y > 0.$

д) $e^y = \ln y + e,\ M\left(2; 1\right).$

е) $x - y = \arcsin x - \arcsin y,\ M\left(\dfrac{1}{2}; \dfrac{1}{2}\right).$

є) $e^{x-y} = x + y - 1,\ M\left(1; 1\right).$

ж) $x^3 y + \arcsin(x - y) = 1,\ M\left(1; 1\right).$

🕮Практичне заняття №3

Тема: ***Геометричний і механічний зміст похідної.***

Контрольні запитання.

1. Який геометричний зміст похідної функції $y = f(x)$ у точці x_0? Дайте означення дотичної до графіка функції $y = f(x)$ у точці $\left(x_0,\ f\left(x_0\right)\right)$ і напишіть рівняння дотичної.

2.Дайте означення нормалі до графіка функції в точці.

3. Який фізичний зміст похідної функції $y = f(x)$ у точці x_0? Який рух точки описується рівнянням $y = v_0 x + y_0$ ($x-$ час, v_0 і y_0- сталі величини) ?

4.Спробуйте самостійно вивести рівняння дотичної та нормалі до графіка функції в точці.

✍*1*. **[16, с.80]** *Написати рівняння дотичної і нормалі до графіка функції:*

а) $y = 2 - 4x - 3x^2,\ x_0 = -2.$

б) $y = 2\cos\dfrac{x}{2},\ x_0 = \dfrac{3\pi}{2}.$

в) $y = \sqrt{x^2 + 1},\ x_0 = 2.$

г) $y = xe^{-x},\ x_0 = 0.$

д) $y=2\cos\dfrac{x}{2},\ x_0=\dfrac{3\pi}{2}.$ е) $y=x^2e^{-x},\ x_0=1.$

є) $y=\sqrt{2x-1},\ x_0=5.$ ж) $y=2x^3-3x,\ x_0=1.$

з) $y=\operatorname{tg}\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right),\ x_0=\dfrac{\pi}{2}.$ и) $y=\dfrac{3x-4}{\sqrt[3]{x}+4},\ x_0=1.$

і) $x^2+y^2-2x+4y-3=0$ в точках перетину з віссю Ox.

ї) $x=t-\sin t,\ y=1-\cos t,\ t_0=\dfrac{\pi}{2}.$

✍**2. [17, с.52]** *Знайти абсцису точки, в якій дотична до графіка функції* $y=5x^5-3x^3+x+1$ *паралельна прямій* $y=x$.

✍**3.** *Знайти рівняння дотичної до графіка функції* $y=\dfrac{x+4}{x-4}$*, яка паралельна прямій, що проходить через точки* $A(0;\,4)$ *і* $B(2;\,0)$.

✍**4.** *В якій точці графіка функції* $y=\dfrac{1}{\sqrt{3}}\left(x^3-4x\right)$ *дотична нахилена до осі абсцис під кутом* $\alpha=\dfrac{5\pi}{6}$?

✍**5. [16, с.81], [15, с.288]** *Знайти кути, під якими перетинаються лінії:*

а) $x+y-4=0$ і $2y=8-x^2$. б) $x^2+4y^2=4$ і $4y=4-5x^2$.

в) $y=\sin x$ і $y=\cos x$. г) $y=x^2$ і $x=y^2$.

д) $y=\dfrac{2}{3}x^5-\dfrac{1}{9}x^3$ і $x=1$. е) $y=e^{x/2}$ і $x=2$.

є) $x^2+y^2=5$ і $y^2=4x$. ж) $y^2=2x^3$ і $64x-48y-11=0$.

✍**6.** *В яких точках кривої* $x=t-1,\ y=t^3-12t+1$ *дотична паралельна:*
1) осі Ox; *2) прямій* $9x+y+3=0$?

✍**7. [12, с.116]** *Визначити середню швидкість руху тіла за проміжок часу* $2\le t\le 2+\Delta t$*, якщо закон руху задано формулою* $s=t^2-t+1$*, де* t *– час (в секундах),* s *– відстань (в метрах). Знайти миттєву швидкість точки в момент часу* $t_0=2$*. Обчислити середню швидкість для:*

а) $\Delta t=0{,}1.$ б) $\Delta t=0{,}01.$ в) $\Delta t=0{,}001.$ г) $\Delta t=0{,}0001.$

✍**8. [12, с.116]** *Точка здійснює гармонічні коливання за законом* $x=15\sin 3t$*. Знайти миттєву швидкість точки в момент часу* t_0.

✍**9.** **[12, с.117]** *Кількість радіоактивної речовини в момент часу* t *виражається формулою* $m = M\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}}$, *де* T *– так званий період піврозпаду, а* M *– початкова кількість речовини (в момент часу* $t = 0$*). Знайти миттєву швидкість розпаду речовини в момент часу* t_0.

✍**10.** **[12, с.118]** *Нехай в електричному колі тече постійний струм. Під постійним струмом будемо розуміти кількість електроенергії, що протікає в колі за одиницю часу. Дати означення змінного струму в момент часу* t *та обчислити його, якщо кількість електроенергії, що протікає в колі за проміжок часу* $[0; t]$, *рівна* $Q(t)$.

✍**11.** **[12, с.133]** *Довжина вертикально поставленої драбини рівна* 5 *м. Нижній кінець драбини починає відсуватися від стіни зі сталою швидкістю* 2 *м/с. З якою швидкістю опускається в момент часу* t *верхній кінець драбини? Чому дорівнює його прискорення в цей момент часу?*

✍**12.** **[12, с.133]** *Резервуар, що має форму півкулі, заповнюється водою. Вважаючи, що радіус кулі рівний* R_0, *а швидкість його заповнення* v_0, *визначити швидкість підняття рівня води в резервуарі.*

✍**13.** **[20, с.68]** *Довести, що сума відрізків на координатних осях, утворених дотичною до параболи* $x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{2}}$, *для всіх її точок дорівнює* a.

✍**14.** **[20, с.68]** *Показати, що відрізок дотичної до астроїди* $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$, *розміщений між координатними осями, має сталу довжину, рівну* a.

✍**15.** **[20, с.68]** *Довести, що відрізок дотичної до трактриси*

$$y = \frac{a}{2}\ln\frac{a+\sqrt{a^2-x^2}}{a-\sqrt{a^2-x^2}} - \sqrt{a^2-x^2},$$

розміщений між віссю ординат і точкою дотику, має сталу довжину.

✍**16.** **[20, с.68]** *Показати, що для будь-якої точки* $M(x_0; y_0)$ *рівнобічної гіперболи* $x^2 - y^2 = a^2$ *відрізок нормалі від точки* M *до точки перетину з віссю абсцис дорівнює полярному радіусу точки* M.

✍**17.** **[20, с.68]** *Показати, що відрізок, який відтинається на осі абсцис дотичною в довільній точці кривої* $\frac{a}{x^2}+\frac{b}{y^2}=1$, *пропорційний кубу абсциси точки дотику.*

✍**18.** **[20, с.68]** *Довести, що ордината будь-якої точки лінії* $2x^2y^2-x^4=c$ *є середня пропорційна між абсцисою і сумою абсциси і під нормалі, проведеної до лінії в тій же точці.*

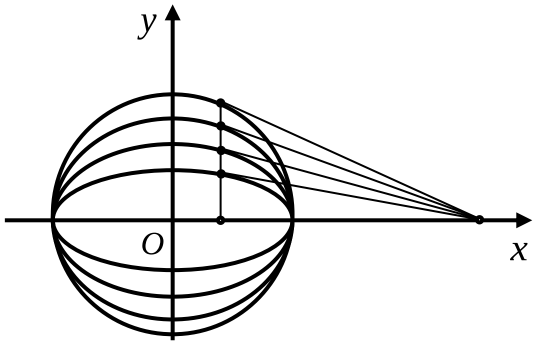


Рис. 1

✍**19.** **[20, с.68]** *Довести, що в еліпсів* $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, *у яких вісь* $2a$ *– спільна, а осі* $2b$ *різні (рис. 1), дотичні, проведені в точках з однаковими абсцисами, перетинаються в одній точці, яка лежить на осі абсцис. Скориставшись цим, вказати простий прийом побудови дотичної до еліпса.*

✍**20.** **[20, с.69]** *Показати, що лінія* $y=e^{kx}\sin mx$ *дотикається до кожної з ліній* $y=e^{kx}$, $y=-e^{kx}$ *в усіх спільних з ними точках.*

✍**21.** **[20, с.69]** *Для побудови дотичної до ланцюгової лінії* $y=\frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}\right)$ *використовується наступний спосіб: на ординаті* MN *точки* M, *як на діаметрі, будується півколо (рис. 2) і відкладається хорда* $NP=a$; *пряма* MP *буде шуканою дотичною. Довести це.*

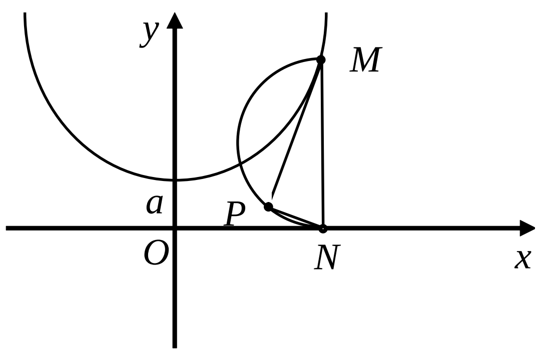


Рис. 2

🕮Практичне заняття №4

Тема: ***Диференціал першого порядку. Наближені обчислення за допомогою диференціалу.***

Контрольні запитання.

1. Дайте означення диференційовної функції в точці.
2. Що таке диференціал функції в точці? Від чого він залежить?
3. Чи може диференціал функції в даній точці бути сталою величиною?
4. Для яких функцій диференціал дорівнює приросту функції? Наведіть приклади.
5. Який геометричний зміст диференціалу?
6. Який фізичний зміст диференціалу?
7. Що розуміти під інваріантністю форми першого диференціалу?
8. Як можна використовувати диференціал функції для наближених обчислень?

✍***1.*** [12, с.138] *Знайти приріст і диференціал функції* $y = x^3 + 2x$ *в точці* $x_0 = 2$ *при* $\Delta x = 0{,}1$ *і при* $\Delta x = 0{,}001$. *Знайти абсолютну і відносну похибки, які ми допускаємо при заміні приросту функції її диференціалом.*

✍***2.*** **[13, с.160]** *Знайти диференціал функції* $f(x)$ *на області визначення і в заданій точці:*

а) явно задані функції:

1) $f(x) = \arccos e^x, \ (0;\ 0).$ 2) $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}, \ (0;\ 0).$

3) $f(x) = \dfrac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} + \ln\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}.$ 4) $f(x) = \dfrac{(2x-1)^3\sqrt{2+3x}}{(5x+4)^2\sqrt[3]{1-x}}, \ x_0 = 0.$

5) $f\left(x\right) = \dfrac{1}{x} + \ln\dfrac{x-1}{x}, \ \ x_0 = -1.$ 5) $f\left(x\right) = \operatorname{arctg}\dfrac{\ln x}{x}, \ \ x_1 = \dfrac{1}{e};\ x_2 = e.$

б) параметрично заданої функції:

1) $x = t^4 + 1, \ y = t^3 + t, \ (2;\ 2).$ 2) $x = t\ln t, \ y = \dfrac{\ln t}{t}, \ (0;\ 0).$

3) $x = (t-1)^2(t-2), \ y = (t-1)^2(t-3), \ (4;\ 0).$

4) $x = \dfrac{e^t}{t}, \ y = (t-1)^2 e^t, \ \left(-\dfrac{2}{\sqrt{e}};\ \dfrac{9}{4\sqrt{e}}\right).$

в) неявно заданої функції:

1) $x^4+x=y^5+y^2, (1;1).$ 2) $x^4+y^4-8x^2-10y^2+16=0, (1;3).$

3) $\sin x=\sin y, (-\pi;\pi).$ 4) $xe^{\frac{x}{y^2}-1}-2y=0, (4;2).$

5) $xy-\sqrt[3]{xy^2+6}=0, (2;1).$ 6) $3^{\sin yx^2}-3x(y-\pi)-1=0, (1;\pi).$

✍**3. [16, с.89]** *Замінюючи приріст функції її диференціалом, обчислити наближено:*

а) $\sqrt[4]{17}.$ б) $arctg0{,}98.$ в) $\sin 29^0.$ г) $\sin 359^0.$ д) $2^{9{,}99}.$
е) $\log_2(15{,}97).$ є) $tg44^0 50'.$ ж) $\arcsin 0{,}51.$

✍**4. [12, с.139]** *Площа круга дорівнює* $S=\pi r^2$. *При вимірюванні* $r=5{,}2$ *см, причому найбільш можлива похибка* Δr *знаходиться в межах* $\pm 0{,}05$ *см. Знайти абсолютну і відносну похибки, що допускаються при обчислення площі круга по вказаній формулі.*

✍**5. [15, с.277]** *Довести, що для всіх малих порівняно з* x_0 *значень* Δx *правильна формула* $\sqrt[n]{x_0+\Delta x}\approx\sqrt[n]{x_0}+\frac{\sqrt[n]{x_0}}{nx_0}\Delta x,\ x_0>0.$ *За допомогою цієї формули наближено обчислити:*

а) $\sqrt{640}$; г) $\sqrt[10]{1000}$; є) $\sqrt[3]{65}$;
б) $\sqrt[3]{200}$; д) $\sqrt[4]{90}$; ж) $\sqrt[3]{125{,}1324}$;
в) $\sqrt[5]{243{,}45}$; е) $\sqrt[4]{15{,}8}$; з) $\sqrt[4]{17}$.

✍**6. [20, с.70]** *Знайти приріст* ΔV *об'єму* V *кулі при зміні радіусу* $R=2$ *на* ΔR. *Обчислити* ΔV, *якщо* $\Delta R=0{,}5;\ 0{,}1;\ 0{,}01$. *Якою буде похибка значення* ΔV, *якщо обмежитися лише членом, що містить* ΔR *в першому степені?*

🕮Практичне заняття №5

⌛ Самостійна робота №1 на тему: „Похідна функції однієї змінної" (25 балів)

✍***Завдання № 1. Знайти похідну функції однієї змінної:***

1. $y=\sin\sqrt{3}+\frac{1}{3}\cdot\frac{\sin^2 3x}{\cos 6x}$. **3.** $y=\frac{\cos\sin 5\cdot\sin^2 2x}{2\cos 4x}$.

2. $y=\mathrm{tg}\lg\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\cdot\frac{\sin^2 4x}{\cos 8x}$. **4.** $y=\frac{\cos\ln 7\cdot\sin^2 7x}{7\cos 14x}$.

5. $y=\operatorname{ctg}\cos 2+\frac{1}{6}\cdot\frac{\sin^2 6x}{\cos 12x}$.

6. $y=8\sin\operatorname{ctg}3+\frac{1}{5}\cdot\frac{\sin^2 5x}{\cos 10x}$.

7. $y=\dfrac{\cos\operatorname{tg}\frac{1}{3}\cdot\sin^2 15x}{15\cos 30x}$.

8. $y=\dfrac{\operatorname{tg}\ln 2\cdot\sin^2 19x}{19\cos 38x}$.

9. $y=\sqrt[7]{\operatorname{tg}\cos 2}+\dfrac{\sin^2 27x}{27\cos 54x}$.

10. $y=\cos^2\sin 3+\dfrac{\sin^2 29x}{29\cos 58x}$.

11. $y=\operatorname{tg}\sqrt{\cos\frac{1}{3}}+\dfrac{\sin^2 31x}{31\cos 62x}$.

12. $y=\dfrac{\cos\operatorname{ctg}3\cdot\cos^2 14x}{28\sin 28x}$.

13. $y=\operatorname{ctg}\cos 5-\frac{1}{40}\dfrac{\cos^2 20x}{40\sin 40x}$.

14. $y=\sqrt[3]{\cos\sqrt{2}}-\frac{1}{52}\dfrac{\cos^2 26x}{\sin 52x}$.

15. $y=\sin\sqrt{tg2}-\dfrac{\cos^2 28x}{56\sin 56x}$.

16. $y=\cos\ln 2-\frac{1}{3}\cdot\dfrac{\cos^2 3x}{\sin 3x}$.

17. $y=\operatorname{ctg}\sqrt[3]{5}-\frac{1}{8}\cdot\dfrac{\cos^2 4x}{\sin 8x}$.

18. $y=\dfrac{\sin\cos 3\cdot\cos^2 2x}{4\sin 4x}$.

19. $y=\cos\operatorname{ctg}2-\frac{1}{16}\cdot\dfrac{\cos^2 8x}{\sin 16x}$.

20. $y=\operatorname{tg}\sin 3+\frac{1}{6}\cdot\dfrac{\cos^2 6x}{\sin 12x}$.

21. $y=\operatorname{tg}\lg 16+\frac{1}{9}\operatorname{tg}^4 2x-\operatorname{ctg}3x$.

22. $y=\dfrac{\operatorname{ctg}\sin\frac{1}{3}\cdot\sin^2 17x}{17\cos 34x}$.

23. $y=\sqrt{\operatorname{tg}4}+\dfrac{\sin^2 21x}{21\cos 42x}$.

24. $y=\ln\cos\frac{1}{3}+\dfrac{\sin^2 23x}{23\cos 46x}$.

25. $y=\sin\ln\frac{1}{2}+\dfrac{\sin^2 25x}{25\cos 50x}$.

26. $y=\ln\sin\frac{1}{3}-\frac{1}{24}\dfrac{\cos^2 12x}{\sin 24x}$.

27. $y=\dfrac{\sqrt[5]{ctg2}\cdot\cos^2 18x}{36\sin 36x}$.

28. $y=\cos\ln 13-\frac{1}{44}\dfrac{\cos^2 22x}{\sin 44x}$.

29. $y=\operatorname{ctg}\sin\frac{1}{13}-\frac{1}{48}\dfrac{\cos^2 24x}{\sin 48x}$.

30. $y=\sin^3\cos 3-\dfrac{\cos^2 30x}{60\sin 60x}$.

✍Завдання № 2. Знайти похідну функції однієї змінної:

1. 1) $y=\sqrt[3]{3x^4+2x-5}+\dfrac{4}{(x-2)^5}$, **2)** $y=\sin^3 2x\cdot\cos 8x^5$,

3) $y=\operatorname{arcctg}^2 5x\cdot\ln(x-4)$, **4)** $y=\operatorname{tg}^4 3x\cdot\arcsin 2x^3$,

5) $y=\dfrac{e^{\arccos^4 x}}{\sqrt{x+5}}$, **6)** $y=\dfrac{\log_5(3x-7)}{\operatorname{ctg}7x^3}$,

7) $y=\dfrac{9\operatorname{arctg}(x+7)}{(x-1)^2}$, **8)** $y=\sqrt{\dfrac{2x+1}{2x-1}}\log_2\left(x-3x^2\right)$.

2. 1) $y=\sqrt[3]{(x-3)^4}-\dfrac{3}{2x^3-3x+1}$, **2)** $y=\cos^5 3x\cdot tg(4x+1)^3$,

3) $y=\operatorname{arctg}^3 2x\cdot\ln(x+5)$, **4)** $y=(x-2)^4\arcsin 5x^4$,

5) $y=\dfrac{(x-4)^2}{e^{\operatorname{arcctg}x}}$, **6)** $y=\dfrac{\ln(5x-3)}{4\operatorname{tg}3x^4}$,

7) $y=\dfrac{8\operatorname{arctg}(2x+3)}{(x+1)^2}$, **8)** $y=\sqrt[3]{\dfrac{2x-5}{2x+3}}\lg(4x+7)$.

3.1) $y=\sqrt{(x-4)^5}+\dfrac{5}{\left(2x^2+4x-1\right)^2}$, **2)** $y=\operatorname{tg}^4 x\cdot\arcsin 4x^5$,

3) $y=\arccos^4 x\cdot\ln\left(x^2+x-1\right)$, **4)** $y=2^{-x^3}\operatorname{arctg}7x^4$,

5) $y=\dfrac{e^{-x^2}}{\sqrt{x^2+5x-1}}$, **6)** $y=\dfrac{\ln(7x+2)}{5\cos 4x}$,

7) $y=\dfrac{7\arccos(4x-1)}{(x+2)^4}$, **8)** $y=\sqrt[4]{\dfrac{x+3}{x-3}}\ln\left(5x^2-2x+1\right)$.

4. 1) $y=\sqrt[5]{7x^2-3x+5}-\dfrac{5}{(x-1)^3}$, **2)** $y=\arcsin^3 2x\cdot\operatorname{ctg}7x^4$,

3) $y=\sqrt{\arccos 2x}\cdot 3^{-x}$, **4)** $y=(x+6)^5\operatorname{arcctg}3x^5$,

5) $y=\dfrac{e^{-\operatorname{ctg}5x}}{3x^2-4x+2}$, **6)** $y=\dfrac{\operatorname{tg}^3 2x}{\operatorname{tg}(5x+1)}$,

7) $y=\dfrac{6\arcsin(x+5)}{(x-2)^5}$, **8)** $y=\sqrt[5]{\dfrac{x+1}{x-1}}\log_3\left(x^2+x+4\right)$.

