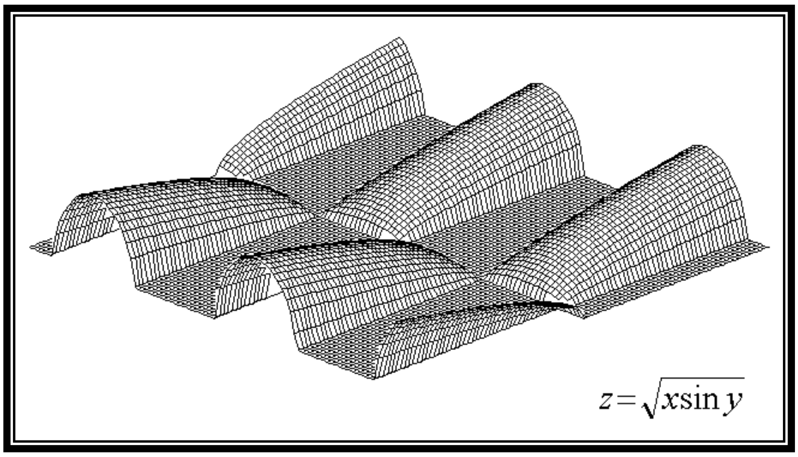
Вінницький державний педагогічний університет
імені Михайла Коцюбинського
Факультет математики, фізики і технологій

Кафедра математики та інформатики

РОБОЧИЙ ЗОШИТ СТУДЕНТА
з математичного аналізу

IV семестр

Диференціальне та інтегральне числення функції багатьох змінних.



Вінниця 2017

Індивідуальний робочий зошит студента

Дисципліна: математичний аналіз

Розділи: Диференціальне та інтегральне числення функції багатьох змінних.

Укладачі: доктор педагогічних наук,
професор **Ковтонюк М. М.**
кандидат фізико-математичних наук,
доцент **Бак С. М.**

Рецензенти: кандидат фізико-математичних наук,
доцент **Тимошенко О. З.**

Видання третє, перероблене і доповнене.

Передмова

Робочий зошит з математичного аналізу призначений для використання студентами денної і заочної форм навчання фізико-математичних спеціальностей при вивченні тем „Функції багатьох змінних та їх застосування” в умовах кредитно-трансферного навчання.

У **Робочому** зошиті подано робочий план студента з вказаних тем, за яким весь загальний обсяг матеріалу поділено на два загальні і чотири змістові модулі, наведено розрахунки рейтингових балів за видами поточного контролю, а також за модулями.

Кожен модуль складається з практичних занять з добіркою типових завдань для аудиторного і самостійного опрацювання та тексти самостійних робіт.

Після кожного модуля подано зразок тексту контрольної роботи або тестового завдання. Для допомоги у виконанні самостійної роботи в зошиті подано список рекомендованої літератури і шкалу оцінювання знань згідно з ECTS.

1. Робочий план студента.

Таблиця 1. Шкала оцінювання знань студентів

Мінімальний бал для отримання позитивної оцінки – 50, максимальний - 100	Оцінка за розширеною шкалою	Оцінка ЄКТС
90-100	відмінно	A
80-89	дуже добре	B
75-79	добре	C
60-74	задовільно	D
50-59	достатньо	E
35-49	незадовільно	FX
1-34	неприйнятно	F

Таблиця 2. Розподіл рейтингових балів за видами діяльності

№	Вид діяльності	Коефіцієнт вартості (бали)	Кількість робіт	Результат (бали)
1.	Домашні завдання	0,5	14	7
3.	Творче завдання	11	1	11
4.	Самостійні роботи	10	2	20
5.	Контрольна робота	11	2	22
6.	Колоквіум	10	2	20
Всього за 4-й семестр:				**80 (80%)**
Залік				**20 (20%)**
Нормований рейтинговий бал				**100**

Математичний твір

Тема: “Функції трьох змінних”.

План твору:

а) Обов’язковий мінімум.

1. Означення функції трьох змінних. Приклади. Поверхні рівня.
2. Границя функції трьох змінних. Основні теореми про границі.
3. Неперервність функції трьох змінних. Основні теореми про неперервні функції.
4. Основні властивості функцій, неперервних на обмеженій замкненій і зв’язній множині.
5. Диференційовність функції трьох змінних. Зв’язок з частинними похідними.

б) Додаткові питання.

6. Функції трьох змінних як математична модель фізичного поля.
7. Порівняльний аналіз відповідних фрагментів теорії функцій однієї, двох і трьох змінних і теорії відображень метричних просторів.

Література.

1.[9, Т.1, *с.412–429*] **2**. [4, Ч.2, *с.7–48*] **3**. [10, Т.1, *с.247–293*].

1. Конкретизувати означення відображення МП X в МП Y на випадок, коли $X=\mathbb{R}^3$, $Y=\mathbb{R}$ (метрика в обох випадках евклідова). Зручно замість $u=f(x,y,z)$ використовувати позначення $u=f(M)$, де M – точка простору $\mathbb{R}^3$ з координатами (x,y,z). Оскільки означена функція є числовою (набуває числових значень), то для таких функцій можна означити арифметичні операції.

2. Означення границі функції в точці можна дати і за Коші, і за Гейне.

Означення (за Коші). Число A називається границею функції $u=f(M)$ *в точці* $M_0(x_0,y_0,z_0)$*, якщо для довільного* $\varepsilon>0$ *можна вказати таке додатне число* $\delta>0$*, що для всіх точок* M*, які задовольняють нерівність* $0<d(M,M_0)<\delta$*, виконується нерівність* $|f(M)-A|<\varepsilon$.

$$\lim_{M\to M_0} f(M)=A \overset{df}{\Leftrightarrow} \forall\varepsilon>0\,\exists\delta>0, \forall M: 0<d(M,M_0)<\delta \Rightarrow \left|f(M)-A\right|<\varepsilon.$$

Позначати границю функції можна і так: $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0\\ z\to z_0}} f(x,y,z)$

3. Функція $u=f(M)$ неперервна у точці M_0, якщо $\lim\limits_{M\to M_0} f(M)=f(M_0)$. Конкретизувати означення за Коші і за Гейне. Сформулюйте теореми про арифметичні операції над неперервними функціями.

4. При доведенні теорем Вейєрштрасса про обмеженість і екстремальні значення неперервної на обмеженій замкненій множині функції трьох змінних потрібно скористатись відповідними теоремами про обмеженість і екстремальні значення числової функції, неперервної на компакті. Показати, що для неперервних на зв'язній множині функцій трьох змінних мають місце теореми Коші про обертання функції в нуль і про проміжне значення. З цією метою:

- означити криву в просторі як множину точок $M(x,y,z)$, координати яких є неперервні функції $x=x(t)$, $y=y(t)$, $z=z(t)$ змінної t на деякому відрізку $[a;b]$;
- обґрунтувати, що коли $f(M)$ неперервна в деякій області функція і L крива (неперервний образ відрізка $[a;b]$), яка повністю належить цій області, то функція $F(t)=f(x(t),y(t),z(t))$ неперервна на $[a;b]$, і, отже, для неї мають місце теореми Коші;
- означити зв'язну множину (область) точок $\mathbb{R}^3$ як таку, що довільні дві точки якої можна з'єднати неперервною кривою, що міститься у цій множині.

5. Нехай функція $u=f(M)$ визначена на множині E. Якщо $M_0(x_0,y_0,z_0)$ і $M(x,y,z)$ точки з E, то число

$$\Delta u=f(M)-f(M_0)=f(x,y,z)-f(x_0,y_0,z_0)$$

називають *приростом функції у точці* M_0. Позначивши $\Delta x=x-x_0$, $\Delta y=y-y_0$, $\Delta z=z-z_0$, приріст функції можна записати у вигляді

$$\Delta u=f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y, z_0+\Delta z)-f(x_0,y_0,z_0).$$

Означення. *Функція* $u = f(x,y,z)$ *називається диференційовною в точці* $M_0(x_0,y_0,z_0)$, *якщо існують такі числа* A, B, C, *що*

$$\Delta u = A\Delta x + B\Delta y + C\Delta z + \alpha(\Delta x, \Delta y, \Delta z),$$

де $\alpha(\Delta x,\Delta y,\Delta z) = \varepsilon(\Delta x,\Delta y,\Delta z)\rho$, $\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}$, $\lim\limits_{\rho\to 0}\varepsilon(\Delta x,\Delta y,\Delta z) = 0$.

Очевидно, що для диференційовної в M_0 функції приріст подається двома частинами: перша – лінійна відносно приростів аргументів, друга – нескінченно мала порядку вищого, ніж ρ. Другу частину приросту можна подати і в такому вигляді:

$$\alpha(\Delta x,\Delta y,\Delta z) = \varepsilon_1(\Delta x,\Delta y,\Delta z)\Delta x + \varepsilon_2(\Delta x,\Delta y,\Delta z)\Delta y + \varepsilon_3(\Delta x,\Delta y,\Delta z)\Delta z,$$

де $\lim\limits_{\rho\to 0}\varepsilon_1 = \lim\limits_{\rho\to 0}\varepsilon_2 = \lim\limits_{\rho\to 0}\varepsilon_3 = 0$.

Показати, що коли функція $u = f(x,y,z)$ диференційовна в точці $M_0(x_0,y_0,z_0)$, то

а) вона неперервна в точці M_0;

б) частинні похідні по кожній змінній у точці M_0 існують і $f'_x(x_0,y_0,z_0) = A$, $f'_y(x_0,y_0,z_0) = B$, $f'_z(x_0,y_0,z_0) = C$;

в) вона має єдиний диференціал.

Також довести, що коли $u = f(x,y,z)$ має частинні похідні по всіх змінних в деякому околі точки M_0, які в точці M_0 неперервні, то $u = f(x,y,z)$ диференційовна у цій точці.

Зауваження. *Весь текст супроводжується прикладами, рисунками, виконаними в графічному редакторі.*

МОДУЛЬ 1.
Диференціальне числення функцій багатьох змінних.
🕮 Практичне заняття №1
Тема: Функції багатьох змінних.

✍**1.** [1] *Знайти значення функції* $z = f(x;\, y)$ *у точці* $(x_0;\, y_0)$*:*

а) $z = \left(\dfrac{\operatorname{arctg}(x+y)}{\operatorname{arctg}(x-y)}\right)^2$, $\left(\dfrac{1+\sqrt{3}}{2};\, \dfrac{1-\sqrt{3}}{2}\right)$;

б) $z = e^{\sin(x+y)}$, $\left(\dfrac{\pi}{2};\, \dfrac{\pi}{2}\right)$;

в) $z = y^{x^2-1} + x^{y^2-1}$, $(2;\, 2), (1;\, 2), (2;\, 1)$;

г) $z = \sqrt{x^2 - y^2}$, $(5;\, -3)$.

✍**2.** [11,1] *Знайти область визначення функції двох змінних*

а) $u = \sqrt{x+y} + \sqrt{x-y}$;

б) $u = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$;

в) $u = \sqrt{1 - \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2}}$;

г) $u = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 - 1}}$;

д) $u = \ln(y^2 - 4x + 8)$;

е) $u = \ln xy$;

є) $u = \ln x - \ln\sin y$;

ж) $u = \ln(x^2 + 4y^2 - 2x - 3)$;

з) $u = \ln\dfrac{x^2 + y^2 - x}{2x - x^2 - y^2}$;

и) $u = \ln\big(x\ln(y-x)\big)$;

і) $u = \sqrt{\dfrac{x^2 + 2x + y^2}{x^2 - 2x + y^2}}$;

к) $u = \sqrt{\sin\pi(x^2 + y^2)}$;

л) $u = \sqrt{1 - |x| - |y|}$;

м) $u = \arcsin\dfrac{x^2 + y^2}{4}$.

✍**3.** [11] *Виразити площу* $S = f(x;\, y)$ *ромба як функцію його периметра* x *та суми* y *довжин його діагоналей:*

✍**4.** [11] *Знайти функцію* $V = f(x;\, y)$*, якщо* V *– об'єм прямого кругового конуса,* x *– довжина його твірної, а* y*:*

1) висота конуса; 2) довжина кола основи.

✍**5.** [1] *В кулю радіуса* R *вписана піраміда з прямокутною основою, вершина якої ортогонально проектується в точку перетину діагоналей основи. Об'єм піраміди є функцією сторін* x *і*

y її основи. Чи буде ця функція однозначною? Скласти для неї аналітичний вираз. Знайти область визначення функції.

✍**6.** [2] *Квадратна дошка складається з 4 квадратних клітинок, почергово білих і чорних; сторона кожної з них дорівнює одиниці. Розглянемо прямокутник зі сторонами, паралельними сторонам дошки, один з кутів якого співпадає з чорним кутом дошки. Площа чорної частини цього прямокутника є функцією від довжин його сторін x і y. Записати цю функцію аналітично.*

✍**7.** [2] *Підібрати аналітичні вирази, областями визначення яких були б такі множини:*

а) площина з виколотою точкою $A(-3;1)$;

б) площина з виколотим колом $x^2+y^2=25$;

в) площина з виколотою параболою $y^2=9x$ і колом $x^2+y^2=9$;

г) площина, з якої вилучені точки $A(m;n),\ m,n\in\mathbb{Z}$;

д) півкруг $x^2+y^2\le 100,\ x>0$;

е) півкруг $x^2+y^2,100,\ x>0$;

є) частина параболи $y^2=4x$, що відтинається прямою $x-y-4=0$;

ж) зовнішня частина круга радіуса 4 з центром $C(5;1)$;

з) область, обмежена параболами $y^2=x,\ y^2=4x$ і гіперболами $xy=4$ і $xy=8$.

✍**8.** [2, 11] *Знайти сімейства ліній рівня для кожної з функцій і накреслити їх графіки*

а) $z=x+y$;

б) $z=x^2+y^2$;

в) $z=x^2-y^2$;

г) $z=\sqrt{y-x}$;

д) $z=\ln(1-x^2-y^2)$;

е) $z=\operatorname{arctg}\dfrac{2y}{x^2+y^2-1}$;

є) $z=\sqrt{1-2|x|-|y|}$;

ж) $z=|x|+|y|-|x+y|$;

з) $z=\min(x,\ y)$;

и) $z=\max(|x|,\ |y|)$.

✍**9.** [2, 11] *Знайти область визначення функції трьох змінних, заданих формулами:*

а) $u=\dfrac{1}{\sqrt{x}}+\dfrac{1}{\sqrt{y}}+\dfrac{1}{\sqrt{z}}$;

б) $u=\ln(1-x-y-z)$;

в) $u=\sqrt{z(2-z)}+\ln(4-x^2)-3y$;

г) $u=\sqrt{8-x^2-2y^2-4z^2}$;

д) $u=\sqrt{1-|x|-|y|-|z|}$;

е) $u=\ln(2z^2-6x^2-3y^2-6)$;

є) $u=\sqrt{16-x^2-y^2-z^2}\ln(x^2+y^2+z^2-4)$;

ж) $u=\arcsin\dfrac{\sqrt{x^2+y^2}}{z-1}$.

✍**10.** [11] *Знайти функцію* $S=f(x,y,z)$, *якщо* S *– площа рівнобічної трапеції,* x,y *– довжини основ,* z *– довжина бічної сторони трапеції. Обчислити:*

а) $f(2;1;2)$; б) $f(1;4;1)$.

✍**11.** [11] *Знайти функцію* $Q=f(x,y,z)$, *якщо* Q *– площа бічної поверхні правильної шестикутної зрізаної піраміди,* x *і* y *– сторони основ,* z *– висота піраміди.*

✍**12.** [11] *Знайти* C *-рівні функції трьох змінних:*

а) $u=x+2y+3z$;

б) $u=e^{x+2y+3z}$;

в) $u=x^2+y^2+4z^2$;

г) $u=\dfrac{1}{x^2+y^2+z^2+2y}$;

д) $u=\ln(x^2+y^2+z^2)$;

е) $u=\ln(z^2-x^2-y^2)$;

є) $u=\ln\dfrac{1+\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{1-\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$;

ж) $u=\dfrac{z}{x+y+z-1}$.

🕮 Практичне заняття №2

Тема: Границя і неперервність функції багатьох змінних.

✍**1.** [13, с.311] *Для функції* $z=f(x,y)$ *знайти повторні границі* $\lim\limits_{x\to x_0}\left(\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y)\right)$; $\lim\limits_{y\to y_0}\left(\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y)\right)$; *і границю* $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)$, *якщо вони існують у випадках:*

а) $f(x,y)=\dfrac{x-y}{x+y}$, $(1;1)$; $(0;0)$; $(+\infty;+\infty)$; $(+\infty;-\infty)$;

б) $f(x,y)=(x+y)\sin\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{y}$, $(0;0)$; $\left(\dfrac{1}{\pi};0\right)$; $\left(\dfrac{1}{\pi};\dfrac{1}{\pi}\right)$; $(+\infty;+\infty)$;

в) $f(x,y)=\dfrac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}$, $(0;0)$; $(+\infty;+\infty)$; $(+\infty;-\infty)$;

г) $f(x,\,y)=\dfrac{2xy}{x^2+y^2}$, $(0;\,0);\,(+\infty;\,+\infty);\,(0;\,+\infty);\,(0;\,1)$;

д) $f(x,\,y)=x^2e^{-(x^2-y)}$, $(+\infty;\,+\infty);\,(0;\,+\infty);\,(+\infty;\,0);\,(+\infty;\,-\infty)$;

е) $f(x,\,y)=\dfrac{x^2+y^2}{x^2+y^4}$, $(+\infty;\,+\infty);\,(0;\,0);\,(\infty;\,0);\,(0;\,\infty)$;

є) $f(x,\,y)=\dfrac{\sin\pi x}{2x+y}$, $(+\infty;\,+\infty);\,(+\infty;\,-\infty);\,(0;\,+\infty);\,(+\infty;\,0)$;

ж) $f(x,\,y)=\dfrac{1}{xy}tg\,\dfrac{xy}{1+xy}$, $(0;\,+\infty);\,(0;\,0)$;

з) $f(x,\,y)=\dfrac{x^2+y^2}{x^4+y^4}$, $(\infty;\,\infty);\,(0;\,0)$;

и) $f(x,\,y)=\dfrac{\sin xy}{x}$, $(0;\,0);\,(0;\,1);\,(0;\,+\infty);\,(\pi;\,1)$;

і) $f(x,\,y)=\left(\dfrac{xy}{x^2+y^2}\right)^{x^2}$, $(+\infty;\,+\infty),\,(+\infty;\,1);\,(+0;\,+0);\,(+0;\,+\infty)$;

к) $f(x,\,y)=(x^2+y^2)^{x^2y^2}$, $(0;\,0);\,(\infty;\,0)$;

л) $f(x,\,y)=\dfrac{\ln(x+e^y)}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $(1;\,0);\,(0;\,0);\,(+\infty;\,+\infty)$.