5. 1) $y=\sqrt[4]{3x^2-x+5}-\dfrac{3}{(x-5)^4}$, **2)** $y=\operatorname{ctg}3x\cdot\arccos 3x^2$,

3) $y=\operatorname{tg}^4 3x\cdot\operatorname{arctg}7x^2$, **4)** $y=3^{\cos x}\ln\left(x^2-3x+7\right)$,

5) $y=\dfrac{\sqrt{7x^{3-5x+2}}}{e^{\cos x}}$, **6)** $y=\dfrac{\sin^3 5x}{\ln(2x-3)}$,

7) $y=\dfrac{3\,\mathrm{arcctg}(2x-5)}{(x+1)^4}$, **8)** $y=\sqrt[6]{\dfrac{7x-4}{7x+4}}\log_5\left(3x^2+2x\right)$.

6. 1) $y=\sqrt{3x^4-2x^3+x}-\dfrac{4}{(x+2)^3}$, **2)** $y=\arccos^2 4x\cdot\ln(x-3)$,

3) $y=5^{-x^2}\arcsin 3x^3$, **4)** $y=\log_2(x-7)\cdot\mathrm{arctg}\sqrt{x}$,

5) $y=\dfrac{e^{\mathrm{tg}\,3x}}{\sqrt{3x^2-x+4}}$, **6)** $y=\dfrac{\cos^2 3x}{\lg(3x-4)}$,

7) $y=\dfrac{2\,\mathrm{arctg}(3x+2)}{(x-3)^2}$, **8)** $y=\sqrt[7]{\dfrac{2x-3}{2x+1}}\lg(7x-10)$.

7. 1) $y=\sqrt[3]{(x-7)^5}+\dfrac{5}{4x^2+3x-5}$, **2)** $y=\ln^5 x\cdot\mathrm{arctg}\,7x^4$,

3) $y=\mathrm{arctg}^5 x\cdot\log_2(x-3)$, **4)** $y=\arccos^3 5x\cdot\mathrm{tg}\,x^4$,

5) $y=\dfrac{e^{\sin x}}{(x-5)^7}$, **6)** $y=\dfrac{\log_3(4x+5)}{2\,\mathrm{ctg}\sqrt{x}}$,

7) $y=\dfrac{4\arccos 3x}{(x+2)^5}$, **8)** $y=\sqrt[8]{\dfrac{5x+1}{5x-1}}\ln\left(3x-x^2\right)$.

8. 1) $y=\sqrt[5]{(x+4)^6}-\dfrac{3}{2x^2-3x+7}$, **2)** $y=\mathrm{arctg}^3 4x\cdot 3^{\sin x}$,

3) $y=\log_3(x+5)\cdot\arccos 3x$, **4)** $y=(x-5)^7\,\mathrm{arcctg}\,3x^5$,

5) $y=\dfrac{\sqrt[3]{2x^2-3x+1}}{e^{-x}}$, **6)** $y=\dfrac{\ln(7x-3)}{3\,\mathrm{tg}^2 4x}$,

7) $y=\dfrac{\arcsin(3x+8)}{(x-7)^3}$, **8)** $y=\sqrt[9]{\dfrac{x+3}{x-3}}\log_5(2x-3)$.

9. 1) $y=\dfrac{3}{(x-4)^7}-\sqrt{5x^2-4x+3}$, **2)** $y=2^{\cos x}\cdot\mathrm{arcctg}\,5x^3$,

3) $y=e^{-x}\cdot\arcsin^2 5x$, **4)** $y=\arccos x^2\cdot\mathrm{ctg}\,7x^3$,

5) $y=\dfrac{\sqrt{x^3+4x-5}}{e^{x^2}}$, **6)** $y=\dfrac{\lg(11x+3)}{\cos^2 5x}$,

7) $y=\dfrac{7\operatorname{arctg}(4x+1)}{(x-4)^2}$, **8)** $y=\sqrt{\dfrac{6x+5}{6x-5}}\lg(4x+7)$.

10. 1) $y=\sqrt[3]{4x^2-3x-4}-\dfrac{2}{(x-3)^5}$, **2)** $y=4^{-x}\cdot\ln^5(x+2)$,

3) $y=\log_4(x-1)\cdot\arcsin^4 x$, **4)** $y=5^{-x^2}\arccos 5x^4$,

5) $y=\dfrac{e^{\operatorname{ctg}5x}}{(x+4)^3}$, **6)** $y=\dfrac{\operatorname{ctg}^2 5x}{\ln(7x-2)}$,

7) $y=\dfrac{3\arcsin(2x-7)}{(x+2)^4}$, **8)** $y=\sqrt[3]{\dfrac{4x-1}{4x+1}}\ln(2x^3-3)$.

11. 1) $y=\dfrac{7}{(x-1)^3}+\sqrt{8x-3+x^2}$, **2)** $y=3^{\operatorname{tg}x}\cdot\arcsin 7x^4$,

3) $y=(x-4)^5\cdot\operatorname{arcctg}3x^2$, **4)** $y=\operatorname{arctg}^4 x\cdot\cos 7x^4$,

5) $y=\dfrac{\sqrt{3+2x-x^2}}{e^x}$, **6)** $y=\dfrac{\operatorname{tg}^2(x-2)}{\lg(x+3)}$,

7) $y=\dfrac{2\lg(4x+5)}{(x+6)^4}$, **8)** $y=\sqrt[4]{\dfrac{x+6}{x-6}}\sin(3x^2+1)$.

12. 1) $y=\sqrt[5]{3x^2+4x-5}+\dfrac{4}{(x-4)^4}$, **2)** $y=5^{x^2}\cdot\arccos 2x^5$,

3) $y=\operatorname{ctg}^3 4x\cdot\operatorname{arctg}2x^3$, **4)** $y=4(x-7)^6\arcsin 3x^5$,

5) $y=\dfrac{e^{3x}}{\sqrt{3x^2-4x-7}}$, **6)** $y=\dfrac{\sin^3(5x+1)}{\lg(3x-2)}$,

7) $y=\dfrac{5\ln(5x+7)}{(x-7)^2}$, **8)** $y=\sqrt[5]{\dfrac{x-7}{x+7}}\cos(2x^3+x)$.

13. 1) $y=\sqrt[3]{5x^4-2x-1}+\dfrac{8}{(x-5)^2}$, **2)** $y=\sin^4 3x\cdot\operatorname{arctg}2x^3$,

3) $y=e^{-\cos x}\operatorname{arctg}7x^5$, **4)** $y=(x+5)^2\arccos^3 2x$,

5) $y=\dfrac{e^{-\sin 2x}}{(x+5)^4}$, **6)** $y=\dfrac{\cos^4(7x-1)}{\lg(x+5)}$,

7) $y=\dfrac{4\log_3(3x+1)}{(x+1)^2}$, **8)** $y=\sqrt[6]{\dfrac{x-9}{x+9}}\,\mathrm{tg}\left(3x^2-4x+1\right)$.

14. 1) $y=\dfrac{3}{(x+2)^5}-\sqrt[7]{5x-7x^2-3}$, **2)** $y=\cos^3 4x\cdot \mathrm{arcctg}\sqrt{x}$,

3) $y=(x+1)\arccos 3x^4$, **4)** $y=2^{-\sin x}\arcsin^3 2x$,

5) $y=\dfrac{e^{\cos 5x}}{\sqrt{x^2-5x-2}}$, **6)** $y=\dfrac{\sin^3(4x+3)}{\ln(7x+1)}$,

7) $y=\dfrac{7\log_4(2x-5)}{(x-1)^5}$, **8)** $y=\sqrt[7]{\dfrac{x-4}{x+4}}\,\mathrm{ctg}(2x+5)$.

15. 1) $y=\sqrt[4]{(x-1)^5}-\dfrac{4}{7x^2-3x+2}$, **2)** $y=\mathrm{tg}^3 2x\cdot\arcsin x^5$,

3) $y=2^{\sin x}\,\mathrm{arcctg}\,x^4$, **4)** $y=(x+2)^7\arccos\sqrt{x}$,

5) $y=\dfrac{(2x+5)^3}{e^{tgx}}$, **6)** $y=\dfrac{\mathrm{ctg}^3(2x-3)}{\log_3(x+2)}$,

7) $y=\dfrac{\ln(7x+2)}{(x-6)^4}$, **8)** $y=\sqrt[8]{\dfrac{x-2}{x+2}}\sin\left(4x^2-7x+2\right)$.

16. 1) $y=\sqrt[5]{(x-2)^6}-\dfrac{3}{7x^3-x^2-4}$ **2)** $y=\mathrm{ctg}^7 x\cdot\arccos 2x^3$,

3) $y=3^{-x^3}\,\mathrm{arctg}\,2x^5$, **4)** $y=(x-7)^5\arcsin 7x^4$,

5) $y=\dfrac{e^{-tg\,3x}}{4x^2-3x+5}$, **6)** $y=\dfrac{\lg^3 x}{\sin 5x^2}$,

7) $y=\dfrac{4\lg(3x+7)}{(x+1)^7}$, **8)** $y=\sqrt[9]{\dfrac{x-3}{x+3}}\cos\left(x^2-3x+2\right)$.

17. 1) $y=\dfrac{3}{(x+4)^2}-\sqrt[3]{4+3x-x^4}$, **2)** $y=e^{-\sin x}\cdot tg\,7x^6$,

3) $y=3^{\cos x}\arcsin^2 3x$, **4)** $y=\ln(x-3)\cdot\arccos 3x^4$,

5) $y=\dfrac{e^{-\sin 4x}}{(2x-5)^6}$, **6)** $y=\dfrac{\ln^2(x+1)}{\cos 3x^4}$,

7) $y=\dfrac{5\log_2\left(x^2+1\right)}{(x-3)^4}$, **8)** $y=\sqrt{\dfrac{3x-2}{3x+2}}\,\mathrm{tg}\left(2x^2-9\right)$.

18. **1)** $y=\dfrac{2}{(x-1)^3}-\dfrac{8}{6x^2+3x-7}$, **2)** $y=e^{\cos x}\cdot\operatorname{ctg}8x^3$,

3) $y=\ln(x-10)\cdot\arccos^2 4x$, **4)** $y=\log_2(x-4)\cdot\operatorname{arctg}^3 4x$,

5) $y=\dfrac{3x^2-5x+10}{e^{-x^4}}$, **6)** $y=\dfrac{\log_2(7x-5)}{tg\sqrt{x}}$,

7) $y=\dfrac{6\log_3(2x+9)}{(x+4)^2}$, **8)** $y=\sqrt{\dfrac{2x+3}{2x-3}}\operatorname{ctg}(3x^2+5)$.

19. **1)** $y=\sqrt{1+5x-2x^2}+\dfrac{3}{(x-3)^4}$, **2)** $y=\cos^5 x\cdot\arccos 4x$,

3) $y=\lg(x-2)\cdot\arcsin^5 x$, **4)** $y=(x-7)^4\operatorname{arcctg}^2 7x$,

5) $y=\dfrac{e^{-x}}{(2x^2-x+4)^2}$, **6)** $y=\dfrac{\log_3(4x-2)}{\operatorname{ctg}2x}$,

7) $y=\dfrac{3\log_2(5x-4)}{(x-3)^5}$, **8)** $y=\sqrt[4]{\dfrac{x+5}{x-5}}\sin(3x^2-x+4)$.

20. **1)** $y=\sqrt[3]{5+4x-x^2}-\dfrac{5}{(x+1)^3}$, **2)** $y=\sin^3 7x\cdot\operatorname{arcctg}5x^2$,

3) $y=\log_3(x+1)\cdot\operatorname{arctg}^5 7x$, **4)** $y=\sqrt[3]{x-3}\arccos^4 2x$,

5) $y=\dfrac{e^{4x}}{(3x+5)^3}$, **6)** $y=\dfrac{\ln^3(x-5)}{tg\left(\dfrac{1}{x}\right)}$,

7) $y=\dfrac{7\log_5(x^2+x)}{(x+3)^2}$, **8)** $y=\sqrt[5]{\dfrac{x-6}{x+6}}\cos(7x+2)$.

21. **1)** $y=\sqrt[4]{5x^2-4x+1}-\dfrac{7}{(x-5)^2}$, **2)** $y=\sin^2 3x\cdot\operatorname{arcctg}3x^5$,

3) $y=\ln(x+9)\cdot\operatorname{arcctg}^3 2x$, **4)** $y=\sqrt[3]{x-4}\arcsin^4 5x$,

5) $y=\dfrac{e^{ctg\,5x}}{(3x-5)^4}$, **6)** $y=\dfrac{\lg(x+2)}{\sin 2x^5}$,

7) $y=\dfrac{\log_7\left(2x^2+5\right)}{\left(x-4\right)^2}$, **8)** $y=\sqrt[6]{\dfrac{x-7}{x+7}}\arcsin\left(2x+3\right)$.

22. 1) $y=\sqrt[5]{3-7x+x^2}-\dfrac{4}{\left(x-7\right)^5}$, **2)** $y=\cos\sqrt[5]{x}\cdot\operatorname{arctg}x^4$,

3) $y=\lg\left(x+2\right)\cdot\arcsin^2 3x$, **4)** $y=\left(x-3\right)^2\arccos 3x^6$,

5) $y=\dfrac{\left(2x-3\right)^7}{e^{-2x}}$, **6)** $y=\dfrac{\operatorname{tg}^3 7x}{\ln\left(3x+2\right)}$,

7) $y=\dfrac{2\ln\left(3x-10\right)}{\left(x+5\right)^7}$, **8)** $y=\sqrt[7]{\dfrac{x-8}{x+8}}\arccos\left(3x-5\right)$.

23. 1) $y=\sqrt{\left(x-3\right)^7}+\dfrac{9}{7x^2-5x-8}$, **2)** $y=\operatorname{tg}^6 2x\cdot\cos 7x^2$,

3) $y=4^{-\sin x}\operatorname{arctg}3x$, **4)** $y=\sqrt{\left(x+3\right)^5\arcsin 2x^3}$,

5) $y=\dfrac{\left(3x+1\right)^4}{e^{4x}}$, **6)** $y=\dfrac{\operatorname{ctg}\sqrt{x-2}}{\lg\left(3x+5\right)}$,

7) $y=\dfrac{8\lg\left(4x+5\right)}{\left(x-1\right)^5}$, **8)** $y=\sqrt[8]{\dfrac{x-4}{x+4}}\operatorname{arctg}\left(5x+1\right)$.

24. 1) $y=\sqrt[3]{\left(x-8\right)^4}-\dfrac{2}{1+3x-4x^2}$, **2)** $y=\operatorname{ctg}^3 4x\cdot\arcsin\sqrt{x}$,

3) $y=2^{\cos x}\operatorname{arcctg}^3 x$, **4)** $y=\sqrt[3]{\left(x+1\right)^2}\arccos 3x$,

5) $y=\dfrac{5x^2+4x-2}{e^{-x}}$, **6)** $y=\dfrac{\operatorname{tg}\left(3x+7\right)}{\ln^2\left(x+3\right)}$,

7) $y=\dfrac{2\log_3\left(4x-7\right)}{\left(x+3\right)^4}$, **8)** $y=\sqrt[9]{\dfrac{x-1}{x+1}}\operatorname{arcctg}\left(7x+2\right)$.

25. 1) $y=\dfrac{3}{4x-3x^2+1}-\sqrt{\left(x+1\right)^5}$, **2)** $y=\operatorname{ctg}\dfrac{1}{x}\cdot\arccos x^4$,

3) $y=\lg\left(x-3\right)\cdot\arcsin^2 5x$, **4)** $y=\operatorname{tg}^3 x\cdot\operatorname{arcctg}3x$,

5) $y=\dfrac{\sqrt{5x^2-x+1}}{e^{3x}}$, **6)** $y=\dfrac{\cos^2 x}{\lg\left(x^2-2x+1\right)}$,

7) $y=\dfrac{3\log_4(2x+9)}{(x-7)^2}$, **8)** $y=\sqrt{\dfrac{7x+4}{7x-4}}\arcsin\left(x^2+1\right)$.

26. 1) $y=\dfrac{3}{x-4}+\sqrt[6]{\left(2x^2-3x+1\right)^5}$, **2)** $y=\operatorname{tg}\sqrt{x}\cdot\operatorname{arcctg}3x^5$,

3) $y=\log_2(x+3)\cdot\arccos^2 x$, **4)** $y=\sqrt{(x-2)^3}\operatorname{arctg}(7x-1)$,

5) $y=\dfrac{e^{-x^2}}{(2x-5)^7}$, **6)** $y=\dfrac{\log_2(3x+7)}{\operatorname{tg}3x}$,

7) $y=\dfrac{\lg\left(x^2+2x\right)}{(x+8)^4}$, **8)** $y=\sqrt[3]{\dfrac{8x-3}{8x+3}}\arccos\left(x^2-5\right)$.

27.1) $y=\dfrac{4}{(x-7)^3}-\sqrt[3]{\left(3x^2-x+1\right)^4}$, **2)** $y=\operatorname{tg}^3 2x\cdot\arccos 2x^3$,

3) $y=2^{-x}\operatorname{arctg}^3 4x$, **4)** $y=\sqrt[5]{(x+4)^2}\arcsin 7x^2$,

5) $y=\dfrac{e^{\cos 3x}}{(2x+4)^5}$, **6)** $y=\dfrac{\ln^3 x}{\operatorname{ctg}(x-3)}$,

7) $y=\dfrac{3\ln\left(x^2+5\right)}{(x-7)^3}$, **8)** $y=\sqrt[4]{\dfrac{2x-5}{2x+5}}\operatorname{arctg}(3x+2)$.

28.1) $y=\sqrt{(x-4)^7}-\dfrac{10}{\left(3x^2-5x+1\right)}$, **2)** $y=2^{\operatorname{tg}x}\cdot\operatorname{arctg}^5 3x$,

3) $y=\ln(x-4)\cdot\operatorname{arcctg}^4 3x$, **4)** $y=\arcsin^3 4x\cdot\operatorname{ctg}3x$,

5) $y=\dfrac{e^{\sin 5x}}{(3x-2)^2}$, **6)** $y=\dfrac{\operatorname{tg}^4 5x}{\ln(x+7)}$,

7) $y=\dfrac{4\log_2(3x-5)}{(x-2)^2}$, **8)** $y=\sqrt[5]{\dfrac{3x-4}{3x+4}}\operatorname{arcctg}(2x+5)$.

29. 1) $y=\dfrac{7}{(x+2)^5}-\sqrt{8-5x+2x^2}$, **2)** $y=\sin^5 3x\cdot\operatorname{arctg}\sqrt{x}$,

3) $y=\lg(x+3)\cdot\operatorname{arcctg}^2 5x$, **4)** $y=e^{-\cos x}\arcsin 2x$,

5) $y=\dfrac{\sqrt{x^2-3x-7}}{e^{-x^4}}$, **6)** $y=\dfrac{\log_3(x+4)}{\cos^5 x}$,

7) $y=\dfrac{2\ln\left(2x^2+3\right)}{\left(x-7\right)^4}$, **8)** $y=\sqrt[6]{\dfrac{x^2-1}{x^2+1}}\arcsin 2x$.

30. 1) $y=\sqrt[3]{\left(x-1\right)^5}+\dfrac{5}{2x^2-4x+7}$, **2)** $y=\cos^4 3x\cdot\arcsin 3x^2$,

3) $y=\log_5\left(x+1\right)\cdot\operatorname{arctg}^2 x^3$, **4)** $y=\sqrt{\left(x+5\right)^3}\arccos^4 x$,

5) $y=\dfrac{e^{-\operatorname{tg}x}}{4x^2+7x-5}$, **6)** $y=\dfrac{\operatorname{tg}^4 2x}{\lg\left(x^2-x+4\right)}$,

7) $y=\dfrac{4\lg\left(3x+7\right)}{\left(x-5\right)^3}$, **8)** $y=\sqrt[7]{\dfrac{x^2+3}{x^2-3}}\arccos 4x$.

✍Завдання № 3. Записати рівняння дотичної та нормалі до графіка функції в точці x_0:

1. $y=x^3$, $x_0=-1$.

2. $y=2-4x-3x^2$, $x_0=-2$.

3. $y=2\cos\dfrac{x}{2}$, $x_0=\dfrac{3\pi}{2}$.

4. $y=2x^3-3x$, $x_0=1$.

5. $y=\dfrac{3x-4}{\sqrt[3]{x+4}}$, $x_0=1$.

6. $y=\cos\left(1-3x\right)$, $x_0=\dfrac{1}{3}$.

7. $y=\operatorname{ctg}\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$, $x_0=-\dfrac{\pi}{2}$.

8. $y=0,5x^2-0,5x+1$, $x_0=8$.

9. $y=2x^2+\dfrac{1}{3}x^3$, $x_0=-3$.

10. $y=-0,5x^2+2x$, $x_0=-2$.

11. $y=-\dfrac{2}{x}$, $x_0=1$.

12. $y=\sqrt{x^2+1}$, $x_0=2$.

13. $y=x^2e^{-x}$, $x_0=1$.

14. $y=\operatorname{tg}\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)$, $x_0=\dfrac{\pi}{2}$.

15. $y=\cos^5 x$, $x_0=\pi$.

16. $y=\sin\left(1-2x\right)$, $x_0=\dfrac{1}{2}$.

17. $y=\dfrac{x^2-1}{x}$, $x_0=-2$.

18. $y=x^3-x^2$, $x_0=-1$.

19. $y=x^2-4$, $x_0=2$.

20. $y=\dfrac{1}{3}x^3-2x^2$, $x_0=3$.

21. $y=x^3-3x$, $x_0=2$.

22. $y=xe^{-x}$, $x_0=0$.

23. $y=\sqrt{2x-1}$, $x_0=5$.

24. $y=\sqrt{4x-3-x^2}$, $x_0=\dfrac{3}{2}$.

25. $y=\sqrt[3]{ctgx}$, $x_0=\dfrac{\pi}{4}$.

26. $y=\sin^2 3x$, $x_0=\dfrac{\pi}{12}$.

27. $y=(3x-7)^3$, $x_0=3$.

28. $y=0{,}5x^2-3x$, $x_0=-2$.

29. $y=x^3+x^2$, $x_0=1$.

30. $y=\cos^5 x$, $x_0=\pi$.

✍*Завдання № 4. Записати рівняння дотичної та нормалі до графіка функції в точці, яка відповідає значенню параметра* $t=t_0$*:*

1. $\begin{cases} x=a\sin^3 t, \\ y=a\cos^3 t, \end{cases} t_0=\dfrac{\pi}{3}.$

2. $\begin{cases} x=\sqrt{3}\cos t, \\ y=\sin t, \end{cases} t_0=\dfrac{\pi}{3}.$

3. $\begin{cases} x=a(t-\sin t), \\ y=a(1-\cos t), \end{cases} t_0=\dfrac{\pi}{3}.$

4. $\begin{cases} x=2t-t^2, \\ y=3t-t^2, \end{cases} t_0=1.$

5. $\begin{cases} x=\left(2t+t^2\right)/\left(1+t^3\right), \\ y=\left(2t-t^2\right)/\left(1+t^2\right), \end{cases} t_0=1.$

6. $\begin{cases} x=\arcsin\left(t/\sqrt{1+t^2}\right), \\ y=\arccos\left(1/\sqrt{1+t^2}\right), \end{cases} t_0=-1.$

7. $\begin{cases} x=t(t\cos t-2\sin t), \\ y=t(t\sin t+2\cos t), \end{cases} t_0=\dfrac{\pi}{4}.$

8. $\begin{cases} x=3at/\left(1+t^2\right), \\ y=3at^2/\left(1+t^2\right), \end{cases} t_0=2.$

9. $\begin{cases} x=2\ln \operatorname{ctg} t+1, \\ y=\operatorname{tg} t+\operatorname{ctg} t, \end{cases} t_0=\dfrac{\pi}{4}.$

10. $\begin{cases} x=(1/2)t^2-(1/4)t^4, \\ y=(1/2)t^2+(1/3)t^3, \end{cases} t_0=0.$

11. $\begin{cases} x=at\cos t, \\ y=at\sin t, \end{cases} t_0=\dfrac{\pi}{2}.$

12. $\begin{cases} x=\sin^2 t, \\ y=\cos^2 t, \end{cases} t_0=\dfrac{\pi}{6}.$

13. $\begin{cases} x=\arcsin\left(t/\sqrt{1+t^2}\right), \\ y=\arccos\left(1/\sqrt{1+t^2}\right), \end{cases} t_0=1.$

14. $\begin{cases} x=(1+\ln t)/t^2, \\ y=(3+2\ln t)/t, \end{cases} t_0=1.$

15. $\begin{cases} x=(1+t)/t^2, \\ y=3/\left(2t^2\right)+2/t, \end{cases} t_0=2.$

16. $\begin{cases} x=a\sin^3 t, \\ y=a\cos^3 t, \end{cases} t_0=\dfrac{\pi}{6}.$

17. $\begin{cases} x=a(t\sin t+\cos t), \\ y=a(\sin t-t\cos t), \end{cases} t_0=\dfrac{\pi}{4}.$

18. $\begin{cases} x=(t+1)/t, \\ y=(t-1)/t, \end{cases} t_0=-1.$

19. $\begin{cases} x=1-t^2, \\ y=t-t^3, \end{cases} t_0=2.$

20. $\begin{cases} x=\ln\left(1+t^2\right), \\ y=t-\operatorname{arctg} t, \end{cases} t_0=1.$

21. $\begin{cases} x=t(1-\sin t), \\ y=t\cos t, \end{cases} t_0=0.$

22. $\begin{cases} x=\left(1+t^3\right)/\left(t^2-1\right), \\ y=t/\left(t^2-1\right), \end{cases} t_0=2.$

23. $\begin{cases} x = 3\cos t, \\ y = 4\sin t, \end{cases} t_0 = \dfrac{\pi}{4}.$

24. $\begin{cases} x = t - t^4, \\ y = t - t^3, \end{cases} t_0 = 1.$

25. $\begin{cases} x = t^3 + 1, \\ y = t^2 + t + 1, \end{cases} t_0 = 1.$

26. $\begin{cases} x = 2\cos t, \\ y = \sin t, \end{cases} t_0 = -\dfrac{\pi}{3}.$

27. $\begin{cases} x = 2tgt, \\ y = 2\sin^2 t + \sin 2t, \end{cases} t_0 = \dfrac{\pi}{4}.$

28. $\begin{cases} x = t^3 + 1, \\ y = t^2, \end{cases} t_0 = -2.$

29. $\begin{cases} x = \sin t, \\ y = a^t, \end{cases} t_0 = 0.$

30. $\begin{cases} x = \sin t, \\ y = \cos 2t, \end{cases} t_0 = \dfrac{\pi}{6}.$

🕮Практичне заняття №6

Тема: ***Похідні і диференціали вищих порядків.***

Контрольні запитання.

1. Дайте означення другої похідної функції $y = f(x)$ в точці x_0.

2. Чи може існувати друга похідна $f''(x)$, якщо не існує перша похідна $f'(x)$?

3. Дайте означення n-ї похідної функції $y = f(x)$ в точці x_0.

4. Відомо, що n-на похідна функції в точці x_0 існує. Що можна сказати про існування похідних меншого порядку в точці x_0 і в околі цієї точки?

5. Виведіть формулу Лейбніца.

6. Виведіть формули для n-х похідних функцій x^α, a^x, $\sin x$, $\cos x$, $\ln x$.

7. Доведіть, що якщо функція $f(x)$ n-разів диференційовна, то $\dfrac{d^n f(ax+b)}{dx^n} = a^n f^{(n)}(ax+b)\Big|_{t=ax+b}$.

8. Дайте оначення диференціала n-го порядку функції $y = f(x)$ в точці x_0 і виведіть формулу $d^n y\Big|_{x=x_0} = f^{(n)}(x_0)dx^n$ у випадку, коли x - незалежна змінна.

9. Чи має місце попередня формула, якщо x – функція деякої змінної t? Виведіть в цьому випадку формули для d^2y і d^3y. Доведіть, що формула $d^n y\Big|_{x=x_0} = f^{(n)}(x_0)dx^n$ зберігається, якщо x -

лінійна функція незалежної змінної t, тобто $x = at + b$ (a і b - числа).

✍**1. [13, с.166]** *Для заданої функції $f(x)$ знайти похідні $f'(x_0),\ f''(x_0),\ f'''(x_0)$:*

а) $f(x) = x(\sin\ln x + \cos\ln x),\ x_0 = 1.$

б) $f(x) = e^{-x^2},\ x_0 = 0.$

в) $f(x) = \arccos x + \arcsin x,\ x_0 = \dfrac{1}{2}.$

г) $f(x) = arctg\,\dfrac{1-x}{\sqrt{2x-x^2}},\ x_0 = 1.$

д) $f(x) = \sqrt{1-x^2}\arcsin x,\ x_0 = 0.$

е) $f(x) = \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right),\ x_0 = 0.$

є) $f(x) = \left(x^2+1\right)^3,\ x_0 = 1.$

ж) $f(x) = \dfrac{1}{1-x},\ x_0 = 2.$

✍**2. [13]** *Для параметрично заданої функції $y(x)$ обчислити $y'_x,\ y''_{x^2}$ на $D(y)$ і y'''_{x^3} в точці $\left(x(t_0);\ y(t_0)\right)$:*

а) $x = 2t - t^2,\ y = 3t - t^3;\ t_0 = 0.$

б) $x = e^t\cos t,\ y = e^t\sin t;\ t_0 = 0.$

в) $x = \ln\cos t,\ y = \ln\cos 2t;\ t_0 = \dfrac{\pi}{6}.$

г) $x = t\,\mathrm{ch}\,t - \mathrm{sh}\,t,\ y = t\,\mathrm{sh}\,t - \mathrm{ch}\,t;\ t_0 = 0.$

д) $x = \dfrac{e^t}{1+t},\ y = (t-1)e^t;\ t_0 = 0.$

е) $x = \dfrac{t^2}{1-t^2},\ y = \dfrac{1}{1+t^2},\ t_0 = 0.$

є) $x = \cos^4 t,\ y = \sin^4 t,\ t_0 = \dfrac{\pi}{4}.$

ж) $x = t\ln t,\ y = \dfrac{\ln t}{t},\ t_0 = 1.$

з) $x = at^2,\ y = bt^3.$

и) $x = a(t - \sin t),\ y = a(1 - \cos t).$

✍**3.** *Для функції, заданої у неявному вигляді, знайти* $\dfrac{d^2y}{dx^2}$:

а) $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2;$

б) $y = \mathrm{tg}(x+y);$

в) $y^3 + x^3 - 3axy = 0;$

г) $y = \sin(x+y);$

д) $e^{x+y} = xy$; е) $e^y + xy = e,\ y''(0)$.

✍**4. [20]** *Довести, що якщо* $(a+bx)e^{\frac{y}{x}} = x$, *то* $x^2 \cdot \frac{d^2y}{dx^2} = \left(x\frac{dy}{dx} - y\right)^2$.

✍**5. [20]** *Переконатись, що функція, задана параметрично рівняннями* $x = \sin t,\ y = \sin kt$, *задовольняє співвідношення*

$$\left(1-x^2\right)\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} + k^2y = 0.$$

✍**6. [15, с.303]** *Знайти* n*-у похідну функції:*

а) $y = a_0x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_n$. б) $y = \frac{ax+b}{cx+d}$.

в) $y = \ln(ax+b)$. г) $y = \operatorname{arctg} x$.

д) $y = \frac{1}{\sqrt{1-2x}}$. е) $y = \frac{x}{x^2-4x-12}$.

є) $y = \frac{1}{ax+b}$. ж) $y = \operatorname{ch}(ax+b)$.

✍**7. [13, с.169]** *Знайти* $f^{(n)}(0)$*,якщо:*

а) $f(x) = \frac{1}{(1+x)(1-2x)}$. б) $f(x) = \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$.

в) $f(x) = \frac{3x+5}{x^2-2x+5}$. г) $f(x) = \frac{x}{x^2+x+1}$.

д) $f(x) = (x+1)^2\ln(x+1)$. е) $f(x) = \left(\arcsin x\right)^2$.

✍**8. [15, с.303]** *Знайти* n*-у похідну функції, використовуючи формулу Лейбніца:*

а) $y = (x-1)2^{x-1}$; б) $y = 2x\cos^2\frac{x}{3}$;

в) $y = e^{ax}\cos(bx+c)$; г) $y = x^{n-1}e^{\frac{1}{x}}$;

д) $y = x^3\sin ax$; е) $y = \left(x^2+1\right)\sin x,\ n = 20$.

✍**9. [20]** *Довести, що функція* $y = \left(1-x\right)^{-\alpha}e^{-\alpha x}$ *задовольняє рівняння:*

$$(1-x)\frac{dy}{dx} = \alpha xy,$$

$$\left(1-x\right)y^{(n+1)} - \left(n+\alpha x\right)y^{(n)} - ny^{(n-1)} = 0.$$

✍**10. [20]** *Довести, що* $\left(x^{n-1}e^{\frac{1}{x}}\right)^{(n)}=(-1)^n\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^{n+1}}$.

✍**11. [20]** *Показати, що* $\left(e^{ax}\cos xbx\right)^{(n)}=r^ne^{ax}\cos(bx+n\varphi)$, *де* $r=\sqrt{a^2+b^2}$, $tg\varphi=\frac{b}{a}$. *Використовуючи теорему Лейбніца, отримати формули:*

$$r^n\cos n\varphi=a^n-C_n^2a^{n-2}b^2+C_n^4a^{n-4}b^4-...,$$
$$r^n\sin n\varphi=C_n^1a^{n-1}b-C_n^3a^{n-3}b^3+C_n^5a^{n-5}b^5-...\ .$$

✍**12.** *Для функції* $f(x)$ *знайти* df, d^2f *на* $D(f)$ *і* $d^3f(x_0)$*:*

а) $f(x)=\left(x^3+2x^2+3x+4\right)e^x$, $x_0=0$;

б) $f(x)=\mathrm{sh}^2x+\mathrm{ch}^2x$, $x_0=0$;

в) $y=(x+1)^3(x-1)^2$;

г) $y=\sqrt{\ln^2x-4}$;

д) $y=\ln\frac{1-x^2}{1+x^2}$, $x=\mathrm{tg}\,t$, виразити d^2y через: 1) x і dx; 2) t і dt;

е) $y=\sin z$, $z=a^x$, $x=t^3$, виразити d^2y через: 1) z і dz; 2) x і dx; 3) t і dt;

🕮Практичне заняття №7

Тема: ***Основні теореми диференціального числення:***
а) теорема Ферма;
б) теорема Ролля;
в) теорема Лагранжа;
г) теорема Коші.

Контрольні запитання.

1. Сформулюйте теорему Ролля.
2. Чи залишиться правильною теорема Ролля, якщо опустити умову: а) $f(a)=f(b)$; б) $f(x)$ неперервна на відрізку $[a;b]$; диференційовна на інтервалі $(a;b)$? Наведіть відповідні приклади.
3. Сформулюйте теорему Лагранжа.
4. Який геометричний і механічний зміст теореми Лагранжа?
5. Як ще називають теорему Лагранжа ?
6. Сформулюйте теорему Коші.

✍**1. [20]** *Перевірити правильність теореми Ролля для функції:*

а) $y = x^3 + 4x^2 - 7x - 10, \ [-1;\ 2]$;

б) $y = \ln\sin x, \ \left[\dfrac{\pi}{6};\ \dfrac{5\pi}{6}\right]$;

в) $y = 4^{\sin x}, \ [0;\ \pi]$;

г) $y = \sqrt[3]{x^2 - 3x + 2}, \ [1;\ 2]$.

✍**2. [11, с.275]** *Довести, що коли функція* $y = f(x)$ *задовольняє умови теореми Ролля на відрізку* $[a;\ b]$ *і не є сталою на цьому відрізку, то на ньому існують точки* c_1 *і* c_2 *такі, що*

$$f'(c_1) > 0, \ f'(c_2) < 0.$$

✍**3. [11, с.275]** *Довести, що коли функція* $y = f(x)$ *диференційовна на відрізку* $[a;\ b]$ *і* $f(a) = f(b) = 0$*, то існує на цьому відрізку точка* c *така, що* $f'(c) = f(c)$.

✍**4. [11, с.275]** *Нехай* $f(x) = x(x+1)(x+2)(x+3)$. *Довести, що рівняння* $f'(x) = 0$ *має три дійсних корені.*

✍**5. [11, с.275]** *Нехай функція* $y = f(x)$ *неперервна на відрізку* $[a;\ b]$, *де* $a > 0$*, диференційовна на інтервалі* $(a;\ b)$ *і*

$$\frac{f(a)}{a} = \frac{f(b)}{b}.$$

Довести, що рівняння $f(x) = xf'(x)$ *має принаймні один корінь на інтервалі* $(a;\ b)$.

✍**6. [11, с.275]** *Нехай функція* $y = f(x)$ *неперервна на відрізку* $[a;\ b]$, *диференційовна на інтервалі* $(a;\ b)$ *і*

$$f^2(b) - f^2(a) = b^2 - a^2.$$

Довести, що рівняння $f'(x)f(x) = x$ *має принаймні один корінь на* $(a;\ b)$.

✍**7. [11, с.275]** *Дослідити на знак функції:*

а) $f(x) = \ln(1+x) - x + \dfrac{x^2}{2}$.

б) $f(x) = \operatorname{arctg} x - x + \dfrac{x^3}{3}$.

в) $f(x)=\sin x - x + \frac{x^3}{3!} - \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} - \frac{x^9}{9!}.$

г) $f(x)=\cos^2 x - 1 + x^2 - \frac{x^4}{3} + \frac{2}{45}x^6.$

✍**8. [11, с.275]** *Чи застосовна теорема Лагранжа до функції $y=f(x)$ на відрізку $[a;b]$, якщо:*

а) $f(x)=\sqrt{\sin x^2}$ на $[0;1]$, $[-1;1]$;

б) $f(x)=x^2\sin\frac{1}{x}$ на $[-1;1]$;

в) $f(x)=x\sin\frac{1}{x}$ на $[-1;1]$;

г) $f(x)=\arcsin(\sin x)$ на $[0;1]$, $[0;2]$;

д) $y=x(1-\ln x)$, $[1;e]$;

е) $y=\arcsin 2x$, $[x_0;\ x_0+\Delta x]$?

✍**9. [11, с.276]** *Записати формулу Лагранжа $f(b)-f(a)=f'(c)(b-a)$ і знайти значення c:*

а) $f(x)=x-x^3$, $[-2;1]$.

б) $f(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma$, $[a;b]$.

в) $f(x)=\frac{1}{x}$, $[1;2]$.

г) $f(x)=\ln x$, $[1;e]$.

✍**10. [20]** *Довести за допомогою формули Лагранжа нерівності:*

а) $\frac{a-b}{a} \le \ln\frac{a}{b} \le \frac{a-b}{b},\ 0<b\le a;$

б) $\frac{a-b}{\cos^2 b} \le \operatorname{tg} a - \operatorname{tg} b \le \frac{a-b}{\cos^2 a},\ 0<b\le a<\frac{\pi}{2};$

в) $nb^{n-1}(a-b)<a^n-b^n<na^{n-1}(a-b),\ a>b,\ n>1.$

✍**11. [11, с.276]** *Чи застосовна теорема Коші до функцій $f(x)$ і $g(x)$, якщо:*

а) $f(x)=x^3-x,\ g(x)=x^2-1$, $[0;1]$, $[0;2]$;

б) $f(x)=e^x,\ g(x)=\frac{x^2}{1+x^2}$, $[-2;2]$;

в) $f(x)=\cos x,\ g(x)=\ln(1+x)$, $[a;b]$, $a>-1$;

г) $f(x)=x,\ g(x)=\sqrt[3]{x}$, $[a;b]$, $a>0$;

д) $f(x)=\sin x,\ g(x)=\sqrt[3]{x^2}$, $[-8;8]$?

✍**12.** **[11, с.276]** *Нехай функції* $f(x)$, $g(x)$ *і* $h(x)$ *неперервні на відрізку* $[a;b]$ *і диференційовні на інтервалі* $(a;b)$. *Покладемо*

$$\varphi(x) := \begin{vmatrix} f(x) & g(x) & h(x) \\ f(a) & g(a) & h(a) \\ f(b) & g(b) & h(b) \end{vmatrix}.$$

Довести, що $\exists\, c \in (a;b)$, *для якої* $\varphi'(c) = 0$. *Як наслідки, отримати з даного твердження теореми Лагранжа і Коші.*

✍**13.** *Многочленом Лежандра степеня* n *називається функція*

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}\left(\left(x^2-1\right)^n\right),\ x \in \mathbb{R}.$$

Довести, що P_n *– многочлен* n*-го степеня, всі корені якого дійсні і містяться в інтервалі* $(-1;1)$.

✍**14.** *Многочленом Чебишева-Лагранжа степеня* n *називається функція*

$$L_n(x) = e^x \frac{d^n}{dx^n}\left(x^n e^x\right).$$

Довести, що L_n *– многочлен* n*-го степеня, всі корені якого додатні.*

✍**15.** *Нехай функція* $f:(a;b) \to \mathbb{R}$ *має похідну у кожній точці* $(a;b)$, *причому ця похідна обмежена на* $(a;b)$. *Довести, що функція* f *рівномірно неперервна на* $(a;b)$.