✍**2.** [13] *Знайти границю функції* $z=f(x,\,y)$ *в точці* $(0;\,0)$, *або довести, що вона не існує, якщо:*

а) $f(x;\,y)=\dfrac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1}$;

б) $f(x;\,y)=\dfrac{\sin(x^4y^2)}{(x^2+y^2)^2}$;

в) $f(x;\,y)=\dfrac{e^{-\frac{1}{x^2+y^2}}}{x^4+y^4}$;

г) $f(x;\,y)=\dfrac{\sqrt{x^2y^2+1}-1}{x^2+y^2}$;

д) $f(x;\,y)=\dfrac{(x^2+y^2)x^2y^2}{1-\cos(x^2+y^2)}$;

е) $f(x;\,y)=(1+x^2y^2)^{-\frac{1}{x^2+y^2}}$;

є) $f(x;\,y)=\dfrac{\sqrt[3]{x^3+y^3}-x-y}{\sqrt{x^2+y^2}}$;

ж) $f(x;\,y)=\dfrac{xy}{x^2+y^2}$.

✍**3.** [2] *Довести, що функція*

$$f(x;\ y)=\begin{cases}\dfrac{x^3+y^3}{x^4+y^2}, & (x,\ y)\neq(0;\ 0),\\ 0, & (x,\ y)=(0;\ 0)\end{cases}$$

не має границі в точці $O(0;\ 0)$.

✍**4.** [2] *Довести, що функція*

$$f(x;y)=\begin{cases}\left(1+\dfrac{1}{x+y}\right)^{x+y}, & \text{якщо } x+y\neq 0,\\ 1, & \text{якщо } x+y=0\end{cases}$$

не має границі, якщо $x\to\infty;\ y\to\infty$.

✍**5.** *Дослідити функції на неперервність і знайти точки розриву, якщо такі є:*

а) $f(x;\ y)=\begin{cases}\dfrac{x^4y}{x^4+y^4}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x=y=0;\end{cases}$ б) $f(x;\ y)=\dfrac{2x-3}{x^2+y^2-4}$;

в) $f(x;\ y)=\begin{cases}\dfrac{x^3+y^3}{x+y}, & x+y\neq 0,\\ 3, & x+y=0;\end{cases}$ г) $f(x;\ y)=\dfrac{\sin^2 x\sin y}{\sin^4 x+\sin^2 y}$;

д) $f(x;\ y)=\begin{cases}\dfrac{1}{\sin^2\pi x+\sin^2\pi y}, & (x,\ y)\notin\mathbb{Z}^2,\\ 1, & (x,\ y)\in\mathbb{Z}^2;\end{cases}$

е) $f(x;\ y)=x\sin\dfrac{y^2}{x^2+y^2}$; є) $f(x;\ y;\ z)=\dfrac{1}{\sin\pi x+\sin\pi y+\sin\pi z}$;

ж) $f(x;\ y;\ z)=\dfrac{1}{\sqrt{8-x^2-2y^2-4z^2}}$; з) $f(x;\ y;\ z)=\begin{cases}\dfrac{\sin(xyz)}{z}, & z\neq 0,\\ x^2, & z=0;\end{cases}$

и) $f(x;\ y;\ z)=\begin{cases}\arccos\dfrac{x^2}{x^2+z^2}, & x^2+z^2\neq 0,\\ \dfrac{\pi}{2}, & x^2+z^2=0.\end{cases}$

🕮 Практичне заняття №3

Тема: Диференційовність функції багатьох змінних. Повний диференціал.

✍**1.** [1] *Знайти частинні похідні та повні диференціали функцій по кожній з незалежних змінних:*

а) $z = x^3 y - y^3 x;$

б) $z = \dfrac{u}{v} + \dfrac{v}{u};$

в) $z = \dfrac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2};$

г) $z = \left(5x^2 y - y^3 + 7\right)^3;$

д) $z = x\sqrt{y} + \dfrac{y}{\sqrt[3]{x}};$

е) $z = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + y^2}\right);$

є) $z = \operatorname{arctg}\dfrac{x}{y};$

ж) $z = x^y;$

з) $z = \ln\left(x^2 + y^2\right);$

и) $z = \ln\dfrac{\sqrt{x^2 + y^2} - x}{\sqrt{x^2 + y^2} + x};$

і) $z = \sin\dfrac{x}{y}\cos\dfrac{y}{x};$

к) $z = \left(\dfrac{1}{5}\right)^{\frac{y}{x}};$

л) $z = x^{x^y};$

м) $u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2};$

н) $z = x^3 + yz^2 + 3yx - x + z;$

о) $u = xyz + yzv + zvx + vxy;$

п) $u = e^{x(x^2 + y^2 + z^2)};$

р) $u = x^{\frac{y}{z}}.$

✍**2.** [11, *с. 45*], [2, *с.102-103*], [12, *с.200-201*] *Дослідити функцію* $f(x, y)$ *на диференційовність в точці* $(0; 0)$*:*

а) $f(x, y) = \sqrt[3]{xy};$

б) $f(x, y) = \cos\sqrt[3]{xy};$

в) $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^3};$

г) $f(x, y) = \sqrt[3]{x^3 + y^3};$

д) $f(x, y) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2+y^2}}, & x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, & x^2 + y^2 = 0; \end{cases}$

е) $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^2 + y^2}, & x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, & x^2 + y^2 = 0; \end{cases}$

є) $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^3 y}{x^6 + y^2}, & x^6 + y^2 \neq 0, \\ 0, & x^2 + y^2 = 0; \end{cases}$

ж) $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, & x^2 + y^2 = 0. \end{cases}$

✍**3.** [2] *Нехай* $x=\rho^2\cos\varphi,\ y=\rho^2\sin\varphi$. *Обчислити визначник:*

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \end{vmatrix}.$$

✍**4.** [2] *Нехай* $x=\rho\cos\alpha\cos\beta,\ y=\rho\cos\alpha\sin\beta$. *Обчислити визначник:*

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial x}{\partial \alpha} & \frac{\partial x}{\partial \beta} \\ \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \alpha} & \frac{\partial y}{\partial \beta} \\ \frac{\partial z}{\partial \rho} & \frac{\partial z}{\partial \alpha} & \frac{\partial z}{\partial \beta} \end{vmatrix}.$$

✍**5.** [2] *Нехай* $pV=RT\ (R=const)$. *Довести, що*

$$\frac{\partial p}{\partial V}\cdot\frac{\partial V}{\partial T}\cdot\frac{\partial T}{\partial p}=-1.$$

✍**6.** [2] *Довести, що функція* $u=\dfrac{x-y}{z-t}+\dfrac{t-x}{y-z}$ *задовольняє співвідношення* $\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial u}{\partial y}+\dfrac{\partial u}{\partial z}+\dfrac{\partial u}{\partial t}=0.$

✍**7.** *Знайти повний диференціал функції* $z=f(x,y)$ *в точці* (x_0,y_0), *якщо:*

а) $z=x+y-\sqrt{x^2+y^2}$, $x_0=3,\ y_0=4,\ \Delta x=0{,}1,\ \Delta y=0{,}2;$

б) $z=e^{xy}$, $x_0=y_0=1,\ \Delta x=1{,}15,\ \Delta y=0{,}1;$

в) $z=\dfrac{xy}{x^2-y^2}$, $x_0=2,\ y_0=1,\ \Delta x=0{,}01,\ \Delta y=0{,}03;$

г) $z=\dfrac{x+3y}{y-3x}$, $x_0=2,\ y_0=1,\ \Delta x=0{,}5,\ \Delta y=-0{,}5.$

✍**8.** *Замінюючи приріст функції диференціалом, наближено обчислити:*

а) $\sqrt{1{,}98^2+1{,}01^2}$;

б) $\sin 59^0\, tg\, 46^0$;

в) $0{,}97^{1{,}05}$;

г) $2{,}003^2 \cdot 3{,}998^3 \cdot 1{,}002^2$;

д) $\ln(\sqrt[3]{1{,}03} + \sqrt[4]{0{,}98} - 1)$;

е) $1{,}04^{2{,}02}$;

є) $1{,}94^2 \cdot e^{0{,}12}$;

ж) $2{,}68^{\sin 0{,}05}$;

з) $\ln(1{,}05) \cdot \operatorname{arctg} 0{,}99$;

и) $\dfrac{\operatorname{tg} 46^0 \operatorname{arcctg} 0{,}01}{(4{,}03)^{\frac{1}{2{,}02}}}$.

✍**9.** [2] *При вимірюванні радіуса основи* R *і висоти* H *циліндра отримали такі результати:*

$$R = 3м \pm 0{,}1м,$$
$$H = 5м \pm 0{,}2м.$$

З якою абсолютною і відносною похибкою можна обчислити об'єм циліндра?

✍**10.** [2] *Центральний кут сектора* $\alpha = 60^0$ *збільшився на* $\Delta\alpha = 1^0$. *На скільки потрібно зменшити початковий радіус сектора* $R = 20см$, *щоб площа сектора не змінилася?*

✍**11.** [1] *Сторона трикутника має довжину 2,4 м і зростає з швидкістю 10 см/с; друга сторона довжиною 1,5 м зменшується з швидкістю 5 см/с. Кут, утворений даними сторонами, дорівнює* 60^0 *і зростає з швидкістю* 2^0*/с. Як і з якою швидкістю змінюється площа трикутника?*

✍**12.** [1] *В зрізаному конусі радіуси основ дорівнюють* $R = 30см$, $r = 20см$, *висота* $h = 40см$. *Як зміниться об'єм конуса, якщо змінити* R *на 3 мм,* r *на 4 мм,* h *на 2 мм?*

🕮 Практичне заняття №4

Тема: Складена функція та її диференційовність. Похідна в заданому напрямку. Градієнт.

✍**1.** [2, с. 119] *Знайти* $\dfrac{dz}{dt}$ *і* dz, *якщо:*

а) $z = x^2 + xy + y^2, \ \ x = \sin t, \ y = \cos t$;

б) $z = \cos(2t + 4x^2 - y), \ \ x = \dfrac{1}{t}, \ y = \dfrac{\sqrt{t}}{\ln t}$;

в) $z = e^{xy} \ln(x + y), \ \ x = t^3, \ y = 1 - t^3$;

г) $z = \operatorname{arctg} \dfrac{t+1}{x}, \ \ x = e^{(1+t)^2}$;

д) $z=\arcsin\frac{t}{y},\ \ y=\sqrt{t^2+1};$

е) $z=e^{x-2y},\ \ x=\sin t,\ y=t^3.$

✍**2.** [2, с. 114] *Знайти частинні похідні і повний диференціал складеної функції:*

а) $z=x^2-y^2,\ x=u\cos v,\ y=u\sin v;$

б) $z=x^2y-xy^2,\ \ x=\rho\cos\varphi,\ y=\rho\sin\varphi;$

в) $u=y^2+\sqrt{xz}+\frac{1}{\cos z},\ \ x=t+v,\ y=\frac{t}{v},\ z=tv;$

г) $p=u^2\ln v,\ \ u=\frac{x}{y},\ v=3x-2y.$

✍**3.** [2, с. 119] *Знайти повні диференціали функцій, користуючись властивістю інваріантності їх форми:*

а) $z=xy\,arctg\,xy,\ \ \ x=t^2+1,\ y=t^3;$

б) $z=x^y+y^x,\ \ x=u^2+v^2,\ y=u^2-v^2;$

в) $z=x\sin y+y\cos x,\ \ x=\frac{u}{v},\ y=uv;$

г) $p=f(x^2y^3z^4),\ \ x=\arcsin\frac{u}{v},\ y=\sqrt{v^2-u^2},\ z=\ln v;$

д) $z=f(u,v),\ \ u=y^2,\ v=arctg\,\frac{y}{x};$

е) $p=f(u,v,w),\ \ u=x^2+y^2+z^2,\ v=x+y+z,\ w=xyz.$

✍**4.** [11, с. 53] *Довести, що якщо* $f(u)$ *– довільна диференційована функція, то функція* $\varphi(x,y)$ *задовольняє вказаному рівнянню:*

а) $\varphi=yf(x^2-y^2),\ \ y^2\frac{\partial\varphi}{\partial x}+xy\frac{\partial\varphi}{\partial y}=x\varphi;$

б) $\varphi=xy+xf\left(\frac{y}{x}\right),\ \ x\frac{\partial\varphi}{\partial x}+y\frac{\partial\varphi}{\partial y}=xy+\varphi;$

в) $\varphi=\sin x+f(\sin y-\sin x),\ \ \cos y\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\cos x\frac{\partial\varphi}{\partial y}=\cos x\cos y;$

г) $\varphi=e^y f\left(ye^{\frac{x^2}{2y^2}}\right),\ \ (x^2-y^2)\frac{\partial\varphi}{\partial x}+xy\frac{\partial\varphi}{\partial y}=xy\varphi.$

✍**5.** [11, *с.55*], [13, *с.340*] *Знайти похідну функції по заданому напрямку вектора* $\vec{l}$ *в точці* M_0*, якщо:*

а) $f = 3x^2 + 5y^2$, $\vec{l} = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $M_0(1; 1)$;

б) $f = x\sin(x+y)$, $\vec{l} = (-1; 0)$, $M_0\left(\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right)$;

в) $f = x^3 + 2xy^2 + 3yz^2$, $\vec{l} = \left(\frac{2}{3}; \frac{2}{3}; \frac{1}{3}\right)$, $M_0(3; 3; 1)$;

г) $f = \frac{x}{y} + \left(\frac{y}{2}\right)^2 + \left(\frac{z}{x}\right)^3$, $M_0(1; 1; 1)$, $\vec{l}_1 = (1; -1; 1)$, $\vec{l}_2 = (1; 1; 0)$,

д) $f = \arcsin\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $M_0(1; 1; 1)$, $M(1; 5; 4)$, $\vec{l} = \overrightarrow{M_0M}$;

е) $f = \sum\limits_{k=1}^{n} \arcsin x_k$, $\vec{l} = \left(\frac{1}{\sqrt{n}}; \frac{1}{\sqrt{n}}; ...; \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$, $M_0\left(\frac{1}{4}; \frac{1}{4}; ...; \frac{1}{4}\right)$;

є) $f = \sum\limits_{k=1}^{n} x_k^k$, $\vec{l} = (1; 2; ...; m)$, $M_1(0; 0; ...; 0)$, $M_2(1; 1; ...; 1)$, $M_3(-1; -2; ...; -m)$.

✍**6.** [11], [13] *Знайти градієнт функції* f *в точці* M*, якщо:*

а) $f = 1 + x^2y^3$, $M(-1; 1)$;

б) $f = \arcsin\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $M_1(1; 2)$, $M_2(0; 1)$;

в) $f = x + yz + x^2yz$, $M_0(0; 0; 0)$, $M_1(1; 1; 1)$, $M_2(1; 2; 3)$;

г) $f = \sin(x+y) + \cos yz - tgzx$, $M_0(0; 0; 0)$, $M_1\left(\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}; 1\right)$, $M_2\left(0; \frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{3}\right)$;

д) $f = \left(\sum\limits_{k=1}^{m} x_k^{2m}\right)^{\frac{1}{m}}$, $M_0(1; 0; 0; ...; 0)$, $M_1(1; 1; ...; 1)$, $M_2(1; 2; ...; 3)$.

✍**7.** [13, с. 342] *Знайти кут між градієнтами функції* f_1 *в точці* M_1 *і* f_2 *в точці* M_2*, якщо:*

а) $f_1 = f_2 = \arcsin\frac{x}{x+y}$, $M_1(1; 1)$, $M_2(3; 4)$;

б) $f_1 = \sqrt{x^2 - y^2}$, $f_2 = x^3 + y^3 - 3xy$, $M_1 = M_2(4; 3)$;

г) $f_1 = f_2 = \sin(x+y+z) - \sin x - \sin y - \sin z$, $M_1(0;\,0;\,0)$, $M_2\left(\frac{\pi}{2};\,\frac{\pi}{2};\,\frac{\pi}{2}\right)$;

д) $f_1 = \sqrt[3]{x^3+y^3+z^3}$, $f_2 = \sqrt[4]{x^4+y^4+z^4}$, $M_1(1;\,0;\,0)$, $M_2(1;\,1;\,1)$.

✍**8.** [11] *Знайти найбільше значення* $\frac{\partial f}{\partial l}$ *в точці* M_0, *якщо:*

а) $f = xy^2 - 3x^4y^5$, $M_0(1;\,1)$; б) $f = \frac{x+\sqrt{y}}{y}$, $M_0(2;\,1)$;

в) $f = \ln xyz$, $M_0(1;\,-2;\,-3)$; г) $f = 3x^2 - 6xy + y^2$, $M_0\left(-\frac{1}{3};\,-\frac{1}{2}\right)$.

✍**9.** [11] *Знайти одиничний вектор* $\vec{l}$, *в напрямку якого* $\frac{\partial f}{\partial l}$ *в точці* M_0 *досягає найбільшого значення, якщо:*

а) $f = x^2 - xy + y^2$, $M_0(-1;\,2)$;

б) $f = x - 3y + \sqrt{3xy}$, $M_0(3;\,1)$;

в) $f = \arcsin xy + \arccos yz$, $M_0(1;\,0{,}5;\,0)$;

г) $f = xz^y$, $M_0(-3;\,2;\,1)$.

✍**10.** [13] *Для функції* f *знайти точки* D_f, *в яких її градієнт задовольняє умову (*):*

а) $f(x,\,y) = \ln\left(x + \frac{1}{y}\right)$, (*): 1) евклідова норма градієнта дорівнює $\frac{5}{3}$; 2) довжина градієнта дорівнює нулю;

б) $f(x;\,y) = \left(x^2+y^2\right)^{\frac{3}{2}}$, (*): 1) довжина градієнта дорівнює 2; 2) довжина градієнта дорівнює нулю;

в) $f(x,\,y) = x^2 + y^2 - 3xy$, (*): 1) градієнт перпендикулярний осі Oy; 2) градієнт перпендикулярний осі Ox;

г) $f(x,y,\,z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$, (*): 1) градієнт перпендикулярний осі Ox; 2) градієнт паралельний осі Oy; 3) $grad\ f \parallel \vec{a}(1;\,1;\,1)$; 4) $|grad\ f| = 1$.

✍**11.** [1] *Знайти похідну функції* $z=\ln(x+y)$ *в точці* $(1;2)$, *яка лежить на параболі* $y^2=4x$, *в напрямку цієї параболи.*

✍**12.** [1] *Знайти похідну функції* $z=arctg\dfrac{y}{x}$ *в точці* $\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$, *яка лежить на колі* $x^2+y^2-2x=0$ *в напрямку цього кола.*

✍**13.** *Знайти похідну функції* $u=xy^2+z^3-xyz$ *в точці* $M(1;1;2)$ *в напрямку, що утворює з осями координат кути відповідно в* 60^0, 45^0, 60^0.

✍**14.** *Довести, що похідна функції* $u=\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}$ *в довільній точці* $M(x,y,z)$ *в напрямку від точки* M *до початку координат, дорівнює* $\dfrac{2u}{r}$, *де* $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

🕮 Практичне заняття №5

Тема: Частинні похідні та диференціали вищих порядків.