✍**16.** *Нехай для функцій* $f, g : [a;b] \to \mathbb{R}$ *при деякому натуральному числі* n *виконуються умови:*

1) $f, g \in C_{[a;b]}$; 2) $\forall\, x \in (a;b)\ \exists\ f^{(n+1)}(x),\ g^{(n+1)}(x)$;

3) $\forall\, x \in (a;b): g^{(n+1)}(x) \neq 0$.

Тоді довести, що існує точка $c \in (a;b)$ *така, що*

$$\frac{f(b) - f(a) - \frac{f'(a)}{1!}(b-a) - \ldots - \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(b-a)^n}{g(b) - g(a) - \frac{g'(a)}{1!}(b-a) - \ldots - \frac{g^{(n)}(a)}{n!}(b-a)^n} = \frac{f^{(n+1)}(c)}{g^{(n+1)}(c)}.$$

✍**17.** **[15, с.314]** *Нехай функція* $f(x)$ *неперервна на* $[0;1]$, *диференційовна на* $(0;1)$ *і задовольняє умови:* $f(0) = 5$, $f(1) = 3$, $f'(x) \geq -2\ \ \forall x \in (0;1)$. *Довести, що* $f(x)$ *лінійна на* $[0;1]$ *функція.*

✍*18.* **[15, с.314]** *Нехай функція* $f(x)$ *неперервна на* $[0;2]$, *диференційовна на* $(0;2)$ *і задовольняє умови:* $f(0)=-5,\ f(2)=-1,$ $f'(x)\le -2\ \ \forall x\in(0;2)$. *Довести, що* $f(x)$ *лінійна на* $[0;1]$ *функція.*

🕮Практичне заняття №8

Тема: ***Формула Тейлора.***

Контрольні запитання.

1. Дайте означення многочлена Тейлора для функції $f(x)$ в точці x_0?
2. Сформулюйте теорему Тейлора з залишковим членом:

а) в формі Пеано;
б) у формі Лагранжа;
в) у формі Коші.

3. Напишіть формулу Маклорена для функції $f(x)$ і залишкові члени цієї формули в формах Пеано, Лагранжа і Коші.

4. Напишіть основні розклади і залишкові члени цих розкладів у формах Пеано, Лагранжа і Коші.

✍*1.* **[11]** *Розкласти многочлен* $Q_n(x)$ *за степенями двочлена* $(x-x_0)$*:*

а) $Q_5(x)=x^5-3x^4-2x^3+4x^2-x+2,\ x_0=1.$

б) $Q_6(x)=\left(x^2-3x+1\right)^3,\ x_0=0.$

в) $Q_4(x)=x(x+1)(x+2)(x+3),\ x_0=-1.$

г) $Q_4(x)=x^4-5x^3+x^2-3x+4,\ x_0=4.$

д) $Q_{10}(x)=x^{10}-3x^5+1,\ x_0=1.$

е) $Q_6(x)=\left(x^2-3x+1\right)^3,\ x_0=0.$

✍*2.* **[13, с.235]** *Записати формулу Маклорена для функції* $f(x)$ *до членів* n*-го порядку включно:*

а) $f(x)=\dfrac{1+x+x^2}{1-x+x^2},\ n=4.$

б) $f(x)=e^{2x-x^2},\ n=5.$

в) $f(x)=\dfrac{x}{e^x-1},\ n=4.$

г) $f(x)=\ln\cos x, n=6.$

д) $f(x)=x^3\ln x,\ x_0=1,\ n=5.$

е) $f(x)=\left(\cos x\right)^{\sin x},\ n=5.$

є) $f(x)=\cos e^x,\ n=5.$

ж) $f(x)=\ln\left(\ln(5-x)\right),\ n=5.$

з) $f(x)=\ln\left(\cos x+\sin x\right),\ n=5.$

✍**3.** *Розкласти* $f(x)$ *в околі точки* x_0 *по формулі Тейлора до* n*-го порядку включно:*

а) $f(x)=\sqrt{x},\ x_0=1;\ n=3.$

б) $f(x)=\sin\frac{\pi x}{2},\ x_0=1;\ n=4.$

в) $f(x)=x^3\ln x,\ x_0=1;\ n=4.$

г) $f(x)=\frac{x}{x-1},\ x_0=2;\ n=3.$

д) $f(x)=x^{80}-x^{40}+x^{20},\ x_0=1;\ n=4.$

е) $f(x)=(\sin x)^{\sin x},\ x_0=1;\ n=2.$

є) $f(x)=x\cdot\operatorname{arctg}x,\ x_0=1;\ n=2.$

ж) $f(x)=\frac{1}{x},\ x_0=-1;\ n=5.$

✍**4. [15, с.327]** *Функцію* $f(x)$ *подати у вигляді формули Маклорена з залишковим членом* $o\left(x^n\right)$*, якщо:*

а) $f(x)=(x+5)e^{2x}.$

б) $f(x)=\ln\frac{3+x}{2-x}.$

в) $f(x)=e^x\ln(1+x),\ n=4.$

г) $f(x)=\frac{x^2+5}{x^2+x-12}.$

д) $f\left(x\right)=\ln\frac{1+2x}{1-x}.$

е) $f\left(x\right)=\left(1+x^2\right)\ln\sqrt{1+x}.$

є) $f\left(x\right)=\frac{x}{\sqrt[3]{9-6x+x^2}}.$

ж) $f\left(x\right)=\frac{2x+5}{x^2+5x+4}.$

✍**5.** *Функцію* $f\left(x\right)$ *подати у вигляді формули Маклорена з залишковим членом* $o\left(x^{2n}\right)$*, якщо:*

а) $f\left(x\right)=\operatorname{sh}\frac{x}{2};$

б) $f\left(x\right)=x\operatorname{ch}3x;$

в) $f\left(x\right)=x\sin^2 2x;$

г) $f\left(x\right)=\operatorname{sh}x\cdot\operatorname{ch}2x;$

д) $f\left(x\right)=\frac{x}{3}\ln\frac{x^2-1}{x^2-e};$

е) $f\left(x\right)=\left(1+2x\right)e^{-2x}-\left(1-2x\right)e^{2x};$

є) $f\left(x\right)=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right);$

ж) $f\left(x\right)=\frac{x^2+2}{x^3+x^2+x+1}.$

✍**6. [15, с.329],[13, с.235]** *Функцію* $f(x)$ *подати у вигляді формули Маклорена з залишковим членом* $o\left(x^{2n+1}\right)$*, якщо:*

а) $f(x)=\sin^2 x\cos^2 x.$

б) $f(x)=\cos^3 x.$

в) $f(x)=\frac{1-\sqrt{1+x^2}}{1+\sqrt{1+x^2}}.$

г) $f(x)=\operatorname{arctg}x.$

д) $f(x)=\arcsin x.$

е) $f(x)=\operatorname{ch}x\operatorname{ch}3x.$

є) $f(x)=\operatorname{sh}^2 x.$

ж) $f(x)=\dfrac{x-1}{2-x^2-x^4}.$

✍**7.** *Функцію* $f(x)$ *подати у вигляді формули Тейлора з залишковим членом* $o\left((x-x_0)^n\right)$*, якщо:*

а) $f(x)=\ln\left(2x-x^2+3\right),\ x_0=2;$

б) $f(x)=\dfrac{1}{x},\ x_0=2;$

в) $f(x)=\sqrt{x},\ x_0=1;$

г) $f(x)=x^2e^{-2x},\ x_0=-1.$

✍**8. [13, с.307]** *Написати розклад функції* $f(x)$ *за степенями* x *з залишковим членом* $o\left(x^n\right)$*:*

а) $f(x)=\dfrac{(1+x)^{100}}{(1-2x)^{40}(1+2x)^{60}},\ n=2.$

б) $f(x)=\sqrt{1-2x+x^3}-\sqrt[3]{1-3x+x^2},\ n=3.$

в) $f(x)=e^{2x-x^2},\ n=5.$

✍**9. [13, с.314]** *За допомогою формули Тейлора наближено обчислити значення з точністю до* ε*:*

а) $\sqrt[5]{250},\ \varepsilon=10^{-4}.$ б) $\sin 18^0,\ \varepsilon=10^{-4}.$ в) $\operatorname{arctg}0{,}8,\ \varepsilon=10^{-3}.$

г) $\arcsin 0{,}45,\ \varepsilon=10^{-3}.$ д) $\left(1{,}1\right)^{1{,}2},\ \varepsilon=10^{-5}.$ е) $\ln\left(1{,}1\right),\ \varepsilon=10^{-4}.$

🕮Практичне заняття №9

Тема: ***Застосування похідної при знаходженні границь функцій у точці:***

а) за допомогою формули Тейлора;

б) розкриття невизначеності $\dfrac{0}{0}$ ***(перше правило Лопіталя);***

в) розкриття невизначеності $\dfrac{\infty}{\infty}$ ***(друге правило Лопіталя);***

г) розкриття невизначеностей $\infty-\infty,\ 0\cdot\infty,\ 0^0,\ \infty^0,\ 1^\infty.$

<u>Розклад основних елементарних функцій за формулою Тейлора.</u>

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o\left(x^n\right) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + o\left(x^n\right)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o\left(x^{2n+2}\right) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o\left(x^{2n+2}\right)$$

$$\cos x = x - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o\left(x^{2n+1}\right) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o\left(x^{2n+1}\right)$$

$$\operatorname{sh} x = x + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + o\left(x^{2n}\right) = \sum_{k=1}^{n} \frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} + o\left(x^{2n}\right)$$

$$\operatorname{ch} x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o\left(x^{2n+1}\right) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o\left(x^{2n+1}\right)$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} + o\left(x^n\right) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k} + o\left(x^{2n}\right)$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdot\ldots\cdot(\alpha-n+1)}{n!} x^n + o\left(x^n\right) =$$

$$= 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdot\ldots\cdot(\alpha-n+1)}{k!} x^k + o\left(x^n\right)$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n + o\left(x^n\right) = \sum_{k=0}^{n} x^k + o\left(x^n\right), \ |x| < 1$$

✍**1. [15, с.350]** *Знайти границю за допомогою формули Тейлора:*

а) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+2\operatorname{tg} x} - e^x + x^2}{\arcsin x - \sin x}$.

б) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{\operatorname{arctg} x} - \dfrac{1}{1-x} + \dfrac{x^2}{2}}{\ln\dfrac{1+x}{1-x} - 2x}$.

в) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos\left(\operatorname{sh}\dfrac{x}{\sqrt{5}}\right) - \sqrt[5]{1-\dfrac{x^2}{2}}}{\operatorname{ch}(\sin x) - e^{\frac{x^2}{2}}}$.

г) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right) - x + \dfrac{x^3}{6}}{x - thx}$.

д) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x) - x}{x^2}$.

е) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1 - x}{x^2}$.

є) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x^3}$.

ж) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x} + \sqrt[3]{1+x} - 2\sqrt[4]{1-x}}{x}$.

з) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3\cos x+\arcsin x-3\sqrt[3]{1+x}}{\ln\left(1-x^2\right)}$. и) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1-x^2}-x\operatorname{ctg}x}{x\sin x}$.

✍**2.** *Знайти границю функції, використовуючи, де це можливо, правила Лопіталя:*

а) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^4-16}{x^3+5x^2-6x-16}$. б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-1}{\sin x}$.

в) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sqrt[3]{1+2x}+1}{\sqrt{2+x}+x}$. г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\left(1+x^2\right)}{\cos 3x-e^{-x}}$.

д) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x^2}{\ln\cos\left(2x^2-x\right)}$. е) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{\sin x}}{x-\sin x}$.

є) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e-(1+x)^{\frac{1}{x}}}{x}$. ж) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^4}$.

з) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-\dfrac{x^3}{6}-\dfrac{x^2}{2}-x-1}{\cos x+\dfrac{x^2}{2}-1}$. и) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{\pi-2\operatorname{arctg}x}{\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)}$.

і) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\operatorname{arctg}x}{x^3}$. ї) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-b^x}{x\sqrt{1-x^2}}$.

к) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^3}-1-x^2}{\sin^6 2x}$.

✍**3.** *Знайти границю функції:*

а) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\left(\operatorname{tg}x-\dfrac{1}{1-\sin x}\right)$. б) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{1}{\ln x}\right)$.

в) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\operatorname{ctg}x-\dfrac{1}{x}\right)$. г) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{e^x-1}\right)$.

д) $\lim\limits_{x\to 0+0}\left(x^{x^x}-1\right)$. е) $\lim\limits_{x\to 0+0}x^n\cdot\ln x,\ n\in\mathbb{N}$.

є) $\lim\limits_{x\to 1-0}\ln x\cdot\ln(1-x)$. ж) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}}\left(\operatorname{tg}x\right)^{\operatorname{tg}2x}$.

з) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\ln x\right)^{\frac{1}{x}}$. и) $\lim\limits_{x\to +0}x^{\frac{6}{1+2\ln x}}$.

і) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2}{\pi}\operatorname{arctg}x\right)^{x}$.

ї) $\lim\limits_{x\to+\frac{\pi}{2}}\left(\operatorname{tg}x\right)^{\sin 2x}$.

к) $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{\ln(1+x)^{1+x}}{x^2}-\dfrac{1}{x}\right)$.

✍**4. [13, с.246]** *Знайти границю функції:*

а) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)^{\frac{1}{\ln x}}$.

б) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(\operatorname{arctg}2x-2\operatorname{arctg}x)^{x}}{e^{x^2}-1-\sin^2 x}$.

в) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2\operatorname{tg}3x-6\operatorname{tg}x}{\operatorname{arctg}x-\operatorname{arctg}3x}$.

г) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{a^x-x^a}{\log_a x-\log_x a}$, $a>1$.

д) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{x^n}}{e^{e^x}}$, $n\in\mathbb{N}$.

е) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\ln x-x+1}{x-x^x}$.

є) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\operatorname{arctg}\dfrac{x^2-1}{x^2+1}}{x-1}$.

ж) $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{2x}{x-2}+\ln\left(e+xe^{x+1}\right)\right)^{\frac{1}{x^3}}$.

з) $\lim\limits_{x\to0}\left(\sqrt{1+2\operatorname{tg}x}+\dfrac{x^2}{2}-\sin x\right)^{\frac{1}{\operatorname{sh}x-\operatorname{arctg}x}}$.

🕮Практичне заняття №10

⌛Контрольна робота №1 на тему: „Диференціальне числення функцій однієї змінної” (50 балів)

✍***Завдання № 1. За допомогою диференціала наближено обчислити дані величини та оцінити допущену відносну похибку (з точністю до двох знаків після коми):***

1. $\sqrt[5]{34}$.

2. $\sqrt[3]{26{,}19}$.

3. $\sqrt[4]{16{,}64}$.

4. $\sqrt{8{,}76}$.

5. $\sqrt[5]{31}$.

6. $\sqrt[3]{70}$.

7. $(2{,}01)^3+(2{,}01)^2$.

8. $\sqrt[3]{65}$.

9. $2{,}9/\sqrt{(2{,}9)^2+16}$.

10. $\sqrt{\dfrac{4-3{,}02}{1+3{,}02}}$.

11. $\sqrt[4]{15{,}8}$.

12. $\sqrt[3]{10}$.

13. $\sqrt[5]{200}$.

14. $(3{,}03)^5$.

15. $\sqrt{\dfrac{(2{,}037)^2-3}{(2{,}037)^2+5}}$.

16. $\sqrt[7]{130}$.

17. $\sqrt[3]{27{,}5}$.

18. $\sqrt{17}$.

19. $\sqrt{640}$.

20. $\sqrt{1{,}2}$.

21. $\sqrt[10]{1025}$.

22. $\left(3,02\right)^4+\left(3,02\right)^3.$

23. $\left(5,07\right)^3.$

24. $\left(4,01\right)^{1,5}.$

25. $\sqrt[3]{1,02}.$

26. $\cos 151^0.$

27. $\operatorname{arctg} 1,05.$

28. $\cos 61^0.$

29. $tg\,44^0.$

30. $\operatorname{arctg} 0,98.$

✍*Завдання № 2. Записати формулу для похідної* n*-го порядку вказаної функції:*

1. $y=\ln x.$

2. $y=2^x.$

3. $y=\sin x.$

4. $y=e^{-2x}.$

5. $y=\sqrt{x}.$

6. $y=\dfrac{1}{x-3}.$

7. $y=e^{4x}.$

8. $y=5^x.$

9. $y=\ln(4+x).$

10. $y=10^x.$

11. $y=\cos 3x.$

12. $y=\dfrac{x}{x+5}.$

13. $y=\sqrt{x+7}.$

14. $y=\dfrac{4}{x+3}.$

15. $y=\dfrac{1}{1+x}.$

16. $y=\dfrac{1}{x}.$

17. $y=\cos x.$

18. $y=\dfrac{1}{x+5}.$

19. $y=\ln(3+x).$

20. $y=xe^{3x}.$

21. $y=\ln\left(5+x^2\right).$

22. $y=\dfrac{1}{x-7}.$

23. $y=e^{-5x}.$

24. $y=\dfrac{1}{x-6}.$

25. $y=7^x.$

26. $y=\ln(3x-5).$

27. $y=\ln\dfrac{1}{4-x}.$

28. $y=xe^{6x}.$

29. $y=\dfrac{1+x}{\sqrt{x}}.$

30. $y=\ln\left(5x-1\right).$

✍*Завдання № 3. Знайти границі, використовуючи правила Лопіталя:*

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln(x+5)}{\sqrt[4]{x+3}}.$

2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^{\ln x}-x}{x-1}.$

3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} x-x}{x-\sin x}.$

4. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-4\sin^2\dfrac{\pi x}{6}}{1-x^2}.$

5. $\lim\limits_{x\to a}\arcsin\dfrac{x-a}{a}\cdot ctg(x-a).$

6. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\pi-2\operatorname{arctg} x\right)\ln x.$

7. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(a^{\frac{1}{x}}-1\right)x.$

8. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{\ln x}-\dfrac{x}{\ln x}\right).$

9. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x^2}{x^2-\sin x^2}.$

10. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} x-x}{2\sin x+x}.$

11. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^{\frac{1}{x^2}}-1}{2\operatorname{arctg} x^2-\pi}.$

12. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-2x^2-x+2}{x^3-7x+6}$.

13. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\cos x-\sin x}{x^3}$.

14. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^x}{x^5}$.

15. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-x}{1-\sin\left(\dfrac{\pi x}{2}\right)}$.

16. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln x}{\sqrt[3]{x}}$.

17. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{chx-1}{1-\cos x}$.

18. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{\pi}{x}}{\mathrm{ctg}\left(\dfrac{\pi x}{2}\right)}$.

19. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\dfrac{1}{\cos^2 x}-2tgx}{1+\cos 4x}$.

20. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(\sin mx)}{\ln(\sin x)}$.

21. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\mathrm{tg}\,x}{\mathrm{tg}\,5x}$.

22. $\lim\limits_{x\to 0}(1-\cos x)\,\mathrm{ctg}\,x$.

23. $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)\,\mathrm{tg}\left(\dfrac{\pi x}{2}\right)$.

24. $\lim\limits_{x\to\infty}x\sin\dfrac{3}{x}$.

25. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sqrt[3]{1+2x}+1}{\sqrt{2+x}+x}$.

26. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\cos x-\sin x}{x^3}$.

27. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-x}{1-\sin\left(\dfrac{\pi x}{2}\right)}$.

28. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{tg}\,x-\sin x}{4x-\sin x}$.

29. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\mathrm{tg}\,3x}{\mathrm{tg}\,5x}$.

30. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\sec^2 x-2\,\mathrm{tg}\,x}{1+\cos 4x}$.

✍Завдання № 4. Знайти границі, використовуючи правила Лопіталя:

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 4x}{5-5e^{-3x}}$.

2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\cos x}{x}$.

3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^2}-1}{\cos x-1}$.

4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-\dfrac{x^2}{2}-x-1}{\cos x-\dfrac{x^2}{2}-1}$.

5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\mathrm{tg}\,x}-1}{\mathrm{tg}\,x-x}$.

6. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln(1-x)+\mathrm{tg}\left(\dfrac{\pi x}{2}\right)}{\mathrm{ctg}\,\pi x}$.

7. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\cos x\cdot\ln(x-a)}{\ln\left(e^x-e^a\right)}$.

8. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{\cos\left(\dfrac{\pi x}{2}\right)\cdot\ln(1-x)}$.

9. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos e^{x^2}-1}{\cos x-1}.$

10. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\alpha x}-\cos\alpha x}{e^{\beta x}-\cos\beta x}.$

11. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^m-a^m}{x^n-a^n}.$

12. $\lim\limits_{x\to\infty}x\sin\dfrac{a}{6x}.$

13. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3\operatorname{tg}4x-12\operatorname{tg}x}{3\sin 4x-12\sin x}.$

14. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\sqrt{\operatorname{tg}x}-1}{2\sin^2 x-1}.$

15. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\left(e^x+1\right)-2\left(e^x-1\right)}{x^3}.$

16. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 2x-2\arcsin x}{x^3}.$

17. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-a^{\sin x}}{x^3}.$

18. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\left(\operatorname{tg}x\right)^{\operatorname{tg}2x}.$

19. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(\cos ax)}{\ln(\cos bx)}.$

20. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\sqrt[3]{tgx}-1}{2\sin^2 x-1}.$

21. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{e^x-1}\right).$

22. $\lim\limits_{x\to\infty}x^2e^{-0{,}01x}.$

23. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\left(1+xe^x\right)}{\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)}.$

24. $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)^{\log_2 x}.$

25. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^{\frac{4}{x^2}}-1}{2\operatorname{arctg}x^2-\pi}.$

26. $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\ln 2x\cdot\ln(2x-1).$

27. $\lim\limits_{x\to\frac{1}{3}}\left(\dfrac{x}{3x-1}-\dfrac{1}{\ln 3x}\right).$

28. $\lim\limits_{x\to 0}\arcsin x\cdot\operatorname{tg}x.$

29. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x^3e^{-x}\right).$

30. $\lim\limits_{x\to 1}(x-1)^{x-1}.$

✍***Завдання № 5. Знайти похідну другого порядку y''_{xx} функції, заданої параметрично:***

1. $\begin{cases}x=\cos 2t,\\ y=2\sec^2 t.\end{cases}$

2. $\begin{cases}x=\sqrt{1-t^2},\\ y=1/t.\end{cases}$

3. $\begin{cases}x=e^t\cos t,\\ y=t+\sin t.\end{cases}$

4. $\begin{cases}x=\operatorname{sh}^2 t,\\ y=1/\operatorname{ch}^2 t.\end{cases}$

5. $\begin{cases}x=t+\sin t,\\ y=2-\cos t.\end{cases}$

6. $\begin{cases}x=1/t,\\ y=1/\left(1+t^2\right).\end{cases}$

7. $\begin{cases} x=\sqrt{t}, \\ y=1/\sqrt{1-t}. \end{cases}$

8. $\begin{cases} x=\sin t, \\ y=\sec t. \end{cases}$

9. $\begin{cases} x=\mathrm{tg}\, t, \\ y=1/\sin 2t. \end{cases}$

10. $\begin{cases} x=\sqrt{t-1}, \\ y=t/\sqrt{t-1}. \end{cases}$

11. $\begin{cases} x=\sqrt{t}, \\ y=\sqrt[3]{t-1}. \end{cases}$

12. $\begin{cases} x=\cos t/(1+2\cos t), \\ y=\sin t/(1+2\cos t). \end{cases}$

13. $\begin{cases} x=\sqrt{t^3-1}, \\ y=\ln t. \end{cases}$

14. $\begin{cases} x=\mathrm{sh}\, t, \\ y=\mathrm{th}^2\, t. \end{cases}$

15. $\begin{cases} x=\sqrt{t-1}, \\ y=1/\sqrt{t}. \end{cases}$

16. $\begin{cases} x=\cos^2 t, \\ y=tg^2 t. \end{cases}$

17. $\begin{cases} x=\sqrt{t-3}, \\ y=\ln(t-2). \end{cases}$

18. $\begin{cases} x=\sin t, \\ y=\ln\cos t. \end{cases}$

19. $\begin{cases} x=t+\sin t, \\ y=2+\cos t. \end{cases}$

20. $\begin{cases} x=t-\sin t, \\ y=2-\cos t. \end{cases}$

21. $\begin{cases} x=\cos t, \\ y=\ln\sin t. \end{cases}$

22. $\begin{cases} x=\cos t+t\sin t, \\ y=\sin t-t\cos t. \end{cases}$

23. $\begin{cases} x=e^t, \\ y=\arcsin t. \end{cases}$

24. $\begin{cases} x=\cos t, \\ y=\sin^4(t/2). \end{cases}$

25. $\begin{cases} x=\mathrm{ch}\, t, \\ y=\sqrt[3]{\mathrm{sh}^2\, t}. \end{cases}$

26. $\begin{cases} x=\mathrm{arctg}\, t, \\ y=t^2/2. \end{cases}$

27. $\begin{cases} x=2(t-\sin t), \\ y=4(2+\cos t). \end{cases}$

28. $\begin{cases} x=\sin t-t\cos t, \\ y=\cos t+t\sin t. \end{cases}$

29. $\begin{cases} x=1/t^2, \\ y=1/(t^2+1). \end{cases}$

30. $\begin{cases} x=\cos t+\sin t, \\ y=\sin 2t. \end{cases}$

✍Завдання № 6. Розкласти за формулою Маклорена функцію $f(x)$:

1. $f(x)=\dfrac{9}{20-x-x^2}$.

2. $f(x)=\dfrac{x^2}{\sqrt{4-5x}}$.

3. $f(x)=2x\cos^2\dfrac{x}{2}-x.$

4. $f(x)=(x-1)\sin 5x.$

5. $f(x)=\dfrac{\operatorname{sh}2x}{x}-3.$

6. $f(x)=\dfrac{7}{12-x-x^2}.$

7. $f(x)=\ln\left(1-x-6x^2\right).$

8. $f(x)=\ln\left(1+x-6x^2\right).$

9. $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt[3]{27-2x}}.$

10. $f(x)=\dfrac{\operatorname{ch}3x-1}{x^2}.$

11. $f(x)=\dfrac{6}{8+2x-x^2}.$

12. $f(x)=\ln\left(1-x-20x^2\right).$

13. $f(x)=\ln\left(1+x-12x^2\right).$

14. $f(x)=\left(3+e^{-x}\right)^2.$

15. $f(x)=x^{-1}\arcsin x-x.$

16. $f(x)=\dfrac{7}{12-x-x^2}.$

17. $f(x)=x^2\sqrt{4-3x}.$

18. $f(x)=\ln\left(1+2x-8x^2\right).$

19. $f(x)=2x\sin^2\dfrac{x}{3}-x.$

20. $f(x)=(x-1)\operatorname{sh}x.$

21. $f(x)=x\sqrt[3]{27-2x}.$

22. $f(x)=\dfrac{5}{6+x-x^2}.$

23. $f(x)=\dfrac{\operatorname{arctg}2x}{x}.$

24. $f(x)=\dfrac{5}{6-x-x^2}.$

25. $f(x)=\ln\left(1-3x-10x^2\right).$

26. $f(x)=x^{-1}\sin 3x-\cos 3x.$

27. $f(x)=\sqrt[4]{16-5x}.$

28. $f(x)=\left(3-e^{2x}\right)^2.$

29. $f(x)=\left(\sqrt[4]{16-3x}\right)^{-1}.$

30. $f(x)=(x-3)\operatorname{ch}3x.$

Домашня контрольна робота №1 на тему: „Диференціальне числення функцій однієї змінної”

Завдання № 1. *Знайти точки, в яких функція*

$$f(x)=\begin{cases} x^2, & x\in\mathbb{Q}, \\ 0, & x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}, \end{cases}$$

має похідну.

Завдання № 2. *Для яких значень параметра α функція*

$$f(x)=\begin{cases} |x|^{\alpha}\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0, \\ 0, & x=0, \end{cases}$$

має похідну в точці $x_0 = 0$?

✍***Завдання № 3.*** *Нехай функція* f *має похідну в точці* x_0, *а послідовності* (x_n) *та* (z_n) *такі, що*

$$\forall\, n \in \mathbb{N}: x_n \neq x_0,\, z_n \neq x_0;\, x_n \to x_0,\, z_n \to x_0,\, n \to \infty.$$

Чи існує границя $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{f(x_n) - f(z_n)}{x_n - z_n}$? *Навести відповідні приклади.*

✍***Завдання № 4.*** *Нехай функція* f *має похідну в точці* x_0 *і число* $k \in \mathbb{N}$ *фіксоване. Знайти границю*

$$\lim_{n\to\infty} n\left(f\left(x_0 + \frac{1}{n}\right) + f\left(x_0 + \frac{2}{n}\right) + \ldots + f\left(x_0 + \frac{k}{n}\right) - kf(x_0)\right).$$

✍***Завдання № 5.*** *Нехай* $f \in C^1_{[a;\, b]}$, $x_0 \in (a; b)$. *Довести, що для довільних послідовностей* (x_n) *та* (z_n) *таких, що*

$$\forall\, n \in \mathbb{N}: x_n \neq x_0,\, z_n \neq x_0;\, x_n \to x_0,\, z_n \to x_0,\, n \to \infty,$$

правильно, що

$$\frac{f(x_n) - f(z_n)}{x_n - z_n} \to f'(x_0),\; x \to x_0.$$

Чи можна відмовитися від умови неперервності похідної?

✍***Завдання № 6.* [13, с.163-165]** *Перевірити правильність тверджень:*

а) якщо $f_{ij}(x)\left(i = \overline{1, n},\; j = \overline{1, n}\right)$ – диференційовні, то

$$\frac{d}{dx}\begin{vmatrix} f_{11}(x) & f_{12}(x) & \ldots & f_{1n}(x) \\ f_{21}(x) & f_{22}(x) & \ldots & f_{2n}(x) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ f_{n1}(x) & f_{n2}(x) & \ldots & f_{nn}(x) \end{vmatrix} = \sum_{k=1}^{n} \begin{vmatrix} f_{11}(x) & f_{12}(x) & \ldots & f_{1n}(x) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ f'_{k1}(x) & f'_{k2}(x) & \ldots & f'_{kn}(x) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ f_{n1}(x) & f_{n2}(x) & \ldots & f_{nn}(x) \end{vmatrix};$$

б) якщо f диференційовна на проміжку $(a; +\infty)$, то:

1) $\exists \lim\limits_{x\to a+0} f(x) = \infty \Rightarrow \exists \lim\limits_{x\to a} f'(x) = \infty;$

2) $\exists \lim\limits_{x\to a+0} f(x) = \infty \Rightarrow \exists \overline{\lim\limits_{x\to a}} f'(x) = \infty;$

3) $\exists \lim\limits_{x\to a+0} f'(x) = \infty \Rightarrow \exists \lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty;$

4) $\exists \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) \in \mathbb{R} \Rightarrow \exists \lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) \in \mathbb{R};$

5) $\exists \lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)\in\mathbb{R} \Rightarrow \exists \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\in\mathbb{R}$;

в) якщо f диференційовна і парна (непарна) на $\mathbb{R}$, то f' – непарна (парна) на $\mathbb{R}$;

г) якщо f диференційовна на $\mathbb{R}$ і T-періодична, то f' теж T-періодична;

д) правильні твердження, обернені до сформульованих в пунктах в) і г);

е) якщо f диференційовна на $[a;b]$, то функції $\varphi(x)=\max\limits_{t\in[a;\,x]} f(t)$ і $\psi(x)=\min\limits_{t\in[x;\,b]} f(t)$ також диференційовні на $[a;b]$;

є) якщо f, g – диференційовні на $(a;b)$, то:

1) із умови $\forall x\in(a;b)$ $f(x)<g(x)$ випливає $\forall x\in(a;b)$ $f'(x)<g'(x)$;

2) із умови $\forall x\in(a;b)$ $f'(x)<g'(x)$ випливає $\forall x\in(a;b)$ $f(x)\le g(x)$;

3) із умови $\forall x\in(a;b)$ $f'(x)<g'(x)$ і $f(a)=g(a)$ випливає $\forall x\in(a;b)$ $f(x)<g(x)$;

к) для монотонності диференційовної функції f на $(a;b)$ необхідно і достатньо, щоб функція f' була монотонною на $(a;b)$;

л) f має похідну в точці x_0 тоді і тільки тоді, коли існує $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(f\left(x_0+\dfrac{1}{n}\right)-f(x_0)\right)$;

м) якщо f диференційовна в точці $x_0=0$ і $\varphi(x)=\begin{cases} x^2\sin\dfrac{1}{x},\ x\ne 0,\\ 0, \qquad\quad x=0,\end{cases}$ то $f(\varphi(x))$ має нульову похідну в точці x_0.

✍***Завдання № 7.*** *Навести приклади функцій $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, для яких виконуються умови:*

а) $f'(x_0)$ і $\left(f^2\right)'(x)$ не існують, а $\left(f^3\right)'(x)$ існує;

б) f' не існує в жодній точці з $\mathbb{R}$, а $\left(f^2\right)'$ існує всюди на $\mathbb{R}$;

в) f – неперервна в точці x_0, але не має в ній ні лівої ні правої похідної;

г) f – диференційовна у всіх точках множини M і розривна у всіх інших точках $\mathbb{R}$, де:

1) $M = \{0, 1, 2\}$;

2) $M = \left\{ \pm n, \pm \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N} \right\}$;

3) $M = \left\{ 0, \pm n, \pm \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N} \right\}$;

д) для послідовності $\alpha_n = o(1)$ існує границя

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(x_0 + \alpha_n) - f(x_0)}{\alpha_n} = 0,$$

але f не диференційовна в точці x_0.

✍***Завдання № 8.*** *За допомогою похідної обчислити суми:*

а) $\sum_{k=1}^{n} kx^{k-1}$;

б) $\sum_{k=1}^{n} k^2 x^{k-1}$;

в) $\sum_{k=1}^{n} k \cos kx$;

г) $\sum_{k=1}^{n} k \sin kx$;

д) $\sum_{k=1}^{n} k\,\mathrm{ch}\,kx$;

е) $\sum_{k=1}^{n} (2k-1)\cos(2k-1)x$.

✍***Завдання № 9.*** *Завдання №13-16 з практичного заняття №6.*

✍***Завдання № 10.*** *Завдання з самостійної і контрольної робіт (варіант за списком журналу групи).*

МОДУЛЬ 2.

🕮Практичне заняття №11

Тема: ***Дослідження функцій на сталість і монотонність***

а) доведення тотожностей;

б) доведення нерівностей;

в) розв'язування рівнянь.

Контрольні запитання.

1. Дайте означення зростаючої (спадної) функції в точці.
2. Сформулюйте теореми, які виражають необхідну і достатню умову монотонності диференційовної функції на проміжку.

3. Сформулюйте теорему, що виражає достатню умову строгої монотонності диференційовної функції на проміжку.
4. Чи правильне твердження: «Якщо диференційовна на проміжку X функція зростає на цьому проміжку, то $f'(x_0) > 0 \ \forall x \in X$»?
5. Нехай функція $f(x)$ визначена в деякому околі точки множини X. Чи правильні твердження:
а) «Якщо $f(x)$ зростає на множині X, то вона зростає в кожній точці $x_0 \in X$»?
б) «Якщо $f(x)$ зростає в кожній точці $x_0 \in X$, то вона зростає на множині X»? Розгляньте функцію $f(x) = -\dfrac{1}{x}$.

✍**1. [11, с.315], [12]** *Довести тотожності:*

а) $\sin^6 x + \cos^6 x = \dfrac{1}{4} + \dfrac{3}{4}\cos^2 2x.$

б) $\cos^4 x - \dfrac{1}{8}\cos 4x = 2\cos^2 x - \dfrac{1}{2}\cos 2x - \dfrac{5}{8}.$

в) $\operatorname{arctg} x = \arcsin \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$

г) $\dfrac{\pi}{2} + \operatorname{arctg} x = \arcsin \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}, \ x \le 0.$

д) $\arcsin \dfrac{2x}{1+x^2} = \begin{cases} \pi - 2\operatorname{arctg} x, & x \ge 1, \\ 2\operatorname{arctg} x, & -1 \le x \le 1, \\ -\pi - 2\operatorname{arctg} x, & x \le -1. \end{cases}$

е) $\arcsin x = \begin{cases} \arccos\sqrt{1-x^2}, & 0 \le x \le 1, \\ -\arccos\sqrt{1-x^2}, & -1 \le x \le 0. \end{cases}$

✍**2. [11]** *Знайти проміжки, на яких мають місце тотожності:*

а) $\sin(\operatorname{arctg} x) = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}.$ б) $\cos(\operatorname{arctg} x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$

в) $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x) = x + 3\pi.$ г) $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg}\dfrac{1}{x} = \dfrac{\pi}{2}.$

✍**3. [12, с.155]** *Для функції* $y = f(x)$ *знайти таке* $\delta > 0$, *що* $\forall\, x_1, x_2 \in [a; b]$: $|x_2 - x_1| < \delta \Rightarrow \left| f(x_2) - f(x_1) \right| < \varepsilon$:

а) $f(x) = x^3 - 3x^2 + x + 1;\ a = -1,\ b = 3,\ \varepsilon = 0{,}01.$

б) $f(x) = x\sin x;\ a = 0,\ b = \pi,\ \varepsilon = 0{,}001.$

в) $f(x) = x^2 \ln x;\ a = 1,\ b = 4,\ \varepsilon = 0{,}01.$

✍**4. [13, с.253]** *Довести нерівності:*

а) $e^x > 1 + x + \dfrac{x^2}{2},\ \ x > 0.$

б) $x - \dfrac{x^2}{2} < \ln(1+x) < x,\ \ x > 0.$

в) $x - \dfrac{x^3}{6} < \sin x < x - \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{x^5}{120},\ \ x > 0,$

г) $\operatorname{tg} x > x + \dfrac{x^3}{3},\ \ x \in \left(0; \dfrac{\pi}{2}\right),$

д) $\sin x + \operatorname{tg} x > 2x,\ \ x \in \left(0; \dfrac{\pi}{2}\right),$

е) $\dfrac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} y} > \dfrac{x}{y},\ \ 0 < y < x < \dfrac{\pi}{2},$

є) $\dfrac{\cos y}{2 + \sin y} < \dfrac{\cos x}{2 + \sin x},\ \ 0 < x < y < \dfrac{\pi}{2},$

ж) $1 + \dfrac{x}{2} - \dfrac{x^2}{8} < \sqrt{1+x} < 1 + \dfrac{x}{2},\ \ x > 0,$

з) $\ln(1+x) > \dfrac{x}{1+x},\ \ x > 0,$

и) $\left(\dfrac{x+y}{2}\right)^n \le \dfrac{x^n + y^n}{2},\ \ x, y \ge 0,$

і) $\cos x \ge 1 - \dfrac{x^2}{2},\ \ x \in \mathbb{R},$

ї) $\operatorname{arctg} x \le x,\ \ x \ge 0.$

✍**5. [11]** *Довести нерівності:*

а) $e^e \pi^\pi > e^{2\pi};$

б) $\dfrac{1}{52} < \ln\dfrac{52}{51} < \dfrac{1}{51};$

в) $\cos 1992 < 1 + \cos 1993;$

г) $1992^{1993} > 1993^{1992};$

д) $4\operatorname{tg}5^0\operatorname{tg}9^0 < 3\operatorname{tg}6^0\operatorname{tg}10^0.$

Вказівка. а) $f(x) = x - \pi\ln x$; б) теорема Лагранжа, $f(x) = \ln x$; $(51; 52)$; в) $f(x) = x + \cos x$; г) $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$; д) $f(x) = \dfrac{\operatorname{tg} x}{x}$; $\left(0; \dfrac{\pi}{2}\right)$.

✍**6. [11, с.31], [14, с.419]** *Розв'язати рівняння:*

а) $x^2 + x + 12\sqrt{x+1} = 36.$

б) $3^{x+2} - 26x = 29.$

в) $\sqrt[3]{x-9} = (x-3)^3 + 6.$

г) $\left(4^x + 2\right)(2 - x) = 6.$

д) $x^2 - x + 2 = 2\sqrt[4]{2x-1}.$

✍**7*. [14, с.413]** *Довести тотожності:*

а)

$$1+3x^2+5x^4+...+(2n-1)x^{2n-2}=\frac{(2n-1)x^{2n-2}-(2n+1)x^{2n}+x^2+1}{\left(x^2-1\right)^2},\ |x|\neq 1.$$

б) $1+3\cdot 4+5\cdot 4^2+...+99\cdot 4^{49}=\frac{5}{9}\left(1+59\cdot 2^{100}\right).$

в) $1+\frac{3}{2}+\frac{5}{2^2}+...+\frac{101}{2^{50}}=6-\frac{105}{2^{50}}.$

✍**8*. [14, с.414]** *Знайти суму:*

а) $S_n(x)=1\cdot 2+2\cdot 3x+3\cdot 4x^2+...+(n-1)nx^{n-2}+n(n+1)x^{n-1}.$

б) $S_n=2^1\cdot 1\cdot 2+2^2\cdot 2\cdot 3+2^3\cdot 3\cdot 4+...+2^n\cdot n\cdot (n+1).$

в) $S_n=C_n^0+2C_n^1+3C_n^2+...+(n+1)C_n^n$, $n\geq 1$, де C_n^k – число комбінацій з n елементів по k.