✍**1.** [1] *Знайти всі частинні похідні і диференціали другого для функцій:*

а) $z=\ln\dfrac{2-y-x^2}{2+y+x^2}$, $(1;0)$;

б) $z=\ln\left(x+\sqrt{x^2+y^2}\right)$;

в) $z=\operatorname{arctg}\dfrac{x+y}{1-xy}$, $(0;0)$;

г) $z=\sin^2(ax+by)$, $(0;0)$;

д) $z=\arcsin xy$;

е) $z=\dfrac{x-y}{x+y}$;

є) $z=(\sin x)^{\cos y}$, $\left(\dfrac{\pi}{6};\dfrac{\pi}{2}\right)$;

ж) $z=\operatorname{arctg}\sqrt{xy}$.

✍**2.** *Знайти вказані частинні похідні:*

а) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}$, якщо $u=\sqrt{x^2+y^2+z^2-2xz}$;

б) $\dfrac{\partial^3 z}{\partial x^2\partial y}$, якщо $z=e^{xy^2}$;

в) $\dfrac{\partial^3 z}{\partial x\partial y^2}$, якщо $z=\ln\left(x^2+y^2\right)$;

г) $\dfrac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z}$, якщо $u = e^{xyz}$;

д) $\dfrac{\partial^6 u}{\partial x \partial y^3 \partial z^2}$, якщо $u = x^m y^n z^p$;

е) $\dfrac{\partial^4 f}{\partial x \partial y \partial z \partial t}$, якщо $f = \ln\sqrt{(x-y)^2 + (z-t)^2}$;

є) $\dfrac{\partial^{3n} u}{\partial x^n \partial y^n \partial z^n}$, якщо $f = x^{n+1}(y-1)^n (z+1)^{n-1}$.

✍**3.** [1],[13] *Перевірити рівності:*

а) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ (рівняння Лапласа), якщо $u = e^x \left(x\cos y - y\sin y \right)$;

б) $\dfrac{\partial u}{\partial t} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ (рівняння теплопровідності), якщо $u = \dfrac{1}{2a\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4a^2 t}}$;

в) $i\dfrac{\partial u}{\partial t} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$ (рівняння Шредінгера), якщо $u = \dfrac{1}{\sqrt{t}} e^{\frac{ix^2}{4t}}$;

г) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2} = k^2 u$ (рівняння Гельмгольца), якщо $u = \dfrac{C_1 e^{-kr} + C_2 e^{kr}}{r}$, $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, k, C_1, C_2 – сталі.

✍**4.** [13] *Знайти всі похідні до другого порядку включно, перші і другого порядку включно, перші і другі диференціали складної функції* f *, якщо:*

а) $F = f\left(x^2 + y^2 + z^2 \right)$, $\left(x, y, z \right) \in \mathbb{R}^3$;

б) $F = f\left(x, \dfrac{x}{y} \right)$, $\left(x, y \right) \in \mathbb{R}^2$;

в) $F = f\left(x, xy, xyz \right)$, $\left(x, y, z \right) \in \mathbb{R}^3$;

г) $F = f\left(x+y, x-y \right)$, $\left(x, y \right) \in \mathbb{R}^2$;

д) $F = f\left(x^2 + y^2, x^2 - y^2, 2xy \right)$, $\left(x, y \right) \in \mathbb{R}^2$;

е) $F = f\left(\dfrac{x}{y}, \dfrac{y}{z} \right)$, $\left(x, y, z \right) \in \mathbb{R}^3$;

є) $F = f\left(t, t^2 - t, t^3 - t^2 \right)$, $t \in \mathbb{R}$;

ж) $F = f\left(\sin t, \cos t\right), \ t \in \mathbb{R};$

з) $F = f\left(xy, x^2y^2, x^3 + y^3\right), \ \left(x, y\right) \in \mathbb{R}^2;$

и) $F = f\left(x^2 y, x^y\right), \ \left(x, y\right) \in \mathbb{R}^2.$

✍**5.** [13] *Знайти* n*-й диференціал функції* f *, якщо:*

а) $f\left(x, y, z\right) = \sin(x+y) + \cos(y+z), \ n = 4;$

б) $f\left(x, y, z\right) = e^{x+2y+3z}, \ n = 8;$

в) $f\left(x, y, z\right) = \ln(x+y) - \lg z, \ n = 5;$

г) $f\left(x, y, z\right) = (x+y+z)^{10} - (x+y)^9 - (x+z)^8 + x^6 + y^5 + z^4, \ n = 8;$ $n = 9;$ $n = 10.$

✍**6.** [13, с. 344] *Для функції* f *порівняти змішані похідні в точці* $\left(0; 0\right)$*, якщо:*

а) $f(x, y) = \begin{cases} xy\dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, & x^2 + y^2 > 0, \\ 0, & x = y = 0; \end{cases}$

б) $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{2xy}{x^2 + y^2}, & x^2 + y^2 > 0, \\ 0, & x = y = 0; \end{cases}$

в) $f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2)\dfrac{x - y}{x + y}, & x \neq -y0, \\ 0, & x = -y; \end{cases}$

г) $f(x, y) = \begin{cases} x^2 arctg\,\dfrac{y}{x} - y^2 arctg\,\dfrac{x}{y}, & xy \neq 0, \\ 0, & xy = 0. \end{cases}$

🕮 Практичне заняття №6

Тема: Диференціювання неявних функцій, заданих рівнянням $F(x; y) = 0$, $F(x; y; z) = 0$**. Дотична площина і нормаль.**

✍**1.** [2, с. 130] *Виразити з рівняння* $F(x; y) = 0$ y *як неявну функцію від* x*:*

а) $y^4 - 4x^2y^2 + \sin x = 0;$

б) $e^{x^2+y^2} - x^6 - 5 = 0;$

в) $\sin\left(x^2 + y^2\right) + 3x = 1;$

г) $x^2y^4 - 3y^3 + 6x^2y^2 - 3y + x^2 = 0$ (заміна $y^2 + 1 = t$).

✍**2.** [2, *с.130-131*], [16, *с.350*] *Дослідити на неперервність і диференційованість неявну функцію* $y = y(x)$, *задану рівнянням* $F(x;\, y) = 0$. *Знайти частинні похідні і диференціали першого і другого порядку в точці* $M_0(x_0;\, y_0)$ *або в довільній точці, якщо* M_0 *не вказана:*

а) $F(x;\, y) = x^2y^2 + x^2 + y^2 - 1,\ \ M_0(0;1);$

б) $F(x;\, y) = x^2 + xy + y^2 - 3,\ \ M_0(1;1);$

в) $F(x;\, y) = x^2y^2 - x^4 - y^4 - a^4;$

г) $F(x;\, y) = e^y + ax^2e^{-y} - 2bx;$

д) $F(x;\, y) = x^y - y^x - 1,\ \ M_0(3;\, 2);$

е) $F(x;\, y) = \sin xy - e^{xy} - x^2y;$

є) $F(x;\, y) = x^2 \ln y - y^2 \ln x;$

ж) $F(x;\, y) = xe^{2y} - y\ln x - 8;$

з) $F(x;\, y) = \ln\dfrac{\sqrt{x^2+y^2}}{2} - arctg\,\dfrac{y}{x},\ \ M_0(2;\, 2);$

и) $F(x;\, y) = 1 + xy - \ln\left(e^{xy} + e^{-xy}\right);$

і) $F(x;\, y) = \lg x \cdot 2^{y+1} \cdot 5^y - 2x^2,\ \ x = 10.$

✍**3.** [2, *с.131*], [16, *с.350-351*] *Дослідити на неперервність і диференційовність неявну функцію* $z = z(x;\, y)$, *задану рівнянням* $F(x;\, y;\, z) = 0$. *Знайти частинні похідні і диференціали першого і другого порядку в точці* $M_0(x_0;\, y_0;\, z_0)$ *або в довільній точці, якщо* M_0 *не вказана:*

а) $F(x;\, y;\, z) = z^3 + 3x^2z - 2xy;$

б) $F(x;\, y;\, z) = x^2 - 2y^2 + z^2 - 4x + 2z - 5;$

в) $F(x;\, y;\, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 14,\ \ M(1;\, 2;\, 3);$

г) $F(x;\, y;\, z) = z^3 - xyz + y^2 - 8,\ \ M(1;\, 2;\, 2);$

д) $F(x;\, y;\, z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2 + xy - 9,\ \ M(1;\, -2;\, 1);$

е) $F(x;\, y;\, z) = \cos^2 x + \cos^2 y + \cos^2 z - 1;$

є) $F(x;\, y;\, z) = x + y + z - e^{-(x+y+z)};$

ж) $F(x;\, y;\, z) = z\ln(x+z) - \dfrac{xy}{z};$

з) $F(x;\ y;\ z) = \ln(x+z) - \ln(y+z) + (x+y)^2,\ \ M\left(0;\ 0;\ e\right)$;

и) $F(x;\ y;\ z) = x\sin y + y\sin z + z\sin x,\ \ M\left(0;\ \pi;\ 2\pi\right)$;

і) $F(x;\ y;\ z) = \sin\dfrac{x}{z} - \dfrac{\sin y}{\sin z},\ \ M\left(\dfrac{\pi}{2};1;\ \dfrac{\pi}{2}\right)$.

✍**4.** [13] *Переконатись, що неявна функція* $y = y(x_1;\ x_2;...;\ x_m)$*, яка визначається з співвідношення* $F(x_1;\ x_2;...;\ x_m;\ y) = 0$*, задовольняє умові (*), якщо:*

а) $F(x_1;\ x_2;\ y) = f\left(\dfrac{x_1-a}{y-c};\ \dfrac{x_2-b}{y-c}\right),\ \ \{a,\ b,\ c\} \subset \mathbb{R}$,

$$(*):\ \ (x_1-a)\frac{\partial y}{\partial x_1} + (x_2-b)\frac{\partial y}{\partial x_2} = y - c;$$

б) $F(x_1;\ x_2;\ y) = x_1^2 + x_2^2 - x_2 f\left(\dfrac{y}{x_2}\right)$,

$$(*):\ \ (x_1^2 - x_2^2 - y^2)\frac{\partial y}{\partial x_1} + 2x_1x_2\frac{\partial y}{\partial x_2} = 2x_1y;$$

в) $F(x_1;\ x_2;\ y) = f\left(x_1 + \dfrac{y}{x_2};\ x_2 + \dfrac{y}{x_1}\right)$,

$$(*):\ \ x_1\frac{\partial y}{\partial x_1} + x_2\frac{\partial y}{\partial x_2} = y - x_1x_2;$$

г) $F(x_1;\ x_2;\ y) = x_2 - x_1 f\left(y\right) - f\left(y\right)$,

$$(*):\ \ \frac{\partial^2 y}{\partial x_1^2}\cdot\frac{\partial^2 y}{\partial x_2^2} - \left(\frac{\partial^2 y}{\partial x_1 \partial x_2}\right)^2 = 0;$$

д) $F(x_1;\ x_2;\ y) = y - x_2 f\left(\dfrac{y}{x_1}\right)$,

$$(*):\ \ x_1\frac{\partial y}{\partial x_1} + x_2\frac{\partial y}{\partial x_2} = y.$$

✍**5.** [11, *с.110-111*] *Написати рівняння дотичної площини і нормалі до поверхні в заданій точці:*

а) $z = xy,\ \ M_1\left(1;1;1\right),\ M_2\left(2;1;\ 2\right)$;

б) $z = x^2 + y^2,\ \ M\left(1;1;\ 2\right)$;

в) $z = 2x^2 - 4y^2,\ \ M\left(-2;1;\ 4\right)$;

г) $z=(x-y)^2-x+2y,\ \ M\left(1;1;1\right);$

д) $z=\sqrt{x^2+y^2}-xy,\ \ M\left(-3;\,4;17\right);$

е) $z=\ln\sqrt{x^2+y^2},\ \ M\left(0;1;\,0\right);$

є) $z=\sin\dfrac{x}{y},\ \ M\left(\pi;1;\,0\right);$

ж) $z=e^{x\cos y},\ \ M\left(1;\,0;\,e\right).$

✍**6.** [11, 2] *Написати рівняння дотичної площини і нормалі до поверхні в заданій точці:*

а) $x^3+y^3+z^3+xyz=6,\ \ M\left(1;\,2;\,-1\right);$

б) $xy^2+z^3=12,\ \ M\left(1;\,2;\,2\right);$

в) $x^n+y^n+z^n=a^n,\ \ M\left(1;1;\,0\right);$

г) $x^2y^2+2x+z^3=16,\ \ M\left(2;1;\,2\right);$

д) $\sqrt{x^2+y^2+z^2}=x+y+z-4,\ \ M\left(2;\,3;\,6\right);$

е) $e^z-z+xy=3,\ \ M\left(2;1;\,0\right);$

є) $z=y+\ln\left(\dfrac{x}{z}\right),\ \ M\left(1;1;1\right);$

ж) $2^{\frac{x}{z}}+2^{\frac{y}{z}}=8,\ \ M\left(1;1;1\right).$

✍**7.** [11] *Написати рівняння дотичної площини і нормалі до поверхні в заданій точці:*

а) $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ (еліпсоїд);

б) $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=-1$ (двохполосний гіперболоїд);

в) $\dfrac{x^2}{p}-\dfrac{y^2}{q}=2z$ (гіперболічний параболоїд);

г) $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1$ (однополосний гіперболоїд);

д) $\dfrac{x^2}{p}+\dfrac{y^2}{q}=2z$ (еліптичний параболоїд);

г) $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=0$ (конус).

8. [11] *Довести, що поверхні*

$$z = xy - x^2 + 8x - 5, \quad z = e^{x+2y+4}$$

дотикаються між собою в точці $(2; -3; 1)$ *і знайти рівняння спільної дотичної площини.*

9. *Довести, що дотичні площини до поверхні* $\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} = \sqrt{a}$, *проведені в довільній точці* $(x; y; z)$, $x > 0,\ y > 0,\ z > 0$, *відтинають на координатних осях відрізки, сума яких дорівнює* a.

10. [11] *Знайти на поверхні точки, в яких дотичні площини до неї паралельні координатним площинам:*

а) $x^2 + y^2 + z^2 - 6y + 4z = 12;$

б) $x^2 + y^2 - z^2 - 2x = 0;$

в) $x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 2xy + 2xz + 4yz = 8.$

11. [11] *Написати рівняння дотичних площин, які паралельні заданій площині:*

а) $x^2 + 2y^2 + z^2 = 4, \quad x - y + 2z = 0;$

б) $z^2 + xy + xz = 1, \quad x - y + 2z = 1;$

в) $4x^2 + 6y^2 + 4z^2 + 4xz - 8y - 4z + 3, \quad x + 2y.$

Самостійна робота №1 (зразок) (10 балів).

1. *Знайти область визначення функції* $z = e^{-\left(x^3 + y^3\right)}$ *та зобразити її на координатній площині*

2. *Знайти частинні похідні і повні диференціали функції* $z = \sin\sqrt{\dfrac{y}{x+y}}$.

3. *Обчислити значення похідної складеної функції* $u = \operatorname{arctg}(xy)$, *де* $x = t + 3,\ \ y = e^t$ *при* $t_0 = 0$ *з точністю до двох знаків після коми.*

4. *Обчислити значення частинних похідних функції* $z^2 = xy - z + x^2 - 4$, *заданої неявно, в даній точці* $M_0(2; 1; 1)$ *з точністю до двох знаків після коми.*

5. *Знайти другі частинні похідні функції* $z = \operatorname{tg}\left(xy^2\right)$. *Переконатися в тому, що* $z''_{xy} = z''_{yx}$.

🕮 Практичне заняття №7
Тема: Формула Тейлора.

✍**1.** [11, *с. 89*] *Розкласти функцію* f *за формулою Тейлора в околі точки* M *:*

I. а) $f(x;\,y) = -x^2 + 2xy + 3y^2 - 6x - 2y - 4,\ \ M(-2;1);$

б) $f(x;\,y) = 2x^2 - xy - y^2 - 6x - 3y,\ \ M(1;-2);$

в) $f(x;\,y) = x^3 - 2y^3 + 3xy,\ \ M(1;2);$

г) $f(x;\,y) = x^3 - 5x^2 - xy + y^2 + 10x + 5y,\ \ M(2;-1);$

д) $f(x;\,y) = \dfrac{xy^3}{4} - yx^3 + \dfrac{x^2y^2}{2} - 2x + 3y - 4,\ \ M(1;2);$

II. а) $f(x;\,y;\,z) = (x+y+z)^2,\ \ M(1;1;-2);$

б) $f(x;\,y;\,z) = x^2 + 3z^2 - 2yz - 3z,\ \ M(0;1;2);$

в) $f(x;\,y;\,z) = xyz,\ \ M(1;2;3);$

г) $f(x;\,y;\,z) = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz,\ \ M(1;0;1).$

✍**2.** [13, *с. 356*] *Розкласти функцію* f *за формулою Тейлора в околі точки* M *до членів* n*-го порядку. Записати залишковий член* $o\left(\rho^n\right)$ *у формі Лагранжа:*

I. $M(1;1),\ \ n=3$ *і:*

а) $f(x;\,y) = x^y$; обчислити $1{,}1^{1{,}02}$;

б) $f(x;\,y) = \cos(1-xy);$

в) $f(x;\,y) = \dfrac{x}{y};$

г) $f(x;\,y) = \operatorname{arctg}\dfrac{x}{y};$

II. $M(0;0),\ \ n=3$ *і:*

а) $f(x;\,y) = \sqrt{1-x^2-y^2};$

б) $f(x;\,y) = e^x\cos y;$

в) $f(x;\,y) = e^x\ln(1+y);$

г) $f(x;\,y) = \sin x\operatorname{ch} y;$

д) $f(x;\,y) = \ln(1+x+y);$

е) $f(x;\,y) = (1+x)^p(1+y)^q;$

є) $f(x;\,y) = \operatorname{arctg}\dfrac{x-y}{1+xy};$

ж) $f(x;\,y) = \operatorname{tg}\left(x\sin y\right);$

з) $f(x;\,y) = \dfrac{1}{1-x-y+xy};$

и) $f(x;\,y) = \ln\dfrac{1-x-y+xy}{1-x-y};$

III. $M(0;0;0),\ \ n=3$ *і:*

а) $f(x;\,y;\,z) = 2^x\ln(1+y)\sin z;$

б) $f(x;\ y;\ z) = e^{1-x}\ln(e+y)\cos z$;

в) $f(x;\ y;\ z) = \operatorname{arcctg} x - \arcsin y \cdot \operatorname{tg} z$;

г) $f(x;\ y;\ z) = \sin(x+y+z) - \sin(x+y) - \sin z$.

✍**3.** [13] *Написати розклад неявної функції* $z = z(x;\ y)$, *заданої рівнянням* $F(x;y;z) = 0$, *за степенями* $(x-a)^i(y-b)^j$ *до* n*-го степеня* $(i + j \le n)$ *в околі точки* $M(a;\ b)$, *якщо* $z(a;\ b) = c$ *і:*

а) $F(x;\ y;\ z) = z^3 - 2xz + y,\ \ a = b = c = 1,\ n = 2$;

б) $F(x;\ y;\ z) = z^5 - zx^2 + x + y + 1,\ \ a = 1,\ b = 2,\ c = 1,\ n = 2$;

в) $F(x;\ y;\ z) = z^3 - yz - xy^2 - x^3,\ \ a = b = c = 1,\ n = 2$;

г) $F(x;\ y;\ z) = z^4 - 2zx + y^2 - 3,\ \ a = 1,\ b = 2,\ c = 1,\ n = 2$.

🕮 Практичне заняття №8

Тема: Екстремум функції багатьох змінних.

✍**1.** [1, с. 223] *Знайти стаціонарні точки функцій:*

а) $z = 2x^3 + xy^2 + 5x^2 + y^2$;

б) $z = xy(a - x - y)$;

в) $z = \sin x + \sin y + \cos(x+y)$, $0 \le x \le \dfrac{\pi}{4},\ \ 0 \le y \le \dfrac{\pi}{4}$;

г) $z = (2ax - x^2)(2by - y^2)$;

д) $z = e^{2x}(x + y^2 + 2y)$;

е) $z = y\sqrt{1+x} + x\sqrt{1+y}$;

є) $u = 3\ln x + 2\ln y + 5\ln z + \ln(22 - x - y - z)$.

✍**2.** [2],[11], [13] *Дослідити на екстремум функцію двох змінних:*

I. а) $z = x^2 + xy + y^2 - 12x - 3y$; б) $z = 3 + 2x - y - x^2 + xy - y^2$;

в) $z = 2xy - 3x^2 - 2y^2 + 10$; г) $z = 4(x-y) - x^2 - y^2$;

II. а) $z = 3(x^2 + y^2) - x^3 + 4y$; б) $z = x^2 y(4 - y)$;

в) $z = 3x^2 y + y^3 - 12x - 15y + 3$; г) $z = y^3 - x^2 - 27y + 3x + 16$;

III. а) $z = x^4 + y^4 - 2x^2$; б) $z = (x^2 - 4y^2 + 2x)^2$;

в) $z = 2x^4 + y^4 - x^2 - 2y^2$; г) $z = xy^4(1 + x - y)$;

д) $z = x^2 y^3(6 - x - y)$; е) $z = x^4 + y^4 + 2x^2y^2 - 8x + 8y$;

є) $z = xy^2(12 - x - y),\ x > 0,\ y > 0$;

ж) $z = x^2y^2 - 2xy^2 - 6x^2y + 12xy$;

IV. а) $z = 3x^2 - 2x\sqrt{y} + y - 8x$; б) $z = \sqrt{(a-x)(a-y)(x+y-a)}$;

в) $z = y\sqrt{1+x} + x\sqrt{1+y}$; г) $z = 1 + x^2 + \sqrt[3]{(y+2)^2}$;

V. а) $z = xy\ln(x^2+y^2)$; б) $z = e^{2x+3y}(8x^2-6xy+3y^2)$;

в) $z = xy\ln(x^2+y^2)$; г) $z = (5-2x+y)e^{x^2-y}$;

д) $z = (x^2+y^2)e^{-(x^2+y^2)}$; е) $z = (5x+7y-25)e^{-(x^2+xy+y^2)}$;

VI. а) $z = \sin x + \cos y + \cos(x-y),\ \ 0<x<\dfrac{\pi}{2},\, 0<y<\dfrac{\pi}{2}$;

б) $z = \sin x \sin y \sin(x+y),\ \ 0<x<\pi,\, 0<y<\pi$;

в) $z = x+y+4\sin x \sin y$;

г) $z = (1+e^y)\cos x - ye^y$.

✍**3.** [11], [13] *Дослідити на екстремум функцію трьох змінних:*

а) $u = x^2+y^2+(z+1)^2-xy+x$; б) $u=(x-2y+3)^2+(2x-z)^2$;

в) $u = xy^2z^3(1-x-y-z)$; г) $u = xyz(16-x-y-2z)$;

д) $u = x^4+y^4+z^4-8(x^2+y^2+z^2)$;

е) $u = \dfrac{x}{y+z}+\dfrac{y}{x+z}+\dfrac{z}{x+y}\ \ \left(x>0,\ y>0,\ z>0\right)$;

є) $u = 3\ln x + 2\ln y + 5\ln z + \ln(22-x-y-z)$;

ж) $u = \dfrac{2x^2}{y}+\dfrac{y^2}{z}-4x+2z^2$.

✍**4.** [2] *Дослідити на екстремум функцію* $z = z(x;\,y)$*, задану неявно рівнянням* $F(x;\,y;\,z)=0$*, якщо:*

а) $F(x;\,y;\,z) = \dfrac{x^3}{3}+2y^2-z^2x+z$;

б) $F(x;\,y;\,z) = x^2+y^2+4xz+4+\dfrac{z^2+z}{2}$;

в) $F(x;\,y;\,z) = z^2+xyz-xy^2-x^3$;

г) $F(x;\,y;\,z) = x^2+y^2+z^2-2x+2y-4z-10$.

🕮 Практичне заняття №9
Найбільше і найменше значення функції багатьох змінних.

✍**5.** [2], [11], [13] *Знайти найбільше і найменше значення функції на заданій множині:*

I. а) $z = x-2y-3,\ \ 0\le x\le 1,\, 0\le y\le 1,\, 0\le x+y\le 1$;

б) $z = x^2+2xy-4x+8y,\ \ 0\le x\le 1,\, 0\le y\le 2$;

в) $z = x^3+y^3-3xy,\ \ 0\le x\le 2,\, |y|\le 1$;

г) $z=x^2y(4-x-y),\ \ x\ge 0,\ y\ge 0,\ 0\le x+y\le 6;$

д) $z=e^{-x^2-y^2}(2x^2+3y^2),\ \ x^2+y^2\le 4;$

е) $z=x^2+y^2,\ \ \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}\le 1\left(0<b<a\right);$

є) $z=x^2-y^2,\ \ x^2+y^2\le 2x;$

ж) $z=x^2y,\ \ x^2+y^2\le 1;$

II. а) $u=x+2y+3z,\ \ x+y\le 3,\ x+y\le z,\ 3x+3y\ge z,\ x\ge 0,\ y\ge 0;$

б) $u=x+y+z,\ \ x^2+y^2\le z\le 1;$

в) $u=x^2+2y^2+3z^2,\ \ x^2+y^2+z^2\le 100;$

г) $z=(x-y^2)\sqrt[3]{(x-1)^2},\ \ \ y^2\le x\le 2.$

✍**6.** *В кулю радіуса* R *вписати прямокутний паралелепіпед найбільшого об'єму.*

✍**7.** *З усіх трикутників з однаковою основою і тим же кутом при вершині знайти найбільший за площею.*

✍**8.** *Визначити розміри відкритого прямокутного акваріуму з заданою товщиною стінок* d *і об'ємом* V*, на виготовлення якого потрібно найменша кількість матеріалу.*

✍**9.** *У півсферу радіуса* R *вписати прямокутний паралелепіпед так, щоб його об'єм був найбільшим.*

✍**10.** *З усіх вписаних у коло радіуса* R *трикутників знайти той, що має найбільшу площу.*

Тема: Екстремум функції багатьох змінних.

✍**1.** [2, *с.130*] *З системи виразити змінні* u *і* v *як функції від змінних* x *і* y*:*

а) $\begin{cases} u+v=x, \\ u^3+v^3=y\left(u^2+v^2\right); \end{cases}$ б) $\begin{cases} u^3+v^3=x\left(u+v\right)^2, \\ u^2+v^2=u+v+y. \end{cases}$

✍**2.** [13] *Знайти якобіан* $\dfrac{D\left(f_1,\ f_2,\dots,\ f_m\right)}{D\left(t_1,t_2,\dots,t_m\right)}$ *відображення* $f:\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}$*, якщо:*

а) $x=f_1\left(r;\varphi\right)=r\cos\varphi,\ \ y=f_2\left(r;\varphi\right)=r\sin\varphi,\ \ t_1=r,\ t_2=\varphi;$

б) $x=f_1\left(r;\varphi\right)=ar\cos^{\alpha}\varphi,\ \ y=f_2\left(r;\varphi\right)=br\sin^{\alpha}\varphi,\ \ t_1=r,\ t_2=\varphi;$

в) $x=f_1(r;\varphi;\theta)=r\cos\varphi\sin\theta,\ \ y=f_2(r;\varphi;\theta)=r\sin\varphi\sin\theta,$
$z=f_3(r;\varphi;\theta)=r\cos\theta,\ \ t_1=r, t_2=\varphi, t_3=\theta;$
г) $x=f_1(r;\varphi;\theta)=ar\cos^{\alpha}\varphi\sin^{\beta}\theta,\ \ y=f_2(r;\varphi;\theta)=br\sin^{\alpha}\varphi\sin^{\beta}\theta,$
$z=f_3(r;\varphi;\theta)=cr\cos^{\beta}\theta,\ \ t_1=r, t_2=\varphi, t_3=\theta;$
д) $x=f_1(t_1;t_2;t_3)=\dfrac{t_1}{\sqrt{1-r^2}},\ \ y=f_2(t_1;t_2;t_3)=\dfrac{t_2}{\sqrt{1-r^2}},$
$z=f_3(t_1;t_2;t_3)=\dfrac{t_3}{\sqrt{1-r^2}},\ \ r=\sqrt{t_1^2+t_2^2+t_3^2}.$

✍**3.** [13, с.351] *Для неявної вектор-функції* $y:\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}$, *яка визначається системою рівнянь*

$$\begin{cases} F_1(x_1,...,x_m,y_1,...,y_n)=0,\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ F_n(x_1,...,x_m,y_1,...,y_n)=0, \end{cases}$$

знайти диференціал до k*-го порядку в точці* $M_0\left(x_1^0,...,x_m^0,y_1^0,...,y_n^0\right)$ *(або в довільній точці), якщо:*

а) $F_1(x,y_1,y_2)=x+y_1+y_2,\ \ F_2(x,y_1,y_2)=x^2+y_1^2+y_2^2,\ \ k=2;$

б) $F_1(x,y_1,y_2)=y_1^2+y_2^2-\dfrac{x^2}{2},\ \ F_2(x,y_1,y_2)=x+y_1+y_2-2,$
$k=2,\ M_0(2;1;-1);$

в) $F_1(x_1,x_2,y_1,y_2)=x_1y_1-x_2y_2,\ \ F_2(x_1,x_2,y_1,y_2)=x_2y_1+x_1y_2,\ \ k=1;$

г) $F_1(x_1,x_2,y_1,y_2)=e^{\frac{y_1}{x_1}}\cos\dfrac{y_2}{x_2}-\dfrac{x_1}{\sqrt{2}},\ \ F_2(x_1,x_2,y_1,y_2)=$
$=e^{\frac{y_1}{x_1}}\sin\dfrac{y_2}{x_2}-\dfrac{x_2}{\sqrt{2}},\ \ k=2,\ \ M_0\left(1;1;0;\dfrac{\pi}{4}\right).$

д) $F_1(x_1,x_2,y_1,y_2)=y_1+y_2-x_1-x_2,\ \ F_2(x_1,x_2,y_1,y_2)=x_2\sin y_1-$
$-x_1\sin y_2,\ \ k=2.$

✍**4.** [13, *с.352*] *Для неявної вектор-функції* $y:\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^n$, *яка визначається системою рівнянь*

$$\begin{cases} F_1(x_1,...,x_m,y_1,...,y_n,t_1,...,t_l)=0,\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ F_{n+l}(x_1,...,x_m,y_1,...,y_n,t_1,...,t_l)=0, \end{cases}$$

$t_j,\ j=\overline{1,l}$ *– параметри, знайти диференціали до* k*-го порядку при заданих довільних параметрах* $t_j=t_j^0,\ j=\overline{1,l}$ *(або при довільних значеннях* t_j *з області визначення), якщо:*

а) $F_1(x,y_1,y_2,t)=x-t-\dfrac{1}{t},\ \ F_2(x,y_1,y_2,t)=y_1-t^2-\dfrac{1}{t^2},$

$F_3(x,y_1,y_2,t)=y_2-t^3-\dfrac{1}{t^3},\ \ k=2;$

б) $F_1(x_1,x_2,y,t_1,t_2)=x_1-t_1-t_2,\ \ F_2(x_1,x_2,y,t_1,t_2)=x_2-t_1^2-t_2^2,$
$F_3(x_1,x_2,y,t_1,t_2)=y-t_1^3-t_2^3,\ \ k=1;$

в) $F_1(x_1,x_2,y,t)=y-\dfrac{x_1+t}{x_2+t},\ \ F_2(x_1,x_2,y,t)=te^t-(x_1e^{x_1}+x_2e^{x_2}),$
$k=1;$

г) $F_1(x_1,x_2,x_3,y,t_1,t_2)=x_1-f(y,t_1,t_2),\ \ F_2(x_1,x_2,x_3,y,t_1,t_2)=$
$=x_2-g(y,t_1,t_2),\ \ F_3(x_1,x_2,x_3,y,t_1,t_2)=x_3-h(y,t_1,t_2),\ \ k=1;$

д) $F_1(x_1,x_2,y,t_1,t_2)=x_1-\sqrt{3}(\sin t_1+\cos t_2),\ \ F_2(x_1,x_2,y,t_1,t_2)=$
$=x_2-\sqrt{3}(\cos t_1-\sin t_2),\ \ F_3(x_1,x_2,y,t_1,t_2)=y-1-\sin(t_1-t_2),\ \ k=1.$

🕮 Практичне заняття №10

Тема: Умовний екстремум.

✍**1.** [2, *с. 152*], [11, *с. 102-103*], [11, *с. 362-363*] *Дослідити задані функції на умовний екстремум при вказаних умовах зв’язку:*

а) $z=xy,\ \ x+y-1=0;$

б) $z=x^2+y^2,\ \ 3x+2y-6=0;$

в) $z=\cos^2 x+\cos^2 y,\ \ x-y-\dfrac{\pi}{4}=0;$

г) $z=x^2-y^2,\ \ \dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{3}-1=0;$

д) $z=5-3x-4y,\ \ x^2+y^2=25;$

е) $z=x^2+xy+y^2,\ \ x^2+y^2=1.$

✍**2.** *Дослідити задані функції на умовний екстремум при вказаних умовах зв’язку:*

а) $u=2x^2+3y^2+4z^2,\ \ x+y+z=13;$

б) $u = x^m y^n z^p \ (m > 0, n > 0\ p > 0), \ \ x + y + z = 1;$

в) $u = \sin x \sin y \sin z, \ \ x + y + z = \dfrac{\pi}{2}, \ \ x > 0, \ y > 0, \ z > 0;$

г) $u = \cos x \cos y \cos z, \ \ x + y + z = \pi;$

д) $u = x + y + z, \ \ \dfrac{a}{x} + \dfrac{b}{y} + \dfrac{c}{z} = 1, \ \ x > 0, \ y > 0, \ z > 0;$

е) $u = xy^2 z^3, \ \ x + 2y + 3z = 6.$

✍**3.** *Дослідити задані функції на умовний екстремум при вказаних умовах зв'язку:*

а) $u = xyz, \ \ x + y - z = 3, \ \ x - y - z = 8;$

б) $u = xy + yz, \ \ x^2 + y^2 = 2, \ \ y + z = 2, \ \ y > 0;$

в) $u = x^2 + y^2 + z^2, \ \ \dfrac{x^2}{4} + y^2 + z^2 = 1, \ \ x + y + z = 0;$

г) $u = \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2}, \ \ x^2 + y^2 + z^2 = 1, \ \ lx + my + nz = 0;$

д) $u = x + y + z^2, \ \ z = x + 1, \ \ y - xz = 1;$

е) $u = (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2, \ \ x^2 + y^2 + z^2 = 21, \ \ 3x + 2y + z = 0.$

Тема: Функції n-змінних, їх диференційовність.

✍**1.** [13] *Дослідити на екстремум функцію* $y = y(x_1; x_2; ...; x_m)$*:*

а) $y = x_1 \cdot x_2^2 \cdot ... \cdot x_m^m \left(1 - \sum_{k=1}^{m} k x_k\right), \ \ x_k > 0, \ \ k = \overline{1, m};$

б) $y = x_1 + \sum_{k=1}^{m-1} \dfrac{x_{k+1}}{x_k} + \dfrac{2}{x_m}, \ \ x_k > 0, \ \ k = \overline{1, m};$

в) $y = e^{-\sum_{k=1}^{m} x_k^2} \cdot \sum_{k=1}^{m} x_k, \ \ x_k \geq 0, \ \ k = \overline{1, m}.$

✍**2.** [13] *Дослідити задані функції на умовний екстремум при вказаних умовах зв'язку:*

а) $y = \sum_{k=1}^{m} x_k^p, \ \ p > 1, \ \ \sum_{k=1}^{m} x_k = 1;$

б) $y = \sum_{k=1}^{m} \dfrac{a_k}{x_k}, \ \ \sum_{k=1}^{m} b_k x_k = 1, \ \ x_k > 0, \ \ a_k > 0, \ \ b_k > 0, \ \ k = \overline{1, m};$

в) $y=\sum_{i,\ j=1}^{m} a_{ij}x_i x_j,\ \ \sum_{k=1}^{m} x_k^2=1,\ \ a_{ij}=a_{ji},\ \ i,\ j=\overline{1,\ m}.$

⌛Контрольна робота №1 (зразок) (15 балів)

✍**1.** *Знайти рівняння дотичної площини та нормалі до поверхні* $S: z=2x^2-3y^2+4x-2y+10$ *в точці* $M_0(-1;1;3)$.

✍**2.** *Перевірити, чи задовольняє вказаному рівнянню дана функція* $\frac{1}{x}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{y}\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{u}{y^2},\ \ u=\frac{y}{\left(x^2-y^2\right)^5}$.

✍**3.** *Дослідити на екстремум функцію* $z=x^3+y^3-3xy$.

✍**4.** *Знайти найбільше і найменше значення функції* $z=4-2x^2-y^2$, *в області* $\overline{D}: y=0,\ y=\sqrt{1-x^2}$.

✍**5.** *Сумарний прибуток підприємства залежить від витрат двох видів ресурсів* x *та* y *і виражається функцією* $z=2xy-3x^2-2y^2+100x-400$. *Кількість ресурсів обмежена квотою* $\varphi(x,\ y)=0$, *або* $x+y=600$. *Визначити витрати ресурсів* x *та* y, *що забезпечують максимальний прибуток підприємства та знайти його.*

✍**6.** *Обчислити наближено* $\operatorname{arctg}\frac{0{,}98}{1{,}01}$.

МОДУЛЬ 2.
Інтегральне числення функцій багатьох змінних.
🕮 Практичне заняття №11.

Тема: Повторні інтеграли. Обчислення подвійного інтегралу у випадку прямокутної і довільної області.

✍**1. [2,** ***с. 161*****]** *Скласти інтегральну суму для подвійного інтеграла при заданих умовах:*

а) $\iint\limits_{(P)} xydxdy,\ \ (P)=\left\{(x;\ y)\,|\,0\le x\le 1,\ 0\le y\le 1\right\};$

область інтегрування розбити на квадрати прямими $x=\frac{i}{n},\ y=\frac{j}{n}$, $i,\ j=\overline{1,\ n-1}$ і за точки M_k взяти праві вершини цих квадратів;

б) $\iint\limits_{(P)} x^2y^3dxdy,\ \ (P)=\{(x;\ y)\,|\,0\le x\le 1,\ 0\le y\le 1\};$

область інтегрування розбити прямими $x=\dfrac{1}{2},\ y=\dfrac{1}{2}$ на чотири прямокутники, за точки M_k вибрати центри цих прямокутників.