🕮Практичне заняття №12

Тема: ***Дослідження функції на монотонність та екстремум. Найбільше і найменше значення функції на відрізку.***

Контрольні запитання.

1. Дослідження монотонності функції за допомогою похідної.
2. Означення точок локального екстремуму функції.
3. Необхідна умова локального екстремуму.
4. Достатня умова локального екстремуму.
5. Найбільше і найменше значення функції на відрізку.

✍**1. [15, с. 380]** *Знайти проміжки монотонності та екстремуми функції $f(x)$ на області визначення. Нарисувати графік функції в одному з графічних редакторів:*

а) $f(x)=x^3+3x^2.$

б) $f(x)=x^4-4x^3+6x^2-4x+5.$

в) $f(x)=x^4(1-x)^3.$

г) $f(x)=\left(x^3-10\right)(x+5)^2.$

д) $f(x)=x^2(x-12)^2.$

е) $f(x)=(x+2)^2(x-3)^3.$

є) $f(x)=\frac{x^3+2x^2}{(x-1)^2}.$

ж) $f(x)=\frac{x^4}{(x+1)^3}.$

з) $f(x)=\frac{10}{8x^2-24x+23}.$

и) $f(x)=\frac{x}{x^2+4}.$

і) $f(x)=\sin x+\frac{1}{2}\sin 2x.$

ї) $f(x)=\sin^3 x+\cos^3 x.$

к) $f(x)=(x-2)\cos \pi x-\frac{1}{\pi}\sin \pi x.$

л) $f(x)=(x+1)arctgx-\frac{\pi}{4}x^2-x.$

м) $f(x)=(x-1)e^{3x}.$

н) $f(x)=(3-x^2)e^x.$

о) $f(x)=x^3e^{-4x}.$

п) $f(x)=x^4e^{-x^2}.$

с) $f(x)=x+\sqrt{3-x}.$

т) $f(x)=\sqrt{x}\ln x.$

у) $f(x)=\frac{1}{\ln(x^4+4x^3+30)}.$

ф) $f(x)=x^2-4x-1-\ln(x^2-4x+4).$

ц) $f(x)=\ln(x^2-1)-2\operatorname{arctg} x.$

ч) $f(x)=x+\sqrt{3-x}.$

ш) $f(x)=\sqrt[3]{x^3-2x^2+x}.$

щ) $f(x)=\sqrt[3]{(x-2)^2(x-4)^2}.$

ю) $f(x)=\sqrt[3]{(1-x)(x-2)^2}.$

✍**2. [13, с. 251]** *Дослідити на екстремум функції* $y(x)$, *заданої параметрично або неявно:*

а) $x=\frac{1}{t(t+1)},\ y=\frac{(t+1)^2}{t};$

б) $x=t^2+t+1,\ y=t^2-t+1;$

в) $x=t^4,\ y=t^2-t^5;$

г) $x=\frac{t^2}{1+t^2},\ y=\frac{t^3}{1+t^2};$

д) $x=\frac{e^t}{1+t},\ y=\frac{e^{-t}}{1+t};$

е) $x=\frac{t^2}{1-2t},\ y=\frac{t^3}{1-2t};$

є) $x^3+y^3=3x^2;$

ж) $x+y=xy(y-x);$

з) $x^3+y^3+x^2y+1=0;$

и) $x^4-y^4+xy=0.$

✍**3. [13, с. 251]** *Дослідити функцію* $f(x)$ *на екстремум в області визначення, якщо:*

а) $f(x)=\begin{cases}|x|, & x\neq 0,\\ 1, & x=0;\end{cases}$

б) $f(x)=\begin{cases}e^{\frac{1}{x^2-1}}, & |x|\neq 1,\\ 0, & |x|=1;\end{cases}$

в) $f(x)=\max\left\{\operatorname{ch} x+\frac{1}{2};\ 4-\operatorname{ch} x\right\};$

г) $f(x)=\min\{x+5;\ \ln x;\ 1-x\};$

д) $f(x)=\cos^{100} x+\operatorname{ch}^{100} x;$

е) $f(x)=|x|e^{-|x-1|}.$

✍**4.** *Знайти всі значення параметра* a, *при кожному з яких функція:*

а) $y = 2x^5 + 2ax^4 + 10x^3$ є зростаючою;

б) $y = a\sin 4x - 10x + \sin 7x + 4ax$ є спадною;

в) $y = 0,5e^{2x} + (1-a)e^x - ax + \sin 2$ має критичні точки і знайти їх;

г) $y = \sin 2x - 8(a+1)\sin x + \left(4a^2 + 8a - 14\right)x$ є зростаючою;

д) $y = 16(a+1)\sin x - \sin 2x - \left(16a^2 + 32a - 10\right)x$ є спадною.

✍**5.** *Знайти найбільше і найменше значення функції на заданому проміжку:*

а) $y = x^3 + 3x^2 - 72x + 90, \left[-5;\, 5\right].$

б) $y = x^3 - 6x^2 + 9, \left[-1;\, 2\right].$

в) $y = x^5 - 5x^4 + 5x^3 + 1, \left[-1;\, 2\right].$

г) $y = x + \sqrt{x}, \left[0;\, 4\right].$

д) $y = 1 - 3x^2 - x^3, \left[-1;\, 1\right].$

е) $y = x^3 - 2x\left|x-2\right|, \left[0;\, 3\right].$

є) $y = x + \dfrac{4}{(x-2)^2}, \left[0;\, 5\right].$

ж) $y = \dfrac{1 - x + x^2}{1 + x - x^2}, \left[0;\, 1\right].$

з) $y = 4\sin 2x - 2\sin 4x, \left[0;\, \pi\right].$

и) $y = \sin 2x - x, \left[-\dfrac{\pi}{2};\, \dfrac{\pi}{2}\right].$

і) $y = 4x + \dfrac{9\pi^2}{x} + \sin x, \left[\pi;\, 2\pi\right].$

ї) $y = \operatorname{arctg}\dfrac{1-x}{1+x}, \left[0;\, 1\right].$

к) $y = 2\ln^3 x - 9\ln^2 x + 12\ln x, \left[e^{\frac{3}{4}};\, e^3\right].$

л) $y = \left|x^2 + 2x - 3\right| + 1,5\ln x, \left[0,5;\, 4\right].$

✍**6. [12, с.165]** *Потрібно побудувати прямокутну площадку біля кам'яної стіни так, щоб з трьох сторін вона була загороджена сіткою, а четверта сторона прилягала до стіни. Для цього є* a *погонних метрів сітки. При якому співвідношенні сторін площадка буде мати найбільшу площу?*

✍**7.** *В дану кулю радіуса* R *вписати циліндр з найбільшою бічною поверхнею.*

✍**8. [12]** *Човен знаходиться на відстані 3 км від найближчої точки берега А. Швидкість човна – 4 км/год, швидкість руху пасажира по суші – 5 км/год. До якого пункту берега має припливти човен, щоб пасажир досяг села якнайшвидше? Село знаходиться на відстані 5 км від точки А.*

✍**9. [14, с.402]** *Від каналу шириною* a *під прямим кутом до нього відходить канал шириною* b. *Знайти найбільшу довжину дерева, яке при сплаві з одного каналу в інший не застрягне на повороті.*

✍**10.** **[12, с.168]** *Вікно має форму прямокутника, що закінчується півкругом. Периметр рівний* P. *Які повинні бути розміри вікна, щоб воно пропускало найбільшу кількість світла.*

✍**11.** **[12,с.168]** *Знайти сторони прямокутника найбільшого периметра, вписаного в півколо радіуса* R.

✍**12.** **[12, с.169]** *Через дану точку* $M(1;4)$ *провести пряму, яка не проходить через початок координат, так, щоби сума довжин відрізків, які вона відтинає на координатних осях, була найменшою.*

✍**13.** **[12, с.171]** *Колода довжиною 20 м має форму зрізаного конуса, діаметри основ якого дорівнюють відповідно 2 і 1 м. Потрібно вирубати з неї балку з квадратним поперечним перерізом, вісь якого співпадала би з віссю колоди та об'єм якої був би найбільшим. Які повинні бути розміри балки?*

✍**14.** **[20]** *Навколо даного циліндра описати конус найменшого об'єму (площини основ циліндра і конуса співпадають).*

✍**15.** **[20]** *На колі задана точка* A. *Провести хорду* BC *паралельно дотичній в точці* A *так, щоб площа трикутника* ΔABC *була найбільшою.*

✍**16.** **[20]** *На еліпсі* $2x^2 + y^2 = 18$ *задано дві точки* $A(1;4)$ *і* $B(3;0)$. *Знайти на еліпсі третю точку* C *таку, щоб площа трикутника* ΔABC *була найбільшою (найменшою).*

🕮Практичне заняття №13

Тема: ***Дослідження функції на вгнутість, опуклість та точки перегину. Нерівність Ієнсена.***

Контрольні запитання.

1. Означення напряму опуклості графіка функції. Достатні умови опуклості графіка функції.
2. Означення точки перегину графіка функції.
3. Чи може змінюватися напрям опуклості графіка функції при переході через точку, що не є точкою перегину? Наведіть приклади.
4. Сформулюйте необхідну умову перегину графіка функції, покажіть на прикладі, що ця умова не є достатньою.
5. Сформулюйте достатню умову перегину графіка функції.
6. Нерівність Ієнсена.

✍**1. [15, с.384]** *Знайти інтервали опуклості і точки перегину функції:*

а) $y = 2x^4 - 3x^2 + x - 1.$

б) $y = x^5 - 10x^2 + 3x.$

в) $y = x^3 - 5x^2 + 3x - 5.$

г) $y = x^4 - 12x^3 + 48x^2 - 50.$

д) $y = \left(x+2\right)^6 + 2x + 2.$

е) $y = \dfrac{1}{1-x^2}.$

є) $y = \dfrac{x^3}{12+x^2}.$

ж) $y = \dfrac{\sqrt{x}}{x+1}.$

з) $y = \dfrac{x^3}{x^2+3a^2}$, $a > 0.$

и) $y = \sqrt[3]{x+3}.$

і) $y = \sqrt[3]{4x^3 - 12x}.$

ї) $y = \ln(1+x^2).$

ж) $y = x \operatorname{arctg} x.$

з) $y = \left(x+1\right)^4 + e^x.$

й) $y = x^4\left(12\ln x - 7\right).$

к) $y = x^4\left(12\ln x - 7\right).$

л) $y = e^{arctgx}.$

✍**2.** *Дослідити на точки перегину многочлени:*

а) $P_3(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d,\ a \neq 0.$

б) $P_4(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e,\ a \neq 0.$

✍**3.** *Довести, що графік функції* $y = \dfrac{x+1}{x^2+1}$ *має три точки перегину, що лежать на одній прямій.*

✍**4. [20]** *Показати, що точки перегину лінії* $y = x\sin x$ *лежать на лінії* $y^2\left(4+x^2\right) = 4x^2.$

✍**5. [20]** *При яких значеннях* a *і* b *точка* $\left(1; 3\right)$ *є точкою перегину лінії* $y = ax^3 + bx^2$?

Відповідь: $a = -\dfrac{3}{2};\ b = \dfrac{9}{2}.$

✍**6. [20]** *Вибрати* a *і* b *так, щоб лінія* $x^2y + ax + by = 0$ *мала точку* $A\left(2;\ 2{,}5\right)$ *точкою перегину. Які ще точки перегину вона буде мати?*

Відповідь: $a = -\dfrac{20}{3};\ b = \dfrac{4}{3};\ B\left(-2;\ -2{,}5\right),\ O\left(0;\ 0\right).$

✍**7. [15]** *Знайти точки перегину графіка функції* $y = f(x)$, *яка задана параметрично:*

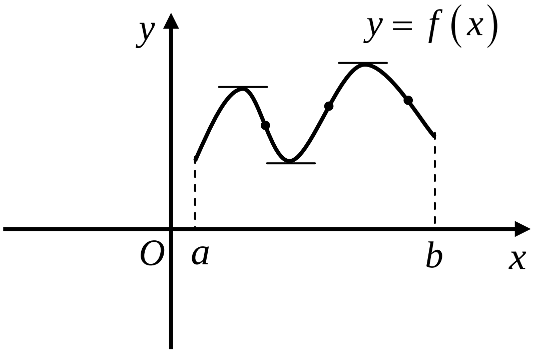
а) $x = te^t,\ y = te^{-t},\ t > 0.$

б) $x = \dfrac{t^2}{t-1},\ y = \dfrac{t^3}{t-1},\ t > 2.$

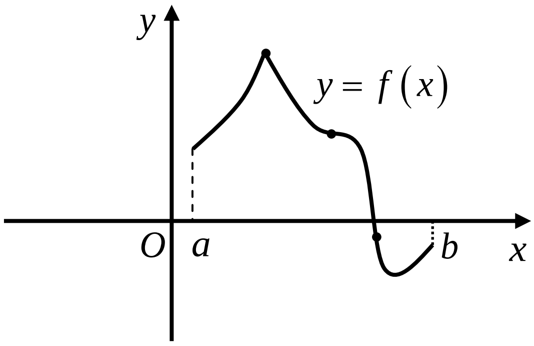
в) $x = a(t - \sin t),\ y = a(1 - \cos t),\ a > 0.$ г) $x = (t+1)^2,\ y = (t-1)^2.$

д) $x = e^t,\ y = \sin t.$ е) $x = \operatorname{sh} t - t,\ y = \operatorname{ch} t - 1.$

✍**8. [20]** *За графіком функції з'ясувати вигляд графіка її першої і другої похідної:*



а)



б)

✍**9. [13, с.257]** *Довести нерівності:*

а) $\dfrac{x^n + y^n}{2} \ge \left(\dfrac{x+y}{2}\right)^n,\ x > 0,\ y > 0,\ n \in \mathbb{N}.$

б) $\dfrac{e^x + e^y}{2} \ge e^{\frac{x+y}{2}}.$

в) $x\ln x + y\ln y \ge (x+y)\ln\dfrac{x+y}{2},\ x > 0,\ y > 0.$

г) $\sqrt{\sin x \sin y} \le \sin\dfrac{x+y}{2},\ x,\ y \in (0; \pi).$

д) $e^{\frac{x+y}{2}} + 2 \le \sqrt{\left(e^x + 2\right)\left(e^y + 2\right)}.$

е) $\dfrac{2(x+y)}{2-(x+y)} \ge \dfrac{x}{1-x} + \dfrac{y}{1-y},\ x > 1,\ y > 1.$

є) $\cos\left(\dfrac{x+y}{2}\right)^2 \ge \dfrac{1}{2}\left(\cos x^2 + \cos y^2\right),\ x,\ y \in \left[0; \sqrt{\dfrac{\pi}{2}}\right].$

🕮Практичне заняття №14

Тема: ***Асимптоти. Повне дослідження функції і побудова її графіка.***

Контрольні запитання.

1. Дайте означення і наведіть приклад вертикальної асимптоти графіка функції.

2. Сформулюйте означення і наведіть приклад похилої асимптоти графіка функції при $x \to +\infty$ (при $x \to -\infty$).

3. Сформулюйте теорему, що виражає необхідні і достатні умови існування похилої асимптоти графіка функції.
4. Наведіть приклади функції, у якої існують похилі асимптоти графіка при $x \to +\infty$ і при $x \to -\infty$, причому ці асимптоти: а) співпадають; б) не співпадають.

✍***1.*** **[16, с.130], [15, с.229]** *Знайти асимптоти кривих:*

а) $y = \dfrac{x^2 - 6x + 3}{x - 3}.$ б) $y = xe^x.$ в) $y = x + \dfrac{\sin x}{x}.$

г) $y = x \operatorname{arctg} x.$ д) $y = \ln\left(4 - x^2\right).$ е) $y = \dfrac{\sqrt{4x^4 + 1}}{|x|}.$

є) $y = 3\sqrt{\dfrac{x^2}{4} - 1}.$ ж) $y = \dfrac{2x^2 - 9}{x + 2}.$ з) $y = \dfrac{x^5}{x^4 - 1}.$

и) $y = xe^{-x}.$ і) $y = x \operatorname{arcctg} x.$ ї) $y = x + \dfrac{\ln x}{x}.$

✍***2.*** *Дослідити функцію та побудувати її графік:*

а) $y = x^3 - 3x^2 + 4.$

б) $y = \dfrac{x^4}{4} - \dfrac{x^3}{3} - x^2.$

в) $y = 3x^2 - x^3.$

г) $y = \dfrac{x^3}{4(2 - x)^2}.$

д) $y = \dfrac{2x - 1}{(x - 1)^2}.$

е) $y = \dfrac{x^4}{x^3 - 1}.$

є) $y = \dfrac{x}{x^2 - 1}.$

ж) $y = \dfrac{x^3 + x + 2}{x}.$

з) $y = x\sqrt[3]{(x + 1)^2}.$

і) $y = x\sqrt{4 - x^2}.$

ї) $y = \dfrac{x}{\sqrt[3]{x^2 - 1}}.$

й) $y = xe^{-x}.$

к) $y = x + e^{-x}.$

л) $y = \dfrac{e^x}{1 + x}.$

м) $y = \ln\dfrac{x}{x - 1}.$

н) $y = \ln\left(4 - x^2\right).$

о) $y = x^2 e^{-x}.$

п) $y = x - \ln(x + 1).$

р) $y = x + \dfrac{\ln x}{x}.$

🕮Практичне заняття №15

⌛Самостійна робота №2 на тему: „Застосування похідної функції однієї змінної”

✍***Завдання 1. Доведення нерівностей (тотожностей)*** **(***буде запропонована одна з нерівностей чи тотожностей з практичного заняття №10***).**

✍***Завдання №2. Знайти найменше і найбільше значення функції на заданому проміжку:***

1. $y=-2x+\sqrt{\left(x^2-10x+25\right)\left(x^2-4x+4\right)},\ \ x\in\left[\frac{9}{4};\,6\right].$

2. $y=x+\sqrt{\left(x^2+6x+9\right)\left(x^2+2x+1\right)},\ \ x\in\left[-4;\,-\frac{5}{4}\right].$

3. $y=(x-3)^2e^{|x|},\ \ x\in\left[-1;\,4\right].$

4. $y=(x-3)e^{|x+1|},\ \ x\in\left[-2;\,4\right].$

5. $y=-\frac{3}{2}\ln x-\left|x^2-2x-3\right|,\ \ x\in\left[\frac{1}{2};\,4\right].$

6. $y=\left|x^2+x-2\right|-\ln\frac{1}{x},\ \ x\in\left[\frac{1}{2};\,2\right].$

7. $y=2x\ln x=x\ln 49,\ \ x\in\left[1;\,7\right].$

8. $y=\frac{1}{2}x\ln x-x\ln 2,\ \ x\in\left[1;\,4\right].$

9. $y=\cos^2\frac{x}{2}\sin x,\ \ x\in\left[0;\,\pi\right].$

10. $y=-\left|2x^3+15x^2+36x-30\right|,\ \ x\in\left[-3;\,2\right].$

11. $y=\operatorname{tg}x+2\operatorname{ctg}x-\sqrt{3},\ \ x\in\left[\frac{\pi}{6};\,\frac{\pi}{3}\right].$

12. $y=-x^3+3x\left|x-3\right|,\ \ x\in\left[0;\,4\right].$

13. $y=x^3-2x\left|x-2\right|,\ \ x\in\left[0;\,3\right].$

14. $y=\sqrt[3]{\frac{x^2}{2x-1}},\ \ x\in\left[\frac{3}{4};\,2\right].$

15. $y=\left|\log_2^2 2x-\log_2 8x\right|,\ \ x\in\left[\frac{1}{2};\,2\sqrt{2}\right].$

16. $y = 2\sin 2x + \cos 4x, \quad x \in \left[0; \dfrac{\pi}{3}\right].$

17. $y = 2\cdot 2^{3x} - 9\cdot 2^{2x} + 12\cdot 2^{x}, \quad x \in [-1; 1].$

18. $y = e^{2x-1} + 2e^{1-2x} + 7x - 3, \quad x \in [0{,}14; 1].$

19. $y = 9\sin x - \sin 3x + 3, \quad x \in [-\pi; 0].$

20. $y = 2\ln^3 x - 9\ln^2 x + 12\ln x, \quad x \in \left[e^{\frac{3}{4}}; e^3\right].$