✍**2. [7]** *Скласти суми Дарбу та знайти їхні границі для даної функції f та вказаного розбиття прямокутника (P):*

а) $f(x;\ y)=xy,\ \ (P)=\{(x;\ y)\,|\,1\le x\le 2,\ 1\le y\le 3\},$

$$(T)=\left\{(x;\ y)\,|\,x=1+\frac{i}{n},\ y=1+\frac{2j}{n},\ i,j=\overline{1,\,n-1}\right\};$$

б) $f(x;\ y)=x^2+y^2,\ \ (P)=\{(x;\ y)\,|\,1\le x\le 2,\ 1\le y\le 3\},$

$$(T)=\left\{(x;\ y)\,|\,x=1+\frac{i}{n},\ y=1+\frac{2j}{n},\ i,j=\overline{1,\,n-1}\right\}.$$

✍**3. [1, *с. 238*]** *Оцінити інтеграли:*

а) $\iint\limits_{(P)} (x+y+10)dxdy,\ \ (P)=\{(x;\ y)\,|\,x^2+y^2\le 4\};$

б) $\iint\limits_{(P)} (x^2+4y^2+9)dxdy,\ \ (P)=\{(x;\ y)\,|\,x^2+y^2\le 4\};$

в) $\iint\limits_{(P)} (x+y+1)dxdy,\ \ (P)=\{(x;\ y)\,|\,0\le x\le 1,\ 0\le y\le 2\};$

г) $\iint\limits_{(P)} (x+xy-x^2-y^2)dxdy,\ \ (P)=\{(x;\ y)\,|\,0\le x\le 1,\ 0\le y\le 2\};$

д) $\iint\limits_{(P)} (x+1)^y\,dxdy,\ \ (P)=\{(x;\ y)\,|\,0\le x\le 2,\ 0\le y\le 2\};$

е) $\iint\limits_{(P)} (x^2+y^2-4x-4y+10)dxdy,$

$(P)=\{(x;\ y)\,|\,x^2+4y^2-2x-16y+13\le 0\}.$

✍**4. [2, *с.162*], [11, *с.171-173*]** *Записати подвійні інтеграли* $\iint\limits_{(P)} f(x;\ y)dxdy$ *у вигляді повторних інтегралів з різними порядками інтегрування. Зобразити область інтегрування, якщо вона обмежена лініями:*

I. а) $y=0,\ \ y=x,\ \ x=5;$

б) $x=2a,\ \ y=2a,\ \ x+y=a;$

в) $y=2,\ \ 3y=2x,\ \ 3y=24-3x;$

г) $y=2kx+y=2a,\ k>0;$

д) (P) – трикутник з вершинами в точках $(-1;-1)$, $(1;3)$, $(2;-4)$;

II. а) (P) – паралелограм з вершинами в точках $(-3;1)$, $(2;1)$, $(2;4)$, $(6;4)$;

б) $x=0,\ \ y=0,\ \ x+y=0,\ \ x+y=2a$;

в) $y=0,\ \ y=a,\ \ x+y=0,\ \ x+y=2a$;

г) $2y=x,\ \ 2y=x+6,\ \ y=2x,\ \ y=2x-3$;

III. а) $y=x^2,\ \ y=4-x^2$;

б) $y=x^2,\ \ x+y=2$;

в) $x=0,\ \ x=-\sqrt{y},\ \ x=-\sqrt{2-y}$;

г) $x=\sqrt{4-y^2},\ \ x=\sqrt{4y-y^2},\ \ y=2$;

д) $x^2+y^2=r^2$;

е) $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$;

є) $x=0,\ \ x=\sin y,\ \ x=\cos y,\ \ 0\le y\le\dfrac{\pi}{2}$.

✍**5. [2, *с.162*], [11, *с.173*]** *Змінити порядок інтегрування і нарисувати область інтегрування:*

а) $\int\limits_0^1 dy\int\limits_0^y f(x;\,y)dx$;

б) $\int\limits_0^a dx\int\limits_0^x f(x;\,y)dy,\ \ a>0$;

в) $\int\limits_0^1 dy\int\limits_0^{y^2+y} f(x;\,y)dx$;

г) $\int\limits_0^4 dx\int\limits_{\frac{x}{2}}^{\sqrt{x}} f(x;\,y)dy$;

д) $\int\limits_0^2 dx\int\limits_{2x}^{6-x} f(x;\,y)dy$;

е) $\int\limits_{-1}^2 dx\int\limits_{2x}^{\frac{7x+10}{6}} f(x;\,y)dy$;

є) $\int\limits_{-\pi}^{\pi} dx\int\limits_{-1}^{\cos x} f(x;\,y)dy$;

ж) $\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} dx\int\limits_{\cos x}^{\sin x} f(x;\,y)dy$;

з) $\int\limits_{-1}^2 dx\int\limits_{x^2-1}^{3+2x-x^2} f(x;\,y)dy$;

и) $\int\limits_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} dy\int\limits_{\sqrt{12-y^2}}^{2+\sqrt{4-y^2}} f(x;\,y)dx$;

і) $\int\limits_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} dy\int\limits_y^{\sqrt{1-y^2}} f(x;\,y)dx+\int\limits_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^0 dy\int\limits_{-y}^{\sqrt{1-y^2}} f(x;\,y)dx$;

к) $\int\limits_0^2 dx \int\limits_0^{x^3} f(x;\, y)dy + \int\limits_2^4 dx \int\limits_0^{10-x} f(x;\, y)dy + \int\limits_4^7 dx \int\limits_{x-4}^{10-x} f(x;\, y)dy.$

✍**6. [1, *с.239*]** *Обчислити подвійний інтеграл, взятий по прямокутній області інтегрування:*

а) $\iint\limits_{(P)} xydxdy,\ (P)=\{(x;\, y)\,|0\le x\le 1,\, 0\le y\le 2\};$

б) $\iint\limits_{(P)} e^{x+y}dxdy,\ (P)=\{(x;\, y)\,|0\le x\le 1,\, 0\le y\le 1\};$

в) $\iint\limits_{(P)} \frac{x^2}{1+y^2}dxdy,\ (P)=\{(x;\, y)\,|0\le x\le 1,\, 0\le y\le 1\};$

г) $\iint\limits_{(P)} \frac{dxdy}{(x+y+1)^2},\ (P)=\{(x;\, y)\,|0\le x\le 1,\, 0\le y\le 1\};$

д) $\iint\limits_{(P)} \frac{ydxdy}{(1+x^2+y^2)^{\frac{5}{2}}},\ (P)=\{(x;\, y)\,|0\le x\le 1,\, 0\le y\le 1\};$

е) $\iint\limits_{(P)} x\sin(x+y)dxdy,\ (P)=\left\{(x;\, y)\,|0\le x\le \pi,\, 0\le y\le \frac{\pi}{2}\right\};$

є) $\iint\limits_{(P)} x^2ye^{xy}dxdy,\ (P)=\{(x;\, y)\,|0\le x\le 1,\, 0\le y\le 2\};$

ж) $\iint\limits_{(P)} x^2y\cos(xy^2)dxdy,\ (P)=\left\{(x;\, y)\,|0\le x\le \frac{\pi}{2},\, 0\le y\le 2\right\}.$

✍**7. [1, *с. 242*], [11, *с.175-176*], [2, *с.164*]** *Обчислити подвійний інтеграл, якщо область інтегрування довільна:*

I. а) $\iint\limits_{(P)} xydxdy,\ (P): y=0,\ \ y=x,\ \ x+y=2;$

б) $\iint\limits_{(P)} (x^2+y^2)dxdy,\ (P): y=x,\ \ y=x+a,\ \ y=a,\ \ y=3a;$

в) $\iint\limits_{(P)} (x+2y)dxdy,\ (P): y=x,\ \ y=2x,\ \ x=2,\ x=3;$

г) $\iint\limits_{(P)} \cos(x+y)dxdy,\ (P): x=0,\ \ y=\pi,\ \ y=x;$

д) $\iint\limits_{(P)} \sin\pi(x-y)dxdy,\ (P)$ – трикутник з вершинами

$(-4;1)$, $\left(-1;-\dfrac{1}{2}\right)$, $\left(\dfrac{7}{2};\dfrac{17}{2}\right)$;

е) $\iint\limits_{(P)}\sqrt{y^2-x^2}\,dxdy$, $(P): y=1,\ \ y=x,\ \ y=-x$;

II. а) $\iint\limits_{(P)}(x^2+y)dxdy$, $(P): y=x^2,\ \ y^2=x$;

б) $\iint\limits_{(P)}\dfrac{x^2}{y^2}dxdy$, $(P): x=2,\ \ y=x,\ \ xy=1$;

в) $\iint\limits_{(P)}xy^2dxdy$, $(P)=\{(x;y)\,|\,x^2+y^2\le a^2,\ x\ge 0\}$;

г) $\iint\limits_{(P)}(x^3+y^3)dxdy$, $(P)=\{(x;y)\,|\,x^2+y^2\le R^2,\ y\ge 0\}$;

д) $\iint\limits_{(P)}xydxdy$, $(P)=\{(x;y)\,|\,x^2+y^2\le 25,\ 3x+y\ge 5\}$;

е) $\iint\limits_{(P)}xdxdy$, $(P)=\{(x;y)\,|\,x^2+y^2\le 2,\ x^2-y^2\le 1,\ x\ge 0,\ y\ge 0\}$;

є) $\iint\limits_{(P)}(2y-x)dxdy$, $(P)=\{(x;y)\,|\,y(y-x)\le 2,\ x(x+y)\le 3\}$;

ж) $\int\limits_0^1\int\limits_y^1 e^{x^2}dxdy$; з) $\int\limits_0^1\int\limits_{\sqrt{y}}^1\sin(x^3-1)dxdy$; и) $\int\limits_0^1\int\limits_{\frac{x-1}{2}}^0 tg(y^2+y)dxdy$.

🕮 Практичне заняття № 12

Тема: Заміна змінних у подвійному інтегралі. Полярна система координат

✍**1. [2, *с.170-171*], [1, *с.243*], [11, *с.178-179*]** *Перейти в* $\iint\limits_{(P)}f(x;y)dxdy$ *до полярних координат і розставити межі інтегрування, якщо:*

а) $(P)=\{(x;y)\,|\,x^2+y^2\le ax\}$;

б) $(P)=\{(x;y)\,|\,a^2\le x^2+y^2\le b^2\}$, $0<a<b$;

в) $(P)=\{(x;y)\,|\,x^2+y^2\le ax,\ x^2+y^2\le by\}$;

г) $(P)=\{(x;y)\,|\,(x^2+y^2)^2\le a^2(x^2-y^2),\ x\ge 0\}$;

д) $(P)=\{(x;y)\,|\,a^2\le x^2+y^2\le 2ay\}$;

е) $(P)=\left\{(x;\, y)\,|\,2ay\le x^2+y^2\le 4ay,\ y\ge |x|\right\}$;

є) $(P)=\left\{(x;\, y)\,|\,0\le y\le 1,\ y-2\le x\le -\sqrt{y}\right\}$;

ж) $(P)=\left\{(x;\, y)\,|\,x+y\ge 0,\ y-x\ge 0,\ y\le 1\right\}$;

з) $\int\limits_0^2 dx\int\limits_0^x f\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)dy$;

и) $\int\limits_0^R dx\int\limits_0^{\sqrt{R^2-x^2}} f(x;\, y)\,dy$;

і) $\int\limits_0^{\frac{R}{\sqrt{1+R^2}}} dx\int\limits_0^{Rx} f\left(\frac{y}{x}\right)dy+\int\limits_{\frac{R}{\sqrt{1+R^2}}}^{2} dx\int\limits_0^{\sqrt{R^2-x^2}} f\left(\frac{y}{x}\right)dy.$

✍**2. [2, *с.170-171*], [11, *с.183*]** *Виконати вказану заміну змінних і розставити межі:*

а) $\int\limits_a^b dx\int\limits_{\alpha x}^{\beta x} f(x;\, y)\,dy,\ \ (0<a<b,\ 0<\alpha<\beta);\ \ u=x,\ v=\dfrac{y}{x}$;

б) $\int\limits_0^1 dx\int\limits_0^1 f(x;\, y)\,dy;\ \ u=x+y,\ v=x-y$;

в) $\iint\limits_{(P)} f(x;\, y)\,dxdy,\ \ (P):\left(x^2+\dfrac{1}{3}y^2\right)^2=x^2y;\ \ x=\rho\cos\varphi,\ y=\sqrt{3}\rho\sin\varphi$;

г) $\iint\limits_{(P)} dxdy,\ \ (P):\ y=ax^2,\ y=bx^2,\ xy=p,\ xy=q\ \left(0<a<b,\ 0<p<q\right)$;

$u=\dfrac{y}{x^2},\ v=xy$;

д) $\iint\limits_{(P)} f(x;\, y)\,dxdy,\ \ (P):\ x=0,\ y=0,\ \sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{a}\ \ (a>0)$;

$x=u\cos^4 v,\ y=u\sin^4 v$;

е) $\iint\limits_{(P)} f(x;\, y)\,dxdy,\ \ (P):\ \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1;\ \ x=ar\cos\varphi,\ y=br\sin\varphi.$

✍**3. [2, *с.171*], [11, *с.183*], [7, *с.170*]** *Обчислити інтеграл, перейшовши до полярних координат:*

а) $\iint\limits_{(P)} \sqrt{R^2-x^2-y^2}\,dxdy,\ \ (P)=\left\{(x;\, y)\,|\,x^2+y^2\le Rx\right\}$;

б) $\iint\limits_{(P)}(x^2+y^2)dxdy,\ (P)=\{(x;\ y)\,|\ x^2+(y+2)^2\le 4\};$

в) $\iint\limits_{(P)}\cos\left(\pi\sqrt{x^2+y^2}\right)dxdy,\ (P)=\{(x;\ y)\,|\ x^2+y^2\le 1\};$

г) $\iint\limits_{(P)}\ln(x^2+y^2)dxdy,\ (P)=\{(x;\ y)\,|\ e^2\le x^2+y^2\le e^4\};$

д) $\iint\limits_{(P)}\frac{\sin\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy,\ (P)=\left\{(x;\ y)\,|\ \frac{\pi^2}{9}\le x^2+y^2\le \pi^2\right\};$

е) $\iint\limits_{(P)}\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy,\ (P)=\{(x;\ y)\,|\ x^2+y^2\le 1,\ x^2+y^2\le 2y\};$

є) $\iint\limits_{(P)}\frac{dxdy}{(x^2+y^2)^2},\ (P): x^2-y^2=6,\ x=3;$

ж) $\iint\limits_{(P)}\sqrt{x^2+y^2}dxdy,\ (P)=\left\{(x;\ y)\,|\ ax\le x^2+y^2\le a(x+\sqrt{x^2+y^2})\right\}.$

✍**4. [2, *с.172*], [11, *с.183*], [7, *с.171*]** *Обчислити інтеграл, перейшовши до полярних координат:*

а) $\iint\limits_{(P)}dxdy,\ (P)=\{(x;\ y)\,|\ 0\le x\le 1,\ x\le y\le 2x\};\ x=u(1-v),\ y=uv;$

б) $\iint\limits_{(P)}xydxdy,\ (P): xy=1,\ x+y=\frac{5}{2};\ x+y=u,\ xy=v;$

в) $\iint\limits_{(P)}(2x-y)dxdy,\ (P)=$

$=\{(x;\ y)\,|x+y\ge 1, x+y\le 2, 2x-y\ge 1, 2x-y\le 3\};\ x+y=u,\ 2x-y=v;$

г) $\iint\limits_{(P)}e^{k(x+y)^2}dxdy,\ (P)=\{(x;\ y)\,|\ x\ge 0,\ y\ge 0,\ x+y\le 1\};$

$x=u-uv,\ y=uv;$

д) $\iint\limits_{(P)}(x^2-y^2)\sin\pi(x-y)^2dxdy,\ (P)=\{(x;\ y)\,|\,|y|\le x\le 1-|y|\};$

е) $\iint\limits_{(P)}e^{\frac{x^4}{y^2}}dxdy,\ (P): y=x,\ y=2x,\ y=x^2;$

є) $\iint\limits_{(P)} (x^4 - y^4)dxdy,\ (P) = \left\{(x;\, y) \mid x > 0, 1 \le xy \le 2, 1 \le x^2 - y^2 \le 2\right\};$

ж) $\iint\limits_{(P)} xdxdy,\ (P) = \left\{(x;\, y) \mid x > 0,\ y > 0,\ \left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{2}{3}} < 1\right\}.$

🕮 Практичне заняття № 13

Тема: Застосування подвійних інтегралів.

✍**1. [11, *с.215*], [2, *с.175*], [7, *с.176-177*]** *Знайти площу фігури, обмеженої кривими:*

а) $xy = 4,\ \ x + y - 5 = 0;$

б) $x^2 + y^2 = 4,\ y^2 = 4 - 4x,\ x < 1;$

в) $4y = x^2 - 4x,\ \ x = y + 3;$

г) $y^2 = 10x + 25,\ \ y^2 = 9 - 6x;$

д) $y^2 = 2x,\ \ y^2 = 4x - x^2,\ \ 2x < y^2;$

е) $x^2 + y^2 = 2ax,\ \ x^2 + y^2 = 2bx,\ \ y = x,\ \ y = 0,\ \ b > a > 0;$

є) $\left(x^2 + y^2\right)^2 = 2a^2\left(x^2 - y^2\right);$

ж) $\left(x^2 + 2y^2\right)^3 = xy^4;$

з) $\left(\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9}\right)^2 = x^2 y;$

и) $xy = a^2,\ \ xy = b^2,\ \ x^2 = py,\ \ x^2 = qy,\ \ 0 < a < b, 0 < p < q;$

і) $x^2 = ay,\ \ x^2 = by,\ \ x^3 = py^2,\ \ x^3 = qy^2,\ \ 0 < a < b, 0 < p < q;$

ї) $\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right)^2 = \frac{y^2}{c^2};$

к) $(x + y)^4 = a^2(x^2 + y^2),\ \ x = 0,\ y = 0\ \left(x > 0,\ y > 0\right).$

✍**2. [1, *с.246-247*], [2, *с.180-181*], [11, *с.217*]** *Знайти об'єм тіла, обмеженого поверхнями:*

а) $x = 0,\ \ y = 0,\ \ z = 0,\ \ x = 4,\ \ y = 4,\ \ z = x^2 + y^2 + 1$

(параболоїд обертання);

б) $x = 0,\ \ y = 0,\ \ z = 0,\ \ x = a,\ \ y = b,\ \ z = \frac{x^2}{2p} + \frac{y^2}{2q}$

(еліптичний параболоїд);

в) $x=0,\ \ y=0,\ \ z=0,\ \ \frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$ (піраміда);

г) $x+y+z=a,\ \ 4x+y=a,\ \ 4x+3y=3a,\ \ y=0,\ \ z=0,\ \ a>0;$

д) $x=0,\ \ y=0,\ \ z=0,\ \ x+y=1,\ \ z=x^2+y^2;$

е) $y=\sqrt{x},\ y=2\sqrt{x},\ z=0,\ x+z=6;$

є) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,\ y=0,\ z=\frac{x}{2},\ z=x;$

ж) $z=x^2+y^2,\ y=x^2,\ y=1,\ z=0;$

з) $x=\pm1,\ \ y=\pm1,\ \ z=4-x^2-y^2;$

и) $x^2+y^2+z^2=R^2;$

і) $z=0,\ \ 2-x-y-2z=0,\ \ y=x,\ \ y=x^2;$

ї) $x^2+y^2=4x,\ \ z=x,\ \ z=2x;$

к) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{b^2}=1,\ \ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$

✍**3. [2, *с.183-184*], [11, *с.221-222*]** а) Знайти площу тієї частини площини $6x+3y+2z=12$, яка розміщена в першому октанті.

б) Обчислити площу частини поверхні параболоїда $2z=x^2+y^2$, яка вирізана циліндром $\left(x^2+y^2\right)^2=x^2-y^2$.

в) Знайти площу частини сфери $x^2+y^2+z^2=2a^2$, яка розміщена всередині конуса $x^2+y^2=z^2$.

г) Знайти площу поверхні $az=xy,\ \ x^2+y^2\le a^2$.

д) Знайти площу частини параболоїда $y=x^2+z^2$, розміщеного в I квадранті і всередині циліндра $x^2+z^2=1$.

е) Знайти площу частини циліндра $z=x^2$, який відтинається площинами $x+y=\sqrt{2},\ \ x=0,\ \ y=0$.

є) Знайти площу частини конуса $z=\sqrt{x^2+y^2}$, розміщеного всередині циліндра $x^2+y^2=2x$.

ж) Знайти площу частини циліндра $x^2+y^2=a^2$, яка відтинається площинами $x\pm z=0\ \ (x>0)$.

з) Знайти площу частини поверхні $(x+y)^2+z=1,\ \ x>0,\ y>0,\ z>0.$

и) Знайти площу частини поверхні $(x+y)^2+2z^2=2a^2,\ \ x>0,\ y>0,\ z>0.$

✍**4.** *Знайти координати центра мас плоскої фігури з густиною* $\rho=\rho(x;\,y)$*:*

а) $\dfrac{y^2}{a}\le x\le 2a-y,\ \ a>0,\ \ \rho=1;$

б) $x^2+y^2\le a^2,\ \ |y|\le xtg\alpha,\ \ \alpha\in\left(0;\,\dfrac{\pi}{2}\right),\ \ \rho=1;$

в) $y\le\dfrac{a^2}{x},\ \ \dfrac{y^2}{8a}\le x\le 2a,\ \ a>0,\ \ \rho=1;$

г) $x=y,\ \ x-3y=1,\ \ y=1,\ \ y=3,\ \ \rho=y;$

д) $x^2+y^2=4x,\ \ x^2+y^2=4y,\ \ xy\ge 0,\ \ \rho=x;$

е) $r\le a(1+\sin\varphi),\ \ \rho=1.$

✍**5.** *Обчислити момент інерції:*

а) прямокутника зі сторонами a і b відносно його сторін;

б) квадрата зі стороною a відносно однієї з вершин;

в) трикутника, обмеженого прямими $x+y=2,\ x=2,\ y=2$ відносно осі Ox;

г) півкруга відносно його діаметра.

🕮 Практичне заняття № 14

Тема: Потрійний інтеграл.

✍**1. [7, *с.162*], [11, *с.187*]** *Звести потрійний інтеграл* $\iiint\limits_{(V)} f(x;\,y;\,z)dxdydz$ *до повторного по змінних* $x,\,y,\,z$ *довільним чином, або тим, що вказано в умові, якщо множина* (V) *обмежена поверхнями:*

а) $x=0,\ \ x=1,\ \ y=0,\ \ y=1-x,\ \ z=x,\ \ x+y+z=1;$

б) $x\ge 0,\ \ y\ge 0,\ \ 0\le z\le 4,\ \ 2x+y\le 2;\ \ (x,\,y,\,z),\,(y,\,z,\,x);$

в) $x=0,\ \ y=0,\ \ z=0,\ \ x+2y+3z=3;\ (x,\,y,\,z),\,(z,\,x,\,y);$

г) $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1;$

д) $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1,\ \ x=0,\ \ y=0,\ \ z=0\ \ (a>0,\,b>0,\,c>0);$

е) $x = \pm 1,\ \ y = 0,\ \ y = 4 - x,\ \ z = 0,\ \ x + y + z = 4.$

✍**2. [11, *c. 189*]** *Обчислити інтеграл* $\iiint\limits_{(V)} f\left(x;\, y;\, z\right) dxdydz$, *якщо:*

I. а) $f\left(x;\, y;\, z\right) = x,\ \left(V\right): x = 0,\ y = 0,\ z = 0,\ 2x + y + z = 4;$

б) $f\left(x;\, y;\, z\right) = x + y + z,$

$\left(V\right) = \left\{\left(x;\, y;\, z\right) \mid 0 \le x \le a,\ 0 \le y \le b,\ 0 \le z \le c\right\};$

в) $f\left(x;\, y;\, z\right) = x,\ \left(V\right): x = 0,\ y = 0,\ z = 0,\ y = h,\ x + z = a;$

г) $f\left(x;\, y;\, z\right) = (1 + x + y + z)^{-3},\ \left(V\right): x = 0,\ y = 0,\ z = 0,\ x + y + z = 1;$

д) $f\left(x;\, y;\, z\right) = x^2 - z^2,\ \left(V\right): y = -x,\ z = x,\ z = y,\ z = 1;$

II. а) $f\left(x;\, y;\, z\right) = xy,\ \left(V\right): x \ge 0,\ y \ge 0,\ z = 0,\ z = 1,\ x^2 + y^2 = 1;$

б) $f\left(x;\, y;\, z\right) = xyz,\ \left(V\right): x \ge 0,\ y \ge 0,\ z \ge 0,\ x^2 + y^2 + z^2 = 1;$

в) $f\left(x;\, y;\, z\right) = \sqrt{x^2 + y^2},\ \left(V\right): z = 1,\ x^2 + y^2 = z^2;$

г) $f\left(x;\, y;\, z\right) = xy^2z^3,\ \left(V\right): x = 1,\ y = x,\ z = 0,\ z = xy;$

д) $f\left(x;\, y;\, z\right) = xyz,\ \left(V\right): y = x^2,\ x = y^2,\ z = xy,\ z = 0.$

🕮 Практичне заняття № 15

Тема: Заміна змінних у потрійному інтегралі

✍**3. [11, *c.191*], [13, *c.561*], [15, *c.177*]** *Обчислити інтеграл* $\iiint\limits_{(V)} f\left(x;\, y;\, z\right) dxdydz$, *перейшовши до циліндричних координат, якщо:*

а) $f\left(x;\, y;\, z\right) = x^2 + y^2 + z^2,$

$\left(V\right) = \left\{\left(x;\, y;\, z\right) \mid x^2 + y^2 \le R^2,\ x \ge 0,\ 0 \le z \le H\right\};$

б) $f\left(x;\, y;\, z\right) = x + y + z,\ \ \left(V\right): x^2 + y^2 = 1,\ z = 0,\ x + y + z = 2;$

в) $f\left(x;\, y;\, z\right) = x^2 + y^2,\ \ \left(V\right) = \left\{\left(x;\, y;\, z\right) \mid \frac{1}{2}(x^2 + y^2) \le z \le 2\right\};$

г) $f\left(x;\, y;\, z\right) = z - x + y,\ \ \left(V\right): ay = z^2 + x^2,\ y^2 = x^2 + z^2,\ a > 0;$

д) $f\left(x;\, y;\, z\right) = \dfrac{xz}{x^2 + y^2 - R^2},$

$\left(V\right): x = 0,\ y = 0,\ z = h,\ z^2 = \dfrac{h^2}{R^2}(x^2 + y^2),\ x \ge 0,\ y \ge 0,\ z \ge 0;$

е) $f\left(x;\,y;\,z\right)=\dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $\left(V\right): x^2+y^2=4y,\ y+z=4,\ z\geq 0.$

✍**4. [11, *с.190*], [15, *с.173*]** *Обчислити інтеграл* $\iiint\limits_{(V)} f\left(x;\,y;\,z\right)dxdydz$, *перейшовши до сферичних координат, якщо:*

а) $f\left(x;\,y;\,z\right)=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, $\left(V\right)=\left\{\left(x;\,y;\,z\right)|\,1\leq x^2+y^2+z^2\leq 8\right\}$;

б) $f\left(x;\,y;\,z\right)=\dfrac{x}{R^4+(x^2+y^2+z^2)^2}$,

$\left(V\right)=\left\{\left(x;\,y;\,z\right)|\,x^2+y^2+z^2\leq R^2,\ x\geq 0\right\}$;

в) $f\left(x;\,y;\,z\right)=x^2+y^2-z^2$,

$\left(V\right)=\left\{\left(x;\,y;\,z\right)|\,1\leq x^2+y^2+z^2\leq 4,\ x\geq 0,\ y\geq 0\right\}$;

г) $f\left(x;\,y;\,z\right)=yz+zx$,

$\left(V\right): y=x,\ x=0,\ z=0,\ x^2+y^2+z^2=R^2,\ x\geq 0,\ y\geq 0,\ z\geq 0$;

д) $f\left(x;\,y;\,z\right)=\dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$,

$\left(V\right)=\left\{\left(x;\,y;\,z\right)|\,x^2+y^2+z^2\leq R^2,\ z\geq \dfrac{h}{a}\sqrt{x^2+y^2}\right\}$;

е) $f\left(x;\,y;\,z\right)=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, $\left(V\right)=\left\{\left(x;\,y;\,z\right)|\,x^2+y^2+z^2\leq z\right\}$;

є) $f\left(x;\,y;\,z\right)=x^m y^n z^p$, $m,\,n,\,p\in\mathbb{N}\bigcup\left\{0\right\}$,

$\left(V\right)=\left\{\left(x;\,y;\,z\right)|\,x^2+y^2+z^2\leq 1\right\}$.

✍**5.** *Обчислити інтеграл* $\iiint\limits_{(V)} f\left(x;\,y;\,z\right)dxdydz$ *по області* $\left(V\right)=\left\{\left(x;\,y;\,z\right)|\,\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}\leq 1\right\}$, *використавши узагальнені сферичні координати* $x=a\rho\cos\varphi\cos\theta,\ y=b\rho\sin\varphi\cos\theta,\ z=c\rho\sin\theta$, *якщо*:

а) $f\left(x;\,y;\,z\right)=\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}$; б) $f\left(x;\,y;\,z\right)=x^2+y^2$;

в) $f\left(x;\,y;\,z\right)=\sqrt{1-\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}}$.

🕮 Практичне заняття № 16

Тема: Геометричні застосування потрійного інтеграла

✍**1. [1, *с. 250*], [11, *с.217-218*]** *Обчислити об'єм тіла, обмеженого поверхнями:*

I. а) $z=4-y^2,\ \ z=y^2+2,\ \ x=-1,\ \ x=2;$

б) $z=x^2+y^2,\ \ z=x^2+2y^2,\ \ y=x,\ \ y=2x,\ \ x=1;$

в) $z=x^2+y^2,\ \ z=2x^2+2y^2,\ \ y=x^2,\ \ y=x;$

г) $y=16\sqrt{2x},\ \ y=\sqrt{2x},\ \ z=0,\ \ x+z=2;$

д) $y=5\sqrt{x},\ \ y=\dfrac{5x}{3},\ \ z=0,\ \ z=5+\dfrac{5\sqrt{x}}{3};$

е) $z=\ln(x+2),\ \ z=\ln(6-x),\ \ x=0,\ \ x+y=2,\ \ x-y=2;$

є) $(x-1)^2+y^2=z,\ \ 2x+z=2.$ Вказівка: проекція тіла на площину XOY є круг;

II. а) $(x^2+y^2)^2=2xy,\ \ z=x+y,\ \ z=0,\ \ x>0;$

б) $x^2+y^2=x,\ \ x^2+y^2=2x,\ \ z=x^2+y^2,\ \ z=0;$

в) $x^2+y^2=1,\ \ z=e^{-(x^2+y^2)},\ \ z=0;$

г) $x^2+y^2=z^2,\ \ x^2+y^2+a^2=2z^2,\ \ a>0,\ \ z>0;$

д) $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1,\ \ \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=2z,\ \ z=0;$

е) $\dfrac{x^4}{a^4}+\dfrac{y^4}{b^4}=\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2},\ \ \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=\dfrac{z}{c},\ \ z=0,\ \ c>0;$

є) $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=\dfrac{z}{c},\ \ \dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=2,\ \ a>0,\ \ c>0;$

III. (можна використати сферичні координати):

а) $x^2+y^2+z^2=4,\ \ z=\sqrt{x^2+y^2}\ \ \left(z<\sqrt{x^2+y^2}\right);$

б) $x^2+y^2+z^2=2az,\ \ z=\sqrt{x^2+y^2}\ \ \left(z>\sqrt{x^2+y^2}\right);$

в) $\left(x^2+y^2+z^2\right)^2=a^3x,\ \ a>0;$

г) $\left(x^2+y^2+z^2\right)^2=a^2\left(x^2+y^2-z^2\right);$

д) $\left(\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}\right)^2=\dfrac{x}{p},\ \ p>0;$ е) $\left(\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}\right)^2=\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}.$

🕮 Практичне заняття № 17

Тема: Фізичні застосування потрійного інтеграла

✍**1.** *Знайти масу тіла* (V) *з густиною* ρ, *якщо:*

а) $(V): 64(x^2+y^2)=z^2,\ \ x^2+y^2=4,\ \ z=0,\ \ y=0,\ \ y\ge 0,\ \ z\ge 0,$

$\rho=\dfrac{5(x^2+y^2)}{4};$

б) $(V): x^2+y^2+z^2=4,\ \ x^2+y^2=1\ \left(x^2+y^2\le 1\right),\ \ x=0\ (x\ge 0),$

$\rho=4|z|;$

в) $(V): x^2+y^2=1,\ \ x^2+y^2=2z,\ \ x=0,\ \ y=0,\ \ z=0\ (x\ge 0,\ y\ge 0),$

$\rho=10x;$

г) $(V): x^2+y^2=\dfrac{16}{49}z^2,\ \ x^2+y^2=\dfrac{4}{7}z,\ \ x=0,\ \ y=0\ (x\ge 0,\ y\ge 0),$

$\rho=80yz;$

д) $(V): x^2+y^2+z^2=1,\ \ x^2+y^2=4z^2,\ \ x=0,\ \ y=0\ (x\ge 0,\ y\ge 0,$

$z\ge 0),\ \ \rho=20z.$

✍**2. [1, *с.253*], [11, *с.226*]** *Знайти координати центра мас тіла* (V) *з густиною* ρ, *якщо:*

а) $(V)=\left\{(x;\ y;\ z)\,|\ 0\le x\le a,\ 0\le y\le a,\ 0\le z\le a\right\},\ \ \rho=\rho_0(x+y+z)^2;$

б) $(V): x=0,\ \ y=0,\ \ z=0,\ \ x=2,\ \ y=4,\ \ x+y+z=8,\ \ \rho=1;$

в) $(V)=\left\{(x;\ y;\ z)\,|\ x^2+y^2+z^2\le R^2,\ x\ge 0\right\},\ \ \rho=\dfrac{\rho_0}{\sqrt{x^2+y^2}};$

г) $(V): z=\dfrac{y^2}{2},\ \ x=0,\ \ y=0,\ \ z=0,\ \ 2x+3y-12=0,\ \ \rho=1;$

д) $(V): y=\sqrt{x},\ \ y=2\sqrt{x},\ \ z=0,\ \ x+z=6,\ \ \rho=1;$

е) $(V)=\left\{(x;\ y;\ z)\,|\ x^2+y^2\le z\le h\right\},\ \ \rho=\rho_0\sqrt{h-z};$

є) $(V): x^2+y^2+z^2=R^2,\ \ z\,tg\alpha=\sqrt{x^2+y^2}$ (кульовий сектор), $\rho=1.$

✍**3. [1, *с. 253*]** *Знайти моменти інерції однорідних тіл з масою* m:

а) прямокутного паралелепіпеда з ребрами a, b, c відносно кожного з ребер та відносно центра мас;

б) кулі відносно дотичної прямої;

в) еліпсоїда $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ відносно кожної з трьох його осей;

г) прямого кругового циліндра з радіусом основи R та висотою H відносно діаметра основи, та відносно діаметра його середнього перерізу;
д) параболоїда обертання з радіусом основи R та висотою H відносно осі, яка проходить через його центр ваги перпендикулярно до осі обертання (екваторіальний момент).

4. [1, *с.254*] а) Знайти масу квадратної пластинки зі стороною $2a$, якщо густина матеріалу пластинки пропорційна квадрату відстані від точки перетину діагоналей і на кутах квадрата дорівнює одиниці;
б) плоске кільце обмежене двома концентричними колами, радіуси яких дорівнюють R і r $(R > r)$. Знаючи, що густина матеріалу обернено пропорційна відстані від центра кіл, знайти масу кільця. Густина на колі внутрішнього круга дорівнює одиниці;
в) на фігурі, обмеженій еліпсом з півосями a, b, розподілена маса так, що її густина пропорційна відстані від більшої осі, причому на одиниці відстані від цієї осі вона дорівнює γ. Знайти всю масу;
г) тіло обмежене двома концентричними сферами, радіуси яких дорівнюють R і r $(R > r)$. Знаючи, що густина матеріалу обернено пропорційна відстані від центра сфер і на одиничній відстані дорівнює γ. Знайти всю масу тіла;
д) знайти масу тіла, обмеженого круговим циліндром з радіусом основи R та висотою H, якщо його густина в будь-якій точці чисельно дорівнює квадрату відстані цієї точки від центра основи циліндра;
е) знайти масу кулі радіуса R, якщо густина пропорційна кубу відстані від центра і на одиниці відстані дорівнює γ.

⌛Самостійна робота №2 (зразок) (10 балів)

✍**1.** *Записати подвійний інтеграл* $\iint\limits_D f(x;y)\,dxdy$ *у вигляді повторного інтеграла із зовнішнім інтегруванням по* x *та зовнішнім інтегруванням по* y, *якщо область* D *задана лініями:* $D: x \ge 0,\ y \ge 0,\ y = 1,\ x = \sqrt{4 - y^2}$.

✍**2.** *Обчислити площу плоскої області* $D: xy = 1,\ x^2 = y,\ \ y = 2,\ x = 0$.

✍**3.** *За допомогою подвійних інтегралів обчислити в полярних* *координатах площу плоскої фігури, обмеженої заданими лініями:* $\rho = a\sin 3\varphi$.

✍**4.***За допомогою подвійних інтегралів обчислити об'єм тіла, обмеженого заданими поверхнями* $y^2 = x,\ x = 3,\ z = x,\ z \ge 0$.

✍**5.***Обчислити потрійний інтеграл за допомогою циліндричних або сферичних координат* $\iiint\limits_V \frac{xdxdydz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$, $V: 1 \le x^2+y^2+z^2 \le 9,$ $y \le x,\ y \ge 0,\ z \ge 0$.