21. $y = 2\cdot 3^{3x} - 4\cdot 3^{2x} + 2\cdot 3^{x}, \quad x \in [-1; 1].$

22. $y = 2x^3 - 9x^2 + 12x + 1, \quad x \in [0; 2].$

23. $y = 4\sin 2x - 2\sin 4x, \quad x \in [0; \pi].$

24. $y = x|x-1| - 5x^3, \quad x \in [0; 2].$

25. $y = (x-1)^2\sqrt{x^2 - 2x + 3}, \quad x \in [0; 3].$

26. $y = tgx + ctg2x, \quad x \in \left[\dfrac{\pi}{6}; \dfrac{\pi}{3}\right].$

27. $y = \sqrt{1 - 2x + x^2} + \sqrt{1 + 2x + x^2}, \quad x \in [-2; 0].$

28. $y = 2x^3 + 3x^2 - 120x + 100, \quad x \in [-4; 5].$

29. $y = 4x^3 - x|x-2|, \quad x \in [0; 3].$

30. $y = 2e^{-\frac{x}{3}}\sin\dfrac{x}{3}, \quad x \in [0; 3\pi].$

✍Завдання №3. Дослідити функцію та побудувати її графік:

1. $y = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 9.$

3. $y = 2x - x^3.$

5. $y = x^2(x-2)^2.$

7. $y = \dfrac{1}{4}\left(x^3 - 9x^2\right) + 6x - 9.$

2. $y = 2 - 3x^2 - x^3.$

4. $y = (x+1)^2(x-1)^2.$

6. $y = 2x^3 - 3x^2 - 4.$

8. $y = 3x^2 - 2 - x^3.$

9. $y = (x-1)^2(x-3)^2.$

11. $y = \dfrac{1}{4}\left(x^3 + 3x^2\right) - 5.$

13. $y = 6x - 8x^3.$

15. $y = 16x^2(x-1)^2.$

17. $y = 2x^3 + 3x^2 - 5.$

19. $y = 2 - 12x^2 - 8x^3.$

21. $y = (2x+1)^2(2x-1)^2.$

23. $y = 2x^3 + 9x^2 + 12x.$

25. $y = 12x^2 - 8x^3 - 2.$

27. $y = (2x-1)^2(2x-3)^2.$

29. $y=\frac{27}{4}\left(x^3-x^2\right)-4.$

30. $y=\frac{x}{8}\left(12-x^2\right).$

10. $y=\frac{27}{4}\left(x^3+x^2\right)-5.$

12. $y=\frac{1}{8}\left(16-6x^2-x^3\right).$

14. $y=-\frac{1}{16}\left(x^2-4\right)^2.$

16. $y=16x^3-36x^2+24x-9.$

18. $y=\frac{1}{8}\left(6x^2-x^3-16\right).$

20. $y=-\frac{1}{16}(x-2)^2(x-6)^2.$

22. $y=16x^3-12x^2-4.$

24. $y=\frac{1}{8}\left(11+9x-3x^2-x^3\right).$

26. $y=-\frac{1}{16}(x+1)^2(x-3)^2.$

✍***Завдання №4. Дослідити функцію та побудувати її графік:***

1. $y=\frac{x^3}{2(x-1)^2}.$

2. $y=\frac{x^4}{x^3+1}.$

3. $y=\frac{x^2}{x^3-1}.$

4. $y=\frac{x^3}{x^2-3}.$

5. $y=\frac{x^3}{x^3+1}.$

6. $y=\frac{x^4}{x^3-1}.$

7. $y=\frac{x^3}{2(x+1)^2}.$

8. $y=\frac{-x^2}{(x-2)^2}.$

9. $y=\frac{16}{x^2(x-4)}.$

10. $y=\frac{2x-3}{x^2-3x+2}.$

11. $y=\frac{x^2+4}{x^2}.$

12. $y=\frac{x^2-x+1}{x-1}.$

13. $y=\frac{4x^2}{x^2+3}.$

14. $y=\frac{12x}{9+x^2}.$

15. $y=\frac{x^2-3x+3}{x-1}.$

16. $y=\frac{2x^2+1}{x^2}.$

17. $y=\frac{(x-1)^2}{x^2}.$

18. $y=\frac{x^2}{(x-1)^2}.$

19. $y=(1+\frac{1}{x})^2.$

20. $y=\frac{12-3x^2}{x^2+12}.$

21. $y=\frac{x^3-4}{x^2}.$

22. $y=\dfrac{x^3-27x+54}{x^3}$.

23. $y=\dfrac{x^2-6x+9}{(x-1)^2}$.

24. $y=\dfrac{3x-2}{x^3}$.

25. $y=\dfrac{4(x+1)^2}{x^2+2x+4}$.

26. $y=\dfrac{x^3-32}{x^3}$.

27. $y=\dfrac{1}{x^4-1}$.

28. $y=\dfrac{4}{3+2x-x^2}$.

29. $y=\dfrac{1-2x^3}{x^2}$.

30. $y=\dfrac{8(x-1)}{(x+1)^2}$.

🕮Практичне заняття №16

Тема: ***Повне дослідження функції, заданої явно, і побудова її графіка.***

Контрольні запитання.

1. Сформулюйте загальну схему дослідження функції

✍**1.** *Дослідити функцію та побудувати її графік:*

а) $y=\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x}$. б) $y=\arccos\dfrac{1-x^2}{1+x^2}$. в) $y=\operatorname{arctg}\dfrac{x-3}{x^2+4}$.

в) $y=x+\operatorname{arctg}x$. г) $y=\log_{\frac{1}{2}}\sin x$. д) $y=\ln\cos x$.

е) $y=\cos x-\cos^2 x$. є) $y=\arcsin\dfrac{2x}{1+x^2}$. ж) $y=\dfrac{x}{2}-\arccos\dfrac{2x}{1+x^2}$.

з) $y=\cos x-\ln\cos x$.

🕮Практичне заняття №17

Тема: ***Повне дослідження функції, заданої параметрично, і побудова її графіка.***

Контрольні запитання.

1. Як обчислюються похідні функції, заданої параметрично?
2. Крива задана параметрично: $x=\sin^2 t,\ y=\cos^2 t.$. Який проміжок досить розглянути, щоб при зміні параметра t на цьому проміжку точка$\big(x(t),y(t)\big)$ опинилася в кожній точці кривої тільки один раз?
3. Як знайти асимптоти кривої, заданої параметрично?

4. Як досліджувати і використовувати симетрію кривої, заданої параметричної?
5. Сформулюйте необхідну умову локального екстремуму функції, заданої параметрично.
6. Наведіть схему дослідження і побудови кривої, заданої параметрично.

✍**1.** *Дослідити функцію і побудувати графік:*

а) $x=\dfrac{3t}{1+t^3}$, $y=\dfrac{3t^2}{1+t^3}$ (лист Декарта).

б) $x=te^{t}$, $y=te^{-t}$.

в) $x=\dfrac{t^2}{t-1}$, $y=\dfrac{t}{t^2-1}$.

г) $x=2t-t^2$, $y=3t-t^3$.

д) $x=t-\sin t$, $y=1-\cos t$ (циклоїда).

е) $x=\cos t+\ln\operatorname{tg}\dfrac{t}{2}$, $y=\sin t$ (трактриса).

є) $x=t^3+3t$, $y=t^3-3t+1$.

ж) $x=t^3-3\pi$, $y=t^3-6\operatorname{arctg}t$.

✍**2. [13]** *Дослідити функцію і побудувати графік:*

а) $x=\dfrac{(t+1)^2}{4}$, $y=\dfrac{(t-1)^2}{4}$.

б) $x=t+e^{-t}$, $y=2t+e^{-2t}$.

в) $x=\dfrac{t^2}{1-t^2}$, $y=\dfrac{1}{1+t^2}$.

г) $x=a(\operatorname{sh}t-t)$, $y=a(\operatorname{ch}t-1)$, $a>0$.

д) $x=a\cos 2t$, $y=a\cos 3t$, $a>0$.

е) $x=-5t^2+2t^5$, $y=-3t^2+2t^3$.

є) $x=\dfrac{(t^2+2)^2}{t+1}$, $y=\dfrac{(t-2)^2}{t-1}$.

ж) $x=\dfrac{t-t^2}{1+t^2}$, $y=\dfrac{t^2-t^3}{1+t^2}$.

з) $x=\dfrac{1}{t(t-1)}$, $y=\dfrac{t}{t-1}$.

и) $x=\dfrac{t^2+1}{t}$, $y=\dfrac{t^2+3}{t-1}$.

і) $x=\dfrac{t^2-3t}{t+1}$, $y=\dfrac{t^2+2t}{t+1}$.

ї) $x=\dfrac{1}{t(t-2)}$, $y=-\dfrac{1}{t(t+2)}$.

🕮Практичне заняття №18-19.

Тема: ***Повне дослідження функції, заданої в полярних координатах або неявно, і побудова її графіка.***

✍**1.** *Побудувати графік функції в полярних координатах:*

а) $\rho = \cos 3\varphi$ (трилисник або лемніската Бернуллі).

б) $\rho = \operatorname{tg} 2\varphi.$

в) $\rho = 2 + \cos\varphi.$

г) $\rho = 1 + \cos\varphi.$

д) $\rho = 1 + 2\cos\varphi.$

е) $\rho = \dfrac{a}{\sqrt{\cos 3\varphi}}.$

є) $\rho = \sin 2\varphi$ (дволисник).

ж) $\rho = \cos 4\varphi$ (чотирилисник).

✍**2. [13]** *Побудувати графіки функцій $y(x)$, заданих неявно (параметр a додатне число):*

а) $\left(x^2 + y^2\right)^3 = 4a^2x^2y^2;$

б) $x\left(x^2 + y^2\right) = a^2 y;$

в) $x^4 + y^4 = a^2\left(x^2 + y^2\right);$

г) $x^y = y^x,\ x,\ y > 0;$

д) $x^2y^2 = x^3 - y^3;$

е) $x^3 + y^3 = 3axy;$

є) $\left(x^2 + y^2\right)^2 = 2a^2xy;$

ж) $\left(x^2 + y^2\right)^3 = 4a^2xy\left(x^2 - y^2\right);$

з) $a\left(x^3 + y^3\right) = x^2 + y^2;$

и) $\left(x + y\right)^3 = a\left(x - y\right);$

і) $\left(x^2 + y^2\right)^3 = a^2\left(x^4 + y^4\right);$

ї) $x^4 + y^4 = 2xy.$

⌛Контрольна робота №2 на тему: „Застосування диференціального числення функцій однієї змінної”(60 балів)

✍***Завдання №1. Побудова графіків функцій, заданих параметрично.*** **(***буде запропоновано завдання з практичного заняття №15***).**

✍***Завдання №2. Побудова графіків функцій, заданих неявно.*** **(***буде запропоновано завдання з практичного заняття №16***).**

✍***Завдання №3. Побудова графіків функцій, заданих в полярних координатах.***

1. $r = 4\cos 3\varphi,\ \ r = 2\ \ (r \ge 2);$	**15.** $r = \cos\varphi,\ \ r = 2\cos\varphi;$
2. $r = \cos 2\varphi;$	**16.** $r = \sin\varphi,\ \ r = 2\sin\varphi;$
3. $r = \sqrt{3}\cos\varphi,\ \ r = \sin\varphi$	**17.** $r = 1 + \sqrt{2}\cos\varphi;$
4. $r = 4\sin 3\varphi,\ \ r = 2;$	**18.** $r = \dfrac{1}{2} + \cos\varphi;$
5. $r = 2\cos\varphi,\ \ r = 2\sqrt{3}\sin\varphi$ **;**	

6. $r=\sin 3\varphi$; **7.** $r=6\sin 3\varphi,\ \ r=3$; **8.** $r=\cos 3\varphi$; **9.** $r=\cos\varphi,\ \ r=\sqrt{2}\cos\left(\varphi-\frac{\pi}{4}\right)$; **10.** $r=\sin\varphi,\ \ r=\sqrt{2}\cos\left(\varphi-\frac{\pi}{4}\right)$; **11.** $r=6\cos 3\varphi,\ \ r=3\ \ (r\geq 3)$; **12.** $r=\frac{1}{2}+\sin\varphi$; **13.** $r=\cos\varphi,\ \ r=\sin\varphi$; **14.** $r=\sqrt{2}\cos\left(\varphi-\frac{\pi}{4}\right)$, $r=\sqrt{2}\sin\left(\varphi-\frac{\pi}{4}\right)$;	**19.** $r=1+\sqrt{2}\sin\varphi$; **20.** $r=\frac{5}{2}\sin\varphi,\ \ r=\frac{3}{2}\sin\varphi$; **21.** $r=\frac{3}{2}\cos\varphi,\ \ r=\frac{5}{2}\cos\varphi$; **22.** $r=4\cos 4\varphi$; **23.** $r=\sin 6\varphi$; **24.** $r=3\cos\varphi,\ \ r=2\cos\varphi$; **25.** $r=\cos\varphi+\sin\varphi$; **26.** $r=2\sin 4\varphi$; **27.** $r=2\cos 6\varphi$; **28.** $r=\cos\varphi-\sin\varphi$; **29.** $r=3\sin\varphi,\ \ r=5\sin\varphi$; **30.** $r=2\sin\varphi,\ \ r=4\sin\varphi$.

✍Завдання №4. Провести повне дослідження функцій і побудувати їх графіки:

1. $y=(2x+3)e^{-2(x+1)}$.

2. $y=\dfrac{e^{2(x+1)}}{2(x+1)}$.

3. $y=3\ln\dfrac{x}{x-3}-1$.

4. $y=(3-x)e^{x-2}$.

5. $y=\dfrac{e^{2-x}}{2-x}$.

6. $y=\ln\dfrac{x}{x+2}+1$.

7. $y=(x-2)e^{3-x}$.

8. $y=\dfrac{e^{2(x-1)}}{2(x-1)}$.

9. $y=3-3\ln\dfrac{x}{x+4}$.

10. $y=-(2x+1)e^{2(x+1)}$.

11. $y=\dfrac{e^{2(x+2)}}{2(x+2)}$.

12. $y=\ln\dfrac{x}{x-2}-2$.

13. $y=(2x+5)e^{-2(x+2)}$.

14. $y=\dfrac{e^{3-x}}{3-x}$.

15. $y=2\ln\dfrac{x}{x+1}-1$.

16. $y=(4-x)e^{x-3}$.

17. $y=-\dfrac{e^{-2(x+2)}}{2(x+2)}$.

18. $y=2\ln\dfrac{x+3}{x}-3$.

19. $y=(2x-1)e^{2(1-x)}$.

20. $y=-\dfrac{e^{-(x+2)}}{x+2}$.

21. $y=2\ln\dfrac{x}{x-4}-3$.

22. $y=-(x+1)e^{x+2}$.

23. $y=\dfrac{e^{x+3}}{x+3}$.

24. $y=\ln\dfrac{x}{x+5}-1$.

25. $y=-(2x+3)e^{2(x+2)}$.

26. $y=-\dfrac{e^{-2(x-1)}}{2(x-1)}$.

27. $y=\ln\dfrac{x-5}{x}+2$.

28. $y=(x+4)e^{-x-3}$.

29. $y=\dfrac{e^{x-3}}{x-3}$.

30. $y=\ln\dfrac{x+6}{x}-1$.

🏠 Домашня контрольна робота №2 на тему: „Застосування диференціального числення функцій однієї змінної”

✍Завдання №1. Геометричні задачі.

1. Полотняний шатер об’єму V має форму прямого конуса. Яким повинне бути відношення висоти конуса до радіуса його основи, щоби на шатер було витрачено найменшу кількість полотна.
2. У рівнобедрений трикутник з основою a та кутом при основі α вписати паралелограм найбільшої площі так, щоби одна із його сторін лежала на основі, а інша на бічній стороні трикутника. Знайти довжини сторін паралелограма.
3. Знайти відношення між радіусом R і висотою H циліндра, що має при даному об’ємі найменшу повну поверхню.
4. Потрібно зробити конічну воронку з твірною, рівною 20 см. Якою повинна бути висота воронки, щоби її об’єм був найменшим?
5. Периметр рівнобедреного трикутника рівний $2p$. Якою повинна бути його основа, щоби об’єм тіла, утвореного обертанням цього трикутника навколо його основи, був найбільшим?
6. Знайти висоту конуса найбільшого об’єму, який можна вписати в кулю радіуса R.
7. Дротом, довжина якого l м, необхідно обгородити клумбу, яка має форму кругового сектора. Яким має бути радіус круга, щоби площа клумби була найбільшою?
8. Визначити найбільшу площу прямокутника, вписаного у півкруг радіуса a.
9. Колода довжиною 20 м має форму зрізаного конуса, діаметри основ якого дорівнюють відповідно 2 і 1 м. Потрібно вирубати з неї

балку з квадратним поперечним перерізом, вісь якого співпадала би з віссю колоди та об'єм якої був би найбільшим. Які повинні бути розміри балки?

10. З корабля, який стоїть на якорі в 9 км від берега, треба послати гінця в табір, розміщений в 15 км від найближчої до корабля точки берега. Швидкість посильного при русі пішки – 5 км/год, а на човні – 4 км/год. В якому місці він повинен пристати до берега, щоби попасти в табір у найкоротший час?
11. Смуга жесті шириною a, яка має прямокутну форму, повинна бути зігнута у вигляді відкритого кругового циліндричного жолоба так, щоби його переріз мав форму сегмента. Яким має бути центральний кут φ, що спирається на дугу цього сегмента, щоби об'єм цього жолоба був найбільшим?
12. Із кругової колоди діаметра d треба вирізати балку прямокутного перерізу. Якими мають бути ширина b та висота h цього перерізу, щоби балка, будучи горизонтально розміщеною і рівномірно навантаженою, мала найменший прогин? (Величина прогину обернено пропорційна добутку ширини b поперечного перерізу та кубу висоти h.)
13. Вартість залізничного перевезення вантажу на 1 км (АВ) рівна k_1 грн., а автомобільного (РС) – k_2 грн. $(k_1 < k_2)$. В якому місці Р треба почати будівництво шосе, щоби було можливо найдешевше доставляти вантаж із пункту А в пункт С? (СВ$\perp$АР, Р знаходиться між А і В) $|AB| = a$, $|BC| = b$.

14. Людині треба дістатися із пункту А, що знаходиться на одному березі річки, у пункт В на другому її березі. Знаючи, що швидкість руху по берегу в k разів більша за швидкість руху по воді, визначити під яким кутом людина повинна перетнути річку, щоби досягнути пункту В у найкоротший час. Ширина річки h, відстань між пунктами А і В (здовж берега) дорівнює a.
15. На прямолінійному відрізку АВ, що з'єднує два джерела світла: А (сили p) та В (сили q), знайти точку М, яка освітлюється найслабше, якщо $\|AB\| = a$. (Освітленість обернено пропорційна квадрату відстані від джерела світла.)
16. Лампа висить над центром круглого столу радіуса r. При якій висоті лампи над столом освітленість предмета, що лежить на його краю, буде найкраще? (Освітленість прямо пропорційна косинусу кута падіння променів світла та обернено пропорційна квадрату

відстані від джерела світла.)
17. Із усіх циліндрів, вписаних в даний конус, знайти той, у якого бічна поверхня найбільша. Висота конуса H, радіус основи R.
18. Із паперового круга вирізано сектор, а із залишеної частини склеєна конічна воронка. Який кут повинен мати вирізаний сектор, щоби об'єм воронки був найбільшим?
19. Із всіх конусів з даною бічною поверхнею S знайти той, у якого об'єм найбільший.
20. Пункт В знаходиться на відстані 60 км від залізничної дороги. Відстань по залізниці від пункту А до найближчої до пункту В точки С дорівнює 285 км. На якій відстані від точки С потрібно побудувати станцію, від якої прокладуть шосе до пункту В, щоби затрачати найменший час на рух між пунктами А і В, якщо швидкість руху по залізниці становить 52 км/год, а швидкість руху по шосе – 20 км/год.
21. Канал, ширина якого a м, під прямим кутом впадає в інший канал шириною b. Визначити найбільшу довжину колод, які можна сплавляти по цій системі каналів.
22. Знайти висоту прямого кругового конуса найменшого об'єму, описаного навколо кулі радіуса R.
23. При якому нахилі бічних сторін рівнобедреної трапеції площа її буде найбільшою, якщо бічні сторони рівні b, а менша основа a.
24. Із фігури, обмеженої кривою $y=3\sqrt{x}$ та прямими $x=4,\ y=0$, вирізати прямокутник найбільшої площі.
25. Рівнобедрений трикутник, вписаний в коло радіуса R, обертається навколо прямої, яка проходить через його вершину паралельно до основи. Якою повинна бути висота цього трикутника, щоби тіло, отримане в результаті його обертання, мало найбільший об'єм?
26. Потрібно виготовити відкритий циліндричний жолоб об'єму V. Вартість 1 м^2 матеріалу, із якого виготовлюється дно жолобу, складає P_1 грн., а вартість 1 м^2 матеріалу, із якого виготовлюються стінки жолобу, складає P_2 грн. При якому відношенні радіса дна до висоти жолоба витрати на матеріал будуть мінімальними?
27. Сосуд з вертикальними стінками висотою H, наповнений нев'язкою рідиною, стоїть на горизонтальній площині. Визначити розташування отвору, при якому дальність струменю буде найбільшою, якщо швидкість витікання рідини за законом Торрічеллі дорівнює $\sqrt{2gx}$, де x – відстань від отвору до поверхні рідини; g – прискорення вільного падіння.

28. Вікно має форму прямокутника, що закінчується півкругом. Периметр вікна 15м. При якому радіусі півкруга вікно буде пропускати найбільшу кількість світла?

29. На сторінці книги друкований текст займає площу S; ширина верхнього та нижнього полів дорівнює a, а правого та лівого – b. При якому відношенні ширини до висоти тексту площа всієї сторінки буде найменшою?

30. Із круглої колоди, діаметр якої d, потрібно вирізати балку прямокутного поперечного перерізу. Якими мають бути ширина та висота цього перерізу, щоби балка мала найбільший опір на прогин? Опір балки на прогин Q пропорційний добутку ширини x її поперечного перерізу та квадрату його висоти y, тобто $Q = kxy^2,\ k = const$.

✍*Завдання №2. Фізичні задачі .*

1. Посудина у формі півкулі радіуса R (см) наповнюэться водою з сталою швидкістю a (л/с). Визначити швидкість підвищення рівня води на висоті h (см) і показати, що вона обернено пропорційна площі вільної поверхні води.

2. Залежність барометричного тиску p від висоти описується функцією $\ln\left(\dfrac{p}{p_0}\right) = ch$, де p_0 - нормальний (на рівні моря) тиск. На рівні 5540 м тиск досягає половини нормального. Знайти швидкість зміни барометричного тиску в залежності від висоти.

3. Обчислити наближено збільшення об’єму циліндричної колони висотою $H = 4$м і радіусом основи $R = 20$ см при накладанні на неї штукатурки товщиною 1 см.

4. Проектується канал, поперечний перетин якого є рівнобічна трапеція. Ширина каналу по дну дорівнює $2a$, а глибина води – h. Яким має бути кут нахилу α відкосів каналу, щоб його змочений периметр був найменшим ?

5. Проектується канал зрошувальної системи з прямокутним перетином площі 4,5 м^2. Якими мають бути розміри перетину, щоб на облицювання стінок і дна пішла найменша кількість матеріалу ? Яку найменшу кількість матеріалу потрібно витратити для облицювання 1 км каналу ? Порівняйте площу S облицювальної поверхні каналу такої ж довжини і такого ж поперечного перерізу при глибині каналу $x = 2,25$ м і ширині $y = 2$ м.

6. Переріз каналу, який підводить воду до турбіни, має форму прямокутника, змочений периметр якого дорівнює 12 м. Довжина каналу 250 м. Якими мають бути розміри перерізу, щоб об'єм води в каналі при повному цого заповненні був найбільшим ? Яке найбільше значення об'єму води в каналі? Порівняйте об'єм V води в каналі такої ж глибини і такого ж поперечного перерізу при глибині каналу $x=4$ м і ширині $y=4$ м?
7. Для того, щоб зменшити тертя рідини в стінки каналу, площа перерізу, який змочується водою, повинна бути вдвічі менша. Показати, що кращою формою відкритого прямокутного каналу з заданою площею поперечного перерізу є така, при якій ширина каналу вдвічі більша за висоту.
8. Опір на прогин балки прямокутного поперечного перерізу пропорційна добутку ширини цього перерізу на квадрат його висоти. Якими мають бути розміри перерізу балки, вирізаної з круглої колоди діаметром d, щоб її опір на згин був найбільшим, тобто щоб балка мала найбільшу міцність?
9. Балка прямокутного перерізу (x, y - розміри перерізу) з вільно спертими кінцями рівномірно навантажена по всій довжині. Стріла її прогину обернено пропорційна моменту інерції $l=\frac{xy^3}{12}$ перерізу балки. Визначити розміри перерізу балки при найменшій стрілі прогину (балка найбільшої жорсткості), якщо вона вирізана з круглої колоди діаметром d?
10. Колода довжиною 10 м має форму зрізаного конуса, діаметри основ якого дорівнюють 50 і 30 см. Потрібно вирізати з колоди балку з прямокутним перерізом, вісь якої співпадала б з віссю колоди і об'єм якої був би найбільшим. Якими мають бути розміри поперечного перерізу балки?
11. Яким має бути кут нахилу похилої площини до основи, щоб час зісковзування тіла по ній був найменшим, якщо коефіцієнт тертя між тілом і площиною $\mu=0,2$, а довжина основи стала?
12. Один моль ідеального газу перевели зі стану з тиском $p_1=100$ кПа та об'ємом $V_1=20$ л у стан із тиском $p_2=200$ кПа й об'ємом $V_2=5$ л. Визначити максимальну температуру газу в цьому процесі, якщо відомо, що його графіком у координатах $(p;V)$ є пряма лінія.
13. До джерела електричної енергії з ЕРС $\mathcal{E}$ і внутрішнім опором r

приєднаний резистор. При якому значення його опору R потужність, що виділяється на ньому, буде максимальною ?
14. Користуючись принципом Ферма, тобто світло поширюється між двома точками шляхом, на подолання якого потрібно найменше часу, вивести другий закон заломлення.
15. Знайти мінімальну відстань між предметом та його дійсним зображенням у тонкій лінзі, фокусна відстань якої дорівнює F .
16. З точки, яка міститься на висоті H, кидають зі швидкістю v_0 камінь під деяким кутом до горизонту. Знайти максимально можливу дальність польоту каменя.
17. Циліндр заввишки 100 см наповнений водою. Де потрібно зробити отвір у стінці циліндра, щоб дальність польоту струменя води була найбільшою ?
18. При рівномірному переміщенні тіла масою m горизонтальною поверхнею з коефіцієнтом тертя μ сила тяги напрямлена під кутом α до горизонту. При якому значення кута сила тяги буде найменшою та чому вона дорівнює ?
19. Одна частинка масою m стикається з іншою, нерухомою частинкою масою M . Яку частину механічної енергії перша частинка передає другій? При якому співвідношенні їх мас ця частина енергії буде максимальною? Систему частинок вважати замкненою, удар – центральним і абсолютно пружним.
20. У центрі квадратної кімнати площею 25 м^2 висить електролампочка. Вважаючи її точковим джерелом світла, визначити, на якій висоті над підлогою має бути електролампочка, щоб освітленість у кутках кімнати була найбільшою ?
21. Радіус зовнішньої обкладки сферичного конденсатора $R = 4$ см, а радіус внутрішньої обкладки r підбирають так, щоб конденсатор не пробивався при можливо більшій різниці потенціалів. Визначити цю максимальну різницю потенціалів, якщо напруга пробою повітря $U_0 = 3 \cdot 10^4$ В/см.
22. Користуючись принципом Ферма, вивести закони відбивання світла.

✍***Завдання №3. Показати, що функція*** y ***задовольняє вказане рівняння:***

1. $y = xe^{-x^2/2}$, $xy' = \left(1 - x^2\right)y$.

2. $y=\frac{\sin x}{x}$, $xy'+y=\cos x.$

3. $y=5e^{-2x}+\frac{e^x}{3}$, $y'+2y=e^x.$

4. $y=2+c\sqrt{1-x^2}$, $\left(1-x^2\right)y'+xy=2x.$

5. $y=x\sqrt{1-x^2}$, $yy'=x-2x^3.$

6. $y=\frac{c}{\cos x}$, $y'-y\operatorname{tg}x=0.$

7. $y=-1/\left(3x+c\right)$, $y'=3y^2.$

8. $y=\ln\left(c+e^x\right)$, $y'=e^{x-y}.$

9. $y=\sqrt{x^2-cx}$, $\left(x^2+y^2\right)dx-2xydy=0.$

10. $y=x\left(c-\ln x\right)$, $\left(x-y\right)dx+xdy.$

11. $y=e^{\operatorname{tg}\left(x/2\right)}$, $y'\sin x=y\ln y.$

12. $y=\left(1+x\right)/\left(1-x\right)$, $y'=\frac{1+y^2}{1+x^2}.$

13. $y=\left(b+x\right)/\left(1+bx\right)$, $y-xy'=b\left(1+x^2y'\right).$

14. $y=\sqrt[3]{2+3x-3x^2}$, $yy'=\left(1-2x\right)/y.$

15. $y=\sqrt{\ln\left(\frac{1+e^x}{2}\right)+1}$, $\left(1+e^x\right)yy'=e^x.$

16. $y=\operatorname{tg}\ln x$, $\left(1+y^2\right)dx=xdy.$

17. $y=-\sqrt{\ln\left(\frac{1+e^x}{2}\right)^2+1}$, $\left(1+e^x\right)yy'=e^x.$

18. $y=\sqrt[3]{x-\ln x-1}$, $\ln x+y^3-3xy^2y'=0.$

19. $y=a+7x/\left(ax+1\right)$, $y-xy'=a\left(1+x^2y'\right).$

20. $y=a\operatorname{tg}\sqrt{\frac{a}{x}-1}$, $a^2+y^2+2x\sqrt{ax-x^2}\,y'=0.$

21. $y=\sqrt[4]{\sqrt{x}+\sqrt{x+1}}$, $8xy'-y=\frac{-1}{y^3\sqrt{x+1}}.$

22. $y=\left(x^2+1\right)e^{x^2}$, $y'-2xy=2xe^{x^2}.$

23. $y=\dfrac{2x}{x^3+1}+\dfrac{1}{x},\ x\left(x^3+1\right)y'+\left(2x^3-1\right)y=\dfrac{x^3-2}{x}.$

24. $y=e^{x+x^2}+2e^x,\ y'-y=2xe^{x+x^2}.$

25. $y=-x\cos x+3x,\ xy'=y+x^2\sin x.$

26. $y=1/\sqrt{\sin x+x},\ 2y'\sin x+y\cos x=y^3\left(x\cos x-\sin x\right).$

27. $y=x/\left(x-1\right)+x^2,\ x\left(x-1\right)y'+y=x^2\left(2x-1\right).$

28. $y=x/\cos x,\ y'-ytgx=\sec x.$

29. $y=\left(x+1\right)^n\left(e^x-1\right),\ y'-\dfrac{ny}{x+1}=e^x\left(1+x\right)^n.$

30. $y=2\dfrac{\sin x}{x}+\cos x,\ xy'\sin x+y\left(\sin x-x\cos x\right)=\sin x\cos x-x.$

✍Завдання №4. Знайти похідну вказаного порядку:

1. $y=\left(2x^2-7\right)\ln\left(x-1\right),\ y^{(5)}=?$

2. $y=\left(3-x^2\right)\ln^2 x,\ y'''=?$

3. $y=x\cos x^2,\ y'''=?$

4. $y=\dfrac{\ln\left(x-1\right)}{\sqrt{x-1}},\ y'''=?$

5. $y=\dfrac{\log_2 x}{x^3},\ y'''=?$

6. $y=\left(4x^3+5\right)e^{2x+1},\ y^{(5)}=?$

7. $y=x^2\sin\left(5x-3\right),\ y'''=?$

8. $y=\dfrac{\ln x}{x^2},\ y^{(4)}=?$

9. $y=\left(2x+3\right)\ln^2 x,\ y'''=?$

10. $y=\left(1+x^2\right)\operatorname{arctg}x,\ y'''=?$

11. $y=\dfrac{\ln x}{x^3},\ y^{IV}=?$

12. $y=\left(4x+3\right)2^{-x},\ y^{(5)}=?$

13. $y=e^{1-2x}\sin\left(2+3x\right),\ y^{IV}=?$

14. $y=\dfrac{\ln\left(3+x\right)}{3+x},\ y'''=?$

15. $y=\left(2x^3+1\right)\cos x,\ y^{V}=?$

16. $y=\left(x^2+3\right)\ln\left(x-3\right),\ y^{(4)}=?$

17. $y=\left(1-x-x^2\right)e^{(x-1)/2},\ y^{(4)}=?$

18. $y=\dfrac{\sin 2x}{x},\ y'''=?$

19. $y=\left(x+7\right)\ln\left(x+4\right),\ y^{(5)}=?$

20. $y=\left(3x-7\right)3^{-x},\ y^{(4)}=?$

21. $y=\dfrac{\ln\left(2x+5\right)}{2x+5},\ y'''=?$

22. $y=e^{\frac{x}{2}}\sin 2x,\ y^{(4)}=?$

23. $y=\dfrac{\ln x}{x^5},\ y'''=?$

24. $y=x\ln\left(1-3x\right),\ y^{(4)}=?$

25. $y=\left(x^2+3x+1\right)e^{3x+2},\ y^{(5)}=?$

26. $y=\left(5x-8\right)2^{-x},\ y^{(4)}=?$

27. $y=\dfrac{\ln\left(x-2\right)}{x-2},\ y^{(5)}=?$

28. $y=e^{-x}\left(\cos 2x-3\sin 2x\right),\ y^{(4)}=?$

29. $y=(5x-1)\ln^2 x,\ y'''=?$

30. $y=\dfrac{\log_3 x}{x^2},\ y^{(4)}=?$

✍***Завдання №5. Провести повне дослідження функцій та побудувати їх графіки:***

1. $y=e^{\sin x+\cos x}.$

2. $y=\operatorname{arctg}\left((\sin x+\cos x)/\sqrt{2}\right).$

3. $y=\ln(\cos x+\sin x).$

4. $y=1/(\sin x+\cos x).$

5. $y=e^{\sqrt{2}\sin x}.$

6. $y=\operatorname{arctg}\sin x.$

7. $y=\ln\left(\sqrt{2}\sin x\right).$

8. $y=1/(\sin x-\cos x).$

9. $y=e^{\sin x-\cos x}.$

10. $y=\operatorname{arctg}\left((\sin x-\cos x)/\sqrt{2}\right).$

11. $y=\ln(\sin x-\cos x).$

12. $y=1/(\sin x+\cos x)^2.$

13. $y=e^{-\sqrt{2}\cos x}.$

14. $y=-\operatorname{arctg}\cos x.$

15. $y=\ln\left(-\sqrt{2}\cos x\right).$

16. $y=1/(\sin x-\cos x)^2.$

17. $y=e^{-\sin x-\cos x}.$

18. $y=\sqrt[3]{\sin x}.$

19. $y=\ln(-\sin x-\cos x).$

20. $y=\sqrt{(\sin x-\cos x)/\sqrt{2}}.$

21. $y=e^{-\sqrt{2}\sin x}.$

22. $y=\sqrt[3]{\cos x}.$

23. $y=\ln\left(-\sqrt{2}\sin x\right).$

24. $y=\sqrt{\cos x}.$

25. $y=e^{\cos x-\sin x}.$

26. $y=\sqrt[3]{(\sin x+\cos x)/\sqrt{2}}.$

27. $y=\ln(\cos x-\sin x).$

28. $y=\sqrt{\sin x}.$

29. $y=e^{\sqrt{2}\cos x}.$

30. $y=\sqrt{(\sin x+\cos x)/\sqrt{2}}.$

✍***Завдання №6. Провести повне дослідження функцій та побудувати їх графіки:***

1. $x(t)=\dfrac{t}{t^2-1},\ y(t)=\dfrac{t^2}{t-1};$

2. $x(t)=\dfrac{4-t^2}{t^3+1},\ y(t)=\dfrac{t^2}{t^2+1};$

3. $x(t)=\dfrac{t^3}{t^3+1},\ y(t)=\dfrac{t^2}{t^3+1};$

4. $x(t)=t^2,\ y(t)=\dfrac{t^3+2t^2+t}{t+2};$

5. $x(t)=\dfrac{t^2-1}{t(t+2)},\ y(t)=\dfrac{t^2}{(t+2)(t+1)};$

6. $x(t)=\dfrac{t^2+1}{4(t-1)},\ y(t)=\dfrac{t}{t+1};$

7. $x(t)=\dfrac{t}{1-t^2},\ y(t)=\dfrac{t(1-4t^2)}{1-t^2}$; **8.** $x(t)=\dfrac{t^2}{t^2-1},\ y(t)=\dfrac{t^2+1}{t+2}$;

9. $x(t)=\operatorname{arctg} t,\ y(t)=t^3-t$; **10.** $x(t)=e^t\sin t,\ y(t)=e^t\cos t$;

11. $x(t)=\sin 2t,\ y(t)=\sin 4t$; **12.** $x(t)=\sin 4t,\ y(t)=\cos t$;

13. $x(t)=\cos 4t,\ y(t)=\cos 3t$; **14.** $x(t)=t^2-t+1,\ y(t)=t^2+t+1$;

15. $x(t)=t^3+3t+1,\ y(t)=t^3-3t+1$; **16.** $x(t)=\dfrac{a}{\sqrt{t^2+1}},\ y(t)=\dfrac{at}{\sqrt{t^2+1}}$;

17. $x(t)=3^t+3^{-t},\ y(t)=3^t-3^{-t}$; **18.** $x(t)=a\ln t,\ y(t)=\dfrac{a}{2}\left(t+\dfrac{1}{t}\right)$;

19. $x(t)=\dfrac{1}{t(t+1)},\ y(t)=\dfrac{(t+1)^2}{t}$; **20.** $x(t)=\dfrac{e^t}{t},\ y(t)=e^t(t-1)^2$;

21. $x(t)=2\cos 2t,\ y(t)=2\cos 3t$; **22.** $x(t)=5\cos^2 t,\ y(t)=3\sin^2 t$;

23. $x(t)=2(t-\sin t),\ y(t)=2(1-\cos t)$; **24.** $x(t)=1+\dfrac{1}{t},\ y(t)=t+\dfrac{1}{t^2}$.

Список рекомендованої літератури

1. Давидов М.О. Курс математичного аналізу. Ч. 1. – К.: Вища школа, 1979.
2. Дороговцев А.Я. Математичний аналіз. Ч.1 – К.: Либідь, 1993.
3. Кудрявцев Л.Д. Курс математического анализа. Т.1. – М.: Высшая школа, 1988.
4. Райков Д.А. Одномерный математический анализ. М.:Высшая школа, 1982.
5. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления, т.1,М.:Наука, 1970
6. Томусяк А.А., Трохименко В.С., Шунда Н.М. Математичний аналіз. Вступ до аналізу. – Вінниця, ВДПУ, 2001.
7. Зорич В.А. Математический анализ. Ч.1. – М.: Наука, 1981.
8. Шкіль М.І. Математичний аналіз. Ч.1, К.:Вища школа, 1978.
9. Dennis D. Berkey Calculus. – New York, 1988.
10. Thomas G. Calculus and analytic geometry. – Boston, 2000
11. Шунда Н.М., Томусяк А.А. Практикум з математичного аналізу. Вступ до аналізу. Диференціальне числення. – К.: Вища школа, 1993.
12. Виленкин Н.Я., Бохан К.А., Марон И.А. и др. Задачник по курсу математического анализа. Ч.1. – М.: Просвещение.
13. Ляшко И.И., Боярчук А.К., Гай Я.Г., Головач Г.П. Справочное пособие по математическому анализу. Ч.1. – К.: Высшая школа.

14. Вавилов В.В., Мельников И.И., Олейник С.Н, Паниченко П.И. Задачи по математике. Начала анализа. – М.:Наука, 1990. – 608 с.
15. Кудрявцев Л.Д. и др. Сборник задач по математическому анализу. Т.1. – М.: Физматгиз, 2003. – 496 с.
16. Запорожец Г.И. Руководство к решению задач по математическому анализу. – М.: Высшая школа, 1966. – 460 с.
17. Мерзляк А.Г., Полонский В.Б., Рабинович Е.М., Якир М.С. Учимся решать задачи по началам анализа. – Киев: "Магістр – S", 1998. – 416 с.
18. Рябушко А.П., Бархатов В.В., Державец В.В., Юруть И.Е. Сборник индивидуальных заданий по высшей математике. Часть 1. – Минск: Вышейшая школа, 1990. – 270 с.
19. Кузнецов Л.А. Сборник заданий по высшей математике (типовые расчеты). – М.: Высшая школа, 1983. – 175 с.
20. Берман Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа. – М., 1958. – 436 с.
21. Ковтонюк М.М. Лекції з математичного аналізу (Вступ в аналіз. Диференціальне числення функції однієї змінної). – Вінниця: "Едельвейс і К", 2008. – 305 с.

Навчальне видання

Ковтонюк Мар'яна Михайлівна
Бак Сергій Миколайович

Комп'ютерна верстка та набір Бака С.М., Ковтонюк М.М.

РОБОЧИЙ ЗОШИТ СТУДЕНТА
з математичного аналізу
II семестр
Диференціальне числення функції однієї змінної.
(за вимогами кредитно-трансферної системи)

Папір офсетний. Гарнітура Times.
Ум. друк. арк. 3,2.
Наклад 300 примірників. Замовлення №
Віддруковано з оригіналів.

21010 м.Вінниця, вул. Острозького, 32.