✍**6.** *За допомогою потрійного інтеграла обчислити об'єм тіла, обмеженого поверхнями* $x + y = 4,\ z = 4\sqrt{y},\ \ x \ge 0,\ z \ge 0$. *Зобразити рисунок.*

✍**7.** *Обчислити координати центра мас однорідного тіла* V, *обмеженого поверхнями* $V: z = x^2 + y^2,\ x^2 + y^2 = 4,\ z = 0$.

🕮 Практичне заняття № 18

Тема: Криволінійний інтеграл першого роду.

✍**1.** *Обчислити криволінійний інтеграл першого роду вздовж плоскої кривої* L:

1.1. $\int\limits_L \frac{ds}{x+y}$, *де* L - *відрізок прямої* $y = x + 2$, *що з'єднує точки* $(2;4)$ *і* $(1;3)$;

1.2. $\int\limits_L \frac{ds}{y-5}$, *де* L - *відрізок з кінцями* $(0;-2)$ *і* $(0;4)$;

1.3. $\int\limits_L \frac{ds}{\sqrt{x^2+y^2+4}}$, *де* L - *відрізок з кінцями* $(0;0)$, $(1;2)$;

1.4. $\int\limits_L xyds$, *де* L - *прямокутник, обмежений прямими* $x = 0, x = 4, y = 0, y = 2$;

1.5. $\int\limits_L (2x+3y)ds$, *де* L - *трикутник з вершинами в точках* $O(0;0)$, $A(-1;0)$, $B(0;1)$.

В. 1) $\dfrac{1}{\sqrt{2}}\ln\dfrac{3}{2}$; 2) $-\sqrt{5}\ln 2$; 3) $\ln\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$ 4) 24.

✍**2.** *Обчислити криволінійний інтеграл першого роду вздовж плоскої кривої* L*:*

2.1. $\int\limits_L yds$ *де* L - *дуга параболи* $y^2 = 2x$ *від точки* $(0;0)$ *до точки* $(1;\sqrt{2})$*;*

2.2. $\int\limits_L x^2 ds$, *де* L - *верхня половина кола* $x^2 + y^2 = a^2$;

2.3. $\int\limits_{\mathrm{L}} \sqrt{x^2 + y^2}\,ds$, *де* L - *коло* $x^2 + y^2 = ax$;

2.4. $\int\limits_L \left(4\sqrt[3]{x} - 3\sqrt[3]{y}\right)ds$, *де* L - *дуга астроїди* $x = \cos^3 t$, $y = \sin^3 t$ *між точками* $A(1;0)$, $B(0;1)$*;*

2.5. $\int\limits_{\mathrm{L}} \mathrm{y}^2 ds$, *де* L - *арка циклоїди* $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$, $0 \le t \le 2\pi$ *;*

2.6. $\int\limits_L \left(x^2 + y^2\right)ds$, *де* L - *дуга розгортки кола* $x = a(\cos t + t\sin t)$, $y = a(\sin t - t\cos t)$, $0 \le t \le 2\pi$ *;*

2.7. $\int\limits_L (x+y)ds$, *де* L - *права пелюстка лемніскати* $\rho = a\sqrt{\cos 2\varphi}$.

В. *1)* $\sqrt{3} - \dfrac{1}{3}$; *2)* $\dfrac{\pi a^3}{2}$; *3)* $2a^2$ *4)* 1; *5)* $\dfrac{256a^3}{15}$;

6) $2\pi^2 a^2\left(1 + 2\pi^2\right)$.

✍**3. [11]** *Обчислити криволінійний інтеграл першого роду вздовж просторової кривої* L*:*

3.1. $\int\limits_L f(x,y,z)ds$, *де* L *- перший виток гвинтової лінії* $x = a\cos t$, $y = a\sin t$, $z = bt$, *якщо: а)* $f = \dfrac{z^2}{x^2+y^2}$; *б)* $f = \dfrac{1}{x^2+y^2+z^2}$;

в) $f = x^2+y^2+z^2$;

3.2. $\int\limits_L \sqrt{2y^2+z^2}\,ds$, *де* L *- коло* $x^2+y^2+z^2=a^2$; $x=y$;

3.3. $\int\limits_L xyzds$, *де* L *- дуга кривої* $x=t, y=\dfrac{1}{3}\sqrt{8t^3}$; $z=\dfrac{1}{2}t^2$ *між точками* $t=0$ *і* $t=1$;

3.4. $\int\limits_L zds$, *де* L *- дуга кривої* $x^2+y^2=z^2$, $y^2=ax$ *від точки* $(0,0,0)$ *до точки* $\left(a;a;a\sqrt{2}\right)$, $a>0$.

В. *1а)* $\dfrac{8\pi^3b^2\sqrt{a^2+b^2}}{3a^2}$; *1б)* $\dfrac{\sqrt{a^2+b^2}}{ab}arctg\dfrac{2\pi b}{a}$;

1в) $\dfrac{2\pi}{3}\sqrt{a^2+b^2}\left(3a^2+4\pi^2b^2\right)$; *2)* $2\pi a^2$; *3)* $\dfrac{16\sqrt{2}}{143}$;

4) $\left(100\sqrt{38}-72-17\ln\dfrac{25+4\sqrt{38}}{17}\right)\dfrac{a^2\sqrt{2}}{512}$.

✍**4.** *Знайти масу, розподілену з лінійною густиною* $\rho(x,y)$ *вздовж дуги* AB *плоскої кривої* L*, якщо:*

4.1. L*- відрізок* AB, $A(1;1)$, $B(2;3)$, $\rho(x;y)=2x+y$;

4.2. L*- відрізок* AB, $A(1;0)$, $B(4;6)$, $\rho(x;y)=\dfrac{\sqrt{y+2}}{x}$;

4.3. $L: y^2=\dfrac{x^2}{2}$, $A(1;0{,}5)$, $B(2;2)$, $\rho(x,y)=\dfrac{y}{x}$;

4.4. $L: y^2=x$, $A(1;1)$, $B(4;2)$, $\rho(x;y)=y$;

4.5. $L: y=\frac{3}{2}x^{\frac{3}{2}},\ \ A(0;0),\ \ B\left(4;\frac{16}{3}\right),\ \ \rho=ks,$ *де* s- *довжина дуги від точки* $(0;0)$

В. *1)* $5\sqrt{5}$*;* *2)* $2\sqrt{10}$*;* *3)* $\frac{5\sqrt{5}-2\sqrt{2}}{6}$; *4)* $\frac{17\sqrt{17}-5\sqrt{5}}{12}$;

5) $\frac{4k}{9}\left(63-5\sqrt{5}\right)$.

✍**5.** *Знайти масу, розподілену з лінійною густиною* $\rho(x,y)$ *вздовж дуги* AB *просторової кривої* L*, якщо:*

5.1. $L: r=a\sqrt{\cos 2\varphi};\quad \rho=kr;$

5.2. $L: r=a(1+\cos\varphi),\quad \rho=k\sqrt{r};$

5.3. $L: x=a(t-\sin t),\quad y=a(1-\cos\varphi),\ 0\le t\le 2\pi;\ \ \rho=y^{\frac{3}{2}};$

5.4. $L: x=\ln\left(1+t^2\right),\ y=2arctgt-t,\ \ 0\le t\le 1;\ \ \rho=ye^{-x};$

5.5. $L: x=at;\ \ y=\frac{at^2}{2};\ \ z=\frac{at^3}{3},\ \ 0\le t\le 1;\ \ \rho=\sqrt{\frac{2y}{a}};$

5.6. $L: x=ae^t\cos t,\ y=ae^t\sin t,\ \ z=ae^t,\ -\infty<t\le 0;\ \rho=kz.$

В. *1)* $k\pi a^2$; *2)* $\pi k(2a)^{\frac{3}{2}}$; *3)* $3\sqrt{2}\pi a^{\frac{5}{2}}$; *4)* $\frac{\left(\pi^2-8\ln 2\right)}{16}$;

5) $\frac{3a}{16}\left(\ln\frac{\sqrt{3}+2}{\sqrt{3}}+2\sqrt{3}-\frac{3}{2}\right)$; *6)* $\frac{\sqrt{3}}{2}ka^2$.

✍**6.** *Знайти координати центра мас, розподілених вздовж плоскої кривої* L *з лінійною густиною* $\rho=1$:

6.1. $L: y=a\,\mathrm{ch}\frac{x}{a},\ |x|\le a;$

6.2. $L: y^2=\frac{1}{3}x^2+x^3,\ x\ge 0.$

В. *1)* $\left(0;\frac{\mathrm{sh}\,2+2}{4\,\mathrm{sh}\,1}a\right)$; *2)* $\left(\frac{8}{45};0\right)$.

🕮 Практичне заняття № 19

Тема: Криволінійний інтеграл другого роду.

✍**1.** *Обчислити криволінійний інтеграл вздовж кривої L, якщо:*

1.1. $\int\limits_L xydx$, *де L – дуга синусоїди* $y=\sin x$ *від* $x=0$ *до* $x=\pi$ *;*

1.2. $\int\limits_L xdy$, *де L – відрізок прямої* $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ *від точки* $(a;0)$ *до точки* $(0;b)$;

1.3. $\int\limits_L \frac{x}{y}dx-\frac{y-x}{x}dy$, *де L – дуга параболи ,* $y=x^2$, $A(2;4)$, $B(1;1)$;

1.4. $\oint\limits_L \left(x^2+y^2\right)dy$, *де L – контур прямокутника, утвореного прямими* $x=1$*;* $x=3$*;* $y=1$*;* $y=5$ *в додатному напрямі;*

1.5. $\oint\limits_L \left(x^2+y^2\right)dx+\left(x^2-y^2\right)dy$, *де L – межа трикутника з вершинами* $(0;0)$, $(1;0)$, $(0;1)$*;*

1.6. $\oint\limits_L \left(x^2+y^2\right)dx+\left(x^2-y^2\right)dy$, *де L – межа трикутника з вершинами* $(1;1)$, $(1;3)$, $(2;2)$*;*

1.7. $\oint\limits_L \frac{dx+dy}{|x|+|y|}$, *де L – межа квадрата з вершинами* $(1;0)$, $(0;1)$, $(-1;0)$, $(0;-1)$.

В. 1) π; 2) $\frac{1}{6}ab^2$; 3) $\frac{1}{3}(5-\ln 8)$; 4) 32.

✍**2.** *Обчислити криволінійний інтеграл* $\int\limits_L (xy-y^2)dx+xdy$ *від точки O(0; 0) до точки A(1; 2) вздовж кривих:* а) $y=2x$; б) $y=2x^2$;

в) $y=2\sqrt{x}$ *;* *г) вздовж ламаної OBA, де* $B\left(\frac{1}{2};3\right)$.

В. а) $\frac{1}{3}$; б) $\frac{31}{30}$;

✍***3.*** *Обчислити криволінійний інтеграл вздовж відрізка AB від точки A до точки B, якщо:*

3.1. $\int\limits_L x^3dy - xydx$; $A(0;-2)$; $B(1;3)$;

3.2. $\int\limits_L -3x^2dx + y^3dy$; $A(0;0)$; $B(2;4)$;

3.3. $\int\limits_L \left(xy - y^2\right)dx + xdy$; $A(3;-4)$; $B(1;2)$;

3.4. $\int\limits_L \left(\frac{x}{x^2+y^2} + y\right)dx + \left(\frac{y}{x^2+y^2} + x\right)dy$; $A(1;0)$; $B(3;4)$;

В. 1) $\frac{7}{12}$; 2) 56; 3) 8; 4) 12+ln5.

✍***4.*** *Обчислити криволінійний інтеграл другого роду вздовж просторової кривої в напрямку зростання параметра t або від точки A до точки B:*

4.1. $\int\limits_L (y+z)dx + (z+x)dy + (x+y)dz$, L: $x = a\sin^2 t$, $y = 2a\sin t\cos^2 t$, $z = a\cos^2 t$, $0 \le t \le \pi$;

4.2. $\int\limits_L xdx + (x+y)dy + (x+y+z)dz$, L: $x = a\sin t$, $y = a\cos t$, $z = a\left(\sin t + \cos t\right)$, $0 \le t \le 2\pi$;

4.3. $\int\limits_L \frac{xdx + ydy + zdz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2 - x - y + 2z}}$, $L = AB$, $A(1;1;1)$, $B(4;4;4)$;

4.4. $\int\limits_L x(z-y)dx + y(x-z)dy + z(y-x)dz$, L – *ламана ABCA,* $A(a;0;0)$, $B(0;a;0)$, $C(0;0;a)$;

4.5. $\int\limits_L y^2dx + z^2dy + x^2dz$, L – *лінія перетину сфери* $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ *і циліндра* $x^2 + y^2 = Rx$, *яку проходять проти годинникової стрілки, якщо дивитись з точки* $(0;0;0)$.

В. 1) 0; 2) $-\pi a^2$; 3) $3\sqrt{3}$; 4) a^3; 5) $-\frac{\pi R^3}{4}$.

🕮 Практичне заняття № 20

Тема: Незалежність криволінійного інтегралу від шляху інтегрування.

✍**1.** *Застосовуючи формулу Гріна, обчислити криволінійний інтеграл вздовж замкненої кривої L:*

1.1 $\oint\limits_L (x+y)^2 dx - (x^2+y^2)dy$, *де L – контур трикутника з вершинами* $A(1;1)$, $B(3;2)$, $C(2;5)$ *в додатному напрямі. Результат перевірити безпосереднім інтегруванням.*

1.2 $\oint\limits_L (xy+x+y)^2 dx + (xy+x-y)dy$, *де L: а) еліпс* $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$; *б) коло* $x^2+y^2=ax$. *Результат перевірити безпосереднім інтегруванням.*

1.3 $\oint\limits_L \frac{xdy+ydx}{x^2+y^2}$, *L:* $(x-1)^2+(y-1)^2=1$.

1.4 $\oint\limits_L e^x\left((1-\cos y)dx+(\sin y-y)dy\right)$, *де L – межа області* $0<x<\pi$; $0<y<\sin x$.

В. 1.1. $-\frac{140}{3}$; 1.2. а) 0; б) $-\frac{\pi a^3}{8}$; 1.3. 0; 1.4. $\frac{(1-e^{\pi})}{5}$.

✍**2.** *Обчислити дані інтеграли, попередньо впевнившись, що вони не залежать від шляху інтегрування:*

2.1. $\int\limits_{(-1;2)}^{(2;3)} xdy+ydx$;

2.2. $\int\limits_{(1;\pi)}^{(2;\pi)} \left(1-\frac{y^2}{x^2}\cos\frac{y}{x}\right)dx+\left(\sin\frac{y}{x}+\frac{y}{x}\cos\frac{y}{x}\right)dy$;

2.3. $\int\limits_{(0;0)}^{(-2;-1)} 2xydx+x^2dy$;

2.4. $\int\limits_{(-2;-1)}^{(0;3)} (x^4+4xy^3)dx+(6x^2y^2-5y^4)dy$;

2.5. $\int\limits_L f(x+y)(dx+dy)$, $f(t)$ – неперервна функція, $A(0;0)$, $B(x_0;y_0)$.

2.6. $\int\limits_L \varphi(x)dx+\psi(y)dy$, $\varphi(t)$, $\psi(t)$ – неперервні функції, $A(x_1;y_1)$, $B(x_2;y_2)$.

В. 1) 6; 2) $1+\pi$; 3) –4; 4) $-\frac{1148}{5}$; 5) $\int\limits_0^{x_0+y_0} f(t)dt$; 6) $\int\limits_{x_1}^{x_2}\varphi(t)dt+\int\limits_{y_1}^{y_2}\psi(t)dt$.

✍**3.** *Перевірити, чи є дані вирази повними диференціалами функцій двох змінних, і якщо так, то знайти ці функції:*

3.1. $\left(x^2+2xy-y^2\right)dx+\left(x^2-2xy-y^2\right)dy$;

3.2. $\left(e^{2y}-5y^3e^x\right)dx+\left(2xe^{2y}-15y^2e^x\right)dy$;

3.3. $e^{x-y}\left((1+x+y)dx+(1-x-y)\right)dy$;

3.4. $\frac{x}{y\sqrt{x^2+y^2}}dx-\frac{x^2+\sqrt{x^2+y^2}}{y^2\sqrt{x^2+y^2}}dy$;

3.5. $\left(\frac{x-2y}{(y-x)^2}+x\right)dx+\left(\frac{y}{(y-x)^2}-y^2\right)dy$;

3.6. $\left(2x\cos y-y^2\sin x\right)dx+\left(2y\cos x-x^2\sin y\right)dy$.

В. 1) $u=\frac{x^3}{3}+x^2y-xy^2-\frac{y^3}{3}+C$; 2) $u=xe^{2y}-5y^3e^x+C$;

3) $u=e^{x-y}(x+y)+C$; 4) $u=\frac{\sqrt{x^2+y^2}+1}{y}+C$;

5) $u=\ln|x-y|+\frac{y}{x-y}+\frac{x^2}{2}-\frac{y^3}{3}+C$; 6) $u=x^2\cos y+y^2\cos x+C$.

🕮 Практичне заняття № 21

Тема: Застосування криволінійних інтегралів другого роду.

Площа фігури, розміщеної в площині XOY і обмеженої замкненої лінією L, дорівнює:

$$\boxed{S=\frac{1}{2}\oint_L xdy-ydx}$$

✍**1. [11]** *Знайти площу області, обмеженої плоскими кривими:*

1.1. $y^2=4-x,\ \ x=4,\ \ y=1;$ **1.2** $y=1-x^2,\ \ x-y-1=0;$

1.3 $x=t^2,\ \ y=t^3,\ \ x=1;$ **1.4** $x=12\sin^3 t,\ \ y=3\cos^3 t;$

1.5 $\left(y-x\right)^2+x^2=1;$ **1.6** $\left(y+x\right)^2=ax,\ \ y=0;$

1.7 $x=\dfrac{3t}{1+t^3},\ \ y=\dfrac{3t^2}{1+t^3}$ *(петля декартового листа)*

1.8 $x=a\cos\varphi,\ \ y=a\sin 2\varphi,\ \ x\ge 0.$

В. *1)* $\frac{1}{3}$; *2)* $\frac{9}{2}$; *3)* $\frac{4}{5}$; *4)* $\frac{27\pi}{2}$; *5)* π; *6)* $\frac{a^2}{6}$; *7)* $\frac{3}{2}$; *8)* $\frac{4a^2}{3}$.

Робота, виконана під дією сили $\vec{F}=\{P;\,Q;\,R\}$, яка діє на точку при переміщенні її вздовж кривої AB, дорівнює

$$\boxed{W=\int_{AB}P\left(x,y,z\right)dx+Q\left(x,y,z\right)dy+R\left(x,y,z\right)dz}$$ (просторова крива), або

$$\boxed{W=\int_{AB}P\left(x,y\right)dx+Q\left(x,y\right)dy}$$ (плоска крива).

✍**2. [11]** *Знайти роботу поля* $\vec{F}=\left(4x-5y\right)\vec{i}+\left(2x+y\right)\vec{j}$ *вздовж дуги* AB *кривої* L, $A\left(1;-9\right)$, $B\left(3;-3\right)$, *якщо:*

2.1 L *- ламана* $AMB,\ M\left(1;-3\right);$ **2.2** L *- ламана* $AQB,\ Q\left(3;-9\right);$

2.3 $L=AB.$

В. *1) 22, 2) 106, 3) 64.*

✍**3. [6]** *Знайти роботу поля* $\vec{F}$ *вздовж дуги* AB *кривої* L, *якщо:*

3.1 $\vec{F} = 2xy\vec{i} - y\vec{j}, \quad L: y = x^2 - 1,\ A(1;0),\ B(2;3);$

3.2 $\vec{F} = 3xy^2\vec{i} - (x+y)\vec{j}, \quad L: y^2 = x+1,\ A(0;1),\ B(3;2);$

3.3
$\vec{F} = -y\vec{i} + x\vec{j}, \quad L: x = a(t - \sin t),\ y = a(1-\cos t),\ A(0;0),\ B(2\pi a;0);$

3.4 $\vec{F} = (y, -2x), \quad L: x^2 + y^2 = 1,\ y \ge 0,\ A(1;0),\ B(-1;0);$

3.5 $\vec{F} = (0, 2x), \quad L: x = x = a\cos t,\ y = b\sin t,\ y \ge 0,\ A(a;0),\ B(-a;0).$

В. *1) 0; 2)* $\frac{113}{3}$; *3)* $-6\pi a^2$; *4)* $-\frac{3\pi}{2}$; *5)* πab.

✍**4. [1, с.273]** *В кожній точці* M *еліпса* $x = a\cos t, y = b\sin t$ *прикладена сила* $\vec{F}$*, яка дорівнює за величиною відстані від точки* M *до центра еліпса і напрямлена до центра еліпса. а) Обчислити роботу сили* $\vec{F}$ *при переміщенні матеріальної точки* M *маси* m *вздовж дуги еліпса, яка розміщена в першому координатному куті. б) Знайти роботу, якщо точка* M *обходить весь еліпс.*

✍**5. [1, с.273]** *Проекції сили на координатні осі задаються формулами* $X = 2xy$ *і* $Y = x^2$*. Показати, що робота сили при переміщенні точки маси* m *залежить тільки від початкового і кінцевого її положення і не залежить від форми шляху. Обчислити величину роботи при переміщенні з точки* $(1;0)$ *в точку* $(0;3)$.

✍**6. [1, с.273]** *Величина сили обернено пропорційна відстані точки її прикладання від площини* xOy *і спрямована в початок координат. Обчислити роботу при русі точки маси* m *під дією цієї сили вздовж прямої* $x = at, y = bt, z = ct$ *від точки* $M(a;b;c)$ *до точки* $N(2a;2b;2c)$.

✍**7. [1, с.273]** *Величина сили обернено пропорційна відстані точки її прикладання від осі* Oz*, перпендикулярна до цієї осі і напрямлена до неї. Знайти роботу сили при русі точки маси* m *під дією цієї сили* *вздовж кола* $x=\cos t,\ y=1,\ z=\sin t$ *від точки* $M(1;1;0)$ *до точки* $N(0;1;1)$.

✍**8. [1, с.273]** *Довести, що робота сили тяжіння двох точкових мас, яка виконується при переміщенні однієї з них, не залежить від шляху. Величина сили тяжіння* F *визначається законом Ньютона* $F=\dfrac{km_1m_2}{r^2}$, *де* r *- відстань між точками,* m_1 *і* m_2 *- маси, які зосереджені в цих точках,* k *- гравітаційна стала.*

🕮 Практичне заняття № 22

Тема: Поверхневі інтеграли.

Поверхневий інтеграл першого роду .

1. Якщо поверхня P задана параметрично:

$x=x(u,v),\ y=y(u,v),\ z=z(u,v),\ \ (u,v)\in\bar{D}$, то

$$\boxed{\iint\limits_P f(x,y,z)dP=\iint\limits_D f\left(x(u,v),y(u,v),z(u,v)\right)\sqrt{EG-F^2}dudv}$$

де

$$E=\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2,$$

$$G=\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2,$$

$$F=\frac{\partial x}{\partial u}\cdot\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial y}{\partial u}\cdot\frac{\partial y}{\partial v}+\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial z}{\partial v}.$$

2. Якщо поверхня P задана явно рівнянням $z=z(x,y),\ (x,y)\in\bar{D}$, то

$$\boxed{\iint\limits_P f(x,y,z)dP=\iint\limits_D f\left(x,y,z(x,y)\right)\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}dxdy}$$

✍**1. [8]** *Обчислити інтеграл* $\iint\limits_P(6x+4y+3z)dP$, *якщо* P *- частина площини* $x+2y+3z=6$, *розміщена в першому октанті.* В. $54\sqrt{14}$.

✍**2.** *Обчислити інтеграл* $\iint\limits_P \left(z+2x+\frac{4}{3}y\right)dP$, *якщо* P - *частина площини* $\frac{x}{2}+\frac{y}{3}+\frac{z}{4}=1,\ x\ge 0,\ y\ge 0,\ z\ge 0.$ В. $4\sqrt{61}$.

✍**3.** *Обчислити інтеграл* $\iint\limits_P \left(x^2+y^2\right)dP$, *якщо*:

3.1. P - сфера $x^2+y^2+z^2=R^2$;

3.2. P - поверхня конуса $\sqrt{x^2+y^2}\le z\le 1$.

В. 1) $\frac{8}{3}\pi R^4$; 2) $\frac{\pi\left(1+\sqrt{2}\right)}{2}$.

✍**4.** **[8]** *Обчислити інтеграл* $\iint\limits_P \left(y+z+\sqrt{a^2-x^2}\right)dP$, *якщо* P - *поверхня циліндра* $x^2+y^2=a^2$, *розміщена між площинами* $z=0$ *і* $z=h$. **В.** $ah\left(4a+\pi h\right)$.

✍**5. [15, с.239]** *Обчислити інтеграл* $\iint\limits_P \sqrt{x^2+y^2}\,dP$, *якщо* P - *частина поверхні конуса* $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{16}=\frac{z^2}{9}$, *розміщена між площинами* $z=0$ *і* $z=3$. **В.** $\frac{160\pi}{3}$.

✍**6.** *Обчислити масу півсфери* $z=\sqrt{4-x^2-y^2}$, *якщо її поверхнева густина в кожній точці* $\rho(x,y)=x^2y^2$. **В.** $\frac{128\pi}{15}$.

✍**7.** *Обчислити масу півсфери* $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$, *якщо її поверхнева густина в кожній точці* $\rho(x,y)=x^2+y^2$. **В.** $\frac{4\pi a^4}{3}$.

Поверхневий інтеграл другого роду .

1. Якщо поверхня P задана параметрично:

$x = x(u,v),\ y = y(u,v),\ z = z(u,v),\ \ (u,v) \in \overline{D},$

і орієнтована одиничним вектором нормалі $(\cos\alpha; \cos\beta; \cos\gamma)$, де $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ - напрямні косинуси нормалі:

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_u^{'} & y_u^{'} & z_u^{'} \\ x_v^{'} & y_v^{'} & z_v^{'} \end{vmatrix},$$

то

$$\boxed{\iint_P Pdydz + Qdzdx + Rdxdy = \iint_P \left(P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma\right)dP},$$

або

$$\boxed{\iint_P Pdydz + Qdzdx + Rdxdy = \iint_D \begin{vmatrix} P & Q & R \\ x_u^{'} & y_u^{'} & z_u^{'} \\ x_v^{'} & y_v^{'} & z_v^{'} \end{vmatrix} dudv}.$$

2. Якщо поверхня P задана явно рівнянням $z = z(x,y),\ (x,y) \in \overline{D}$, то

$$\boxed{\iint_P Rdxdy = \pm\iint_D R\left(x, y, z(x,y)\right)dxdy},$$

де D - проекція поверхні P на площину xOy.

✍**8.** *Обчислити поверхневі інтеграли другого типу*:

8.1. [8] $\iint_P \sqrt[4]{x^2+y^2}\,dxdy$, *де* P *- нижня сторона круга* $x^2+y^2 \le a^2$;

8.2. [15] $\iint_P xdydz + dxdz + xz^2dxdy$, *де* P *- зовнішня сторона частини сфери* $x^2+y^2+z^2=1$, *розміщеної в першому октанті;*

8.3. **[11, с.261]** $\iint_P zdxdy$, *де* P *- нижня сторона частини конічної поверхні* $z^2 = x^2+y^2,\ \ 0 < z \le H$, *розміщеної в першому октанті;*

8.4. [11, с.269] $\iint\limits_{P}(2z-x)dydz+(x+2z)dxdz+3zdxdy$, *де* P *- верхня сторона трикутника* $x+4y+z=4,\ \ x\ge 0,\ y\ge 0,\ z\ge 0$*;*

8.5. [11, с.269] $\iint\limits_{P} yzdydz+zxdzdx+xydxdy$, *де* P *- внутрішня сторона поверхні тетраедра* $x+y+z\le 1,\ \ x\ge 0,\ y\ge 0,\ z\ge 0$*;*

8.6. [11, с.269] $\iint\limits_{P} x^6dydz+y^4dzdx+z^2dxdy$, *де* P *- нижня сторона частини еліптичного параболоїда* $z=x^2+y^2,\ \ z\le 1.$

В. 1) $-\dfrac{4}{5}\pi a^2\sqrt{a}$; 2) $\dfrac{5\pi}{12}+\dfrac{2}{15}$, 3) $-\dfrac{2}{3}\pi H^3$, 4) $\dfrac{128}{3}$, 5) 0, 6) $-\dfrac{\pi}{3}$.

✍**9. [11, с.262]** *Обчислити інтеграл* $\iint\limits_{P}\dfrac{dydz}{x}+\dfrac{dzdx}{y}+\dfrac{dxdy}{z}$, *де* P *- частина еліпсоїда* $x=a\cos u\cos v,\ y=b\sin u\cos v,\ \ z=c\sin v,$ $u\in\left[\dfrac{\pi}{4};\dfrac{\pi}{3}\right],\ v\in\left[\dfrac{\pi}{6};\dfrac{\pi}{4}\right]$*, орієнтованого зовнішньою нормаллю.*

🕮 Практичне заняття № 23

Тема: Основні інтегральні теореми.

1. Якщо P *- замкнена гладка поверхня, яка обмежує область* $G\subset R^3$*, і функції* $P(x,y,z),\ Q(x,y,z),\ R(x,y,z)$ *разом з похідними* $\dfrac{\partial P}{\partial x},\ \dfrac{\partial Q}{\partial y},\ \dfrac{\partial R}{\partial z}$ неперервні в $\overline{G}$, тоді

$$\boxed{\iint\limits_{P} Pdydz+Qdzdx+Rdxdy=\iiint\limits_{V}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dxdydz}$$

(формула Остроградського–Гаусса),

$$\boxed{\begin{aligned}&\oint\limits_{L^+} P(x,y,z)dx+Q(x,y,z)dy+R(x,y,z)dz=\\&=\iint\limits_{P}\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)dydz+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)dzdx+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy,\end{aligned}}$$

або

$$\boxed{\begin{aligned}&\oint\limits_{L^+} P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz = \\ &= \iint\limits_P \left(\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right)\cos\alpha + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right)\cos\beta + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right)\cos\gamma \right) dP,\end{aligned}}$$

L^+ - кусково-гладкий простий контур, який обмежує поверхню P.

2. Об'єм просторової області $\overline{G}$ можна знайти, використавши формулу:

$$\boxed{V(G) = \frac{1}{3}\iint\limits_P xdydz + ydzdx + zdxdy}$$

✍**1. [11, с.271]** *З допомогою теореми Остроградського – Гаусса обчислити поверхневі інтеграли*:

1.1. $\iint\limits_P (1+2x)dydz + (2x+3y)dxdz + (3y+4z)dxdy$*, де* P*:*

а) зовнішня сторона поверхні піраміди $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} + \dfrac{z}{c} \le 1,$ $x \ge 0,\ y \ge 0,\ z \ge 0$*;*

б) внутрішня сторона поверхні $|x-y+z| + |y-z+z| + |z-x+y| = a$.

1.2. $\iint\limits_P zdxdy + (5x+y)dydz$*, де* P*:*

а) зовнішня сторона повної поверхні конуса $x^2 + y^2 \le z^2,\ 0 \le z \le 4;$

б) внутрішня сторона еліпсоїда $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} + z^2 = 1$*;*

в) зовнішня сторона межі області $1 < x^2 + y^2 + z^2 < 4$.

1.3. $\iint\limits_P x^2dydz + y^2dzdx + z^2dxdy$*, де* P*:*

а) внутрішня сторона поверхні паралелепіпеда $0 \le x \le a,\ \ 0 \le y \le b,$ $0 \le z \le c$*;*

б) зовнішня сторона повної поверхні $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} \le \dfrac{z^2}{c},\ 0 \le z \le c$ *(конус).*

1.4. $\iint\limits_P x^3dydz + y^3dxdz + z^3dxdy$, *де* P:

а) зовнішня сторона поверхні тетраедра $x + y + z \le a,\ \ x \ge 0,\ y \ge 0,\ z \ge 0$*;*

б) внутрішня сторона сфери $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$.

1.5. $\iint\limits_P x^4dydz + y^4dzdx + z^4dxdy$, *де* P:

а) сфера $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$*;*

б) зовнішня сторона повної поверхні півкулі $x^2 + y^2 + z^2 \le R^2,\ z \ge 0$.

В. 1а) $\dfrac{3abc}{2}$; 1б) $-3a^3$; 2а) 128π, 2б) -48π; 2в) 56π;

3а) $(a+b+c)abc$, 3б) $\dfrac{\pi abc^2}{2}$, 4а) $\dfrac{3a^5}{20}$, 4б) $\dfrac{12\pi R^5}{5}$, 5а) 0, 5б) $\dfrac{\pi R^6}{3}$.

✍**2. [7, с.212]** *За допомогою поверхневого інтеграла знайти об'єм тіла, обмеженого поверхнями:*:

2.1. $x^2 + y^2 = 8,\ x = 0,\ y = 0,\ z = 0,\ x + y + z = 4;$

2.2. $x^2 + 4y^2 = 1 - z,\ z = 0;$ ***2.3.*** $\dfrac{x^2}{5} + \dfrac{y^2}{9} = 1,\ y = z,\ z = 0;$

2.4. $y = x^2,\ y = 1,\ \ x + y + z = 4,\ \ z = 0;$

2.5. $x^2 + y^2 + z^2 = 4,\ 3z = x^2 + y^2;$ ***2.6.*** $x^2 + y^2 = 4 - z,\quad 2z = 2 + x^2 + y^2.$

В. 1) $8\pi - \dfrac{32\sqrt{2}}{3}$; 3) $6\sqrt{5}$; 5) $\dfrac{19\pi}{6}$.

✍**3. [7, с.210]** *Обчислити дані криволінійні інтеграли за допомогою формули Стокса*:

3.1. $\int\limits_L (y+z)dx + (x+z)dy + (x+y)dz,\ L$ *- коло* $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = a^2, \\ x + y + z = 0, \end{cases}$

3.2. $\int\limits_L x^2y^3dx + dy + zdz,\ \ L$ *- коло* $\begin{cases} x^2 + y^2 = R^2, \\ z = 0, \end{cases}$

✍**4.** *Використовуючи формулу Стокса, обчислити інтеграл :*

4.1 $\int\limits_L z^3dx + x^3dy + y^3dz$, *де* L *– крива* $2x^2 - y^2 + z^2 = a^2$, $x + y = 0$, *орієнтованої додатно відносно вектора (1;0;0)*.

4.2 $\int\limits_L (y^2 + z^2)dx + (z^2 + x^2)dy + (x^2 + y^2)dz$, *де* L *– крива* $x^2 + y^2 + z^2 = 2ax, \quad x^2 + y^2 = 2bx, \quad z > 0, \; 0 < b < a$, *орієнтованої додатно відносно вектора (0;0;1).*

4.3 $\int\limits_L ydx - zdy + xdz$, *де* L *– крива* $x^2 + y^2 + 2z^2 = 2a^2$, $y - x = 0$, *орієнтованої додатно відносно вектора (1;0;0)*.

4.4 $\int\limits_L (y - z)dx + (z - x)dy + (x - y)dz$, *де* L *– еліпс* $x^2 + y^2 = a^2$, $\dfrac{x}{a} + \dfrac{z}{c} = 1$, $a > 0, \; c > 0$, *орієнтованої від'ємно відносно вектора (1;0;0).*

4.5 $\int\limits_L (y - z)dx + (z - x)dy + (x - y)dz$, *де* L *– коло* $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, $y = x \cdot \mathrm{tg}\varphi, \; \varphi \in (0;\pi)$, *орієнтованої додатно відносно вектора (1;0;0).*

4.6 $\int\limits_L ydx + zdy + xdz$, *де* L *– коло* $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, $x + y + z = 0$, *орієнтованої додатно відносно вектора (0;0;1).*

4.7 $\int\limits_L (x^2 - z^2)dx + (z^2 - x^2)dy + (x^2 - y^2)dz$, *де* L *– крива перетину поверхні куба* $|x| \le a, \quad |y| \le a, \quad |z| \le a$ *площиною* $x + y + z = \dfrac{3a}{2}$, *орієнтованої додатно відносно вектора (1;0;0).*

4.8 $\int\limits_L \dfrac{xdy - ydx}{x^2 + y^2} + zdz$, *де* L *– коло* $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, $x + y + z = 0$, *орієнтованої додатно відносно вектора (0;0;1).*

4.9 $\int\limits_L y^2dx + z^2dy + x^2dz$, *де* L *– межа трикутника з вершинами в точках (a;0;0), (0;a;0), (0;0;a), орієнтованої додатно відносно вектора (0;1;0).*

4.10 $\int\limits_L (x+z)dx+(x-y)dy+xdz$, *де* L *– еліпс* $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1,\quad z=c$, *орієнтованій від'ємно відносно вектора (0; 0; 1).*

🕮 Практичне заняття № 24

Тема: Скалярні і векторні поля.

✍**1.** Знайти похідну скалярного поля u(x,y,z) в точці М по напрямку вектора $\vec{l}$:

1.1 $u=\left(x^2+y^2+z^2\right)^{3/2}$, $l=\vec{i}-\vec{j}+\vec{k}$, M(1,1,1) ;

1.2 $u=x+\ln\left(y^2+z^2\right)$, $l=-2\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}$, M(2,1,1) ;

1.3 $u=x^2y-\sqrt{xy+z^2}$, $l=2\vec{j}-2\vec{k}$, M(1,5,-2) ;

1.4 $u=y\ln\left(1+x^2\right)-\mathrm{arctg}\ z$, $l=2\vec{i}-3\vec{j}-2\vec{k}$, M(0,1,1) ;

1.5 $u=x\left(\ln y-\mathrm{arctg}\ z\right)$, $l=8\vec{i}+4\vec{j}+8\vec{k}$, M(-2,1,-2) ;

1.6 $u=\ln(3-x^2)+xy^2z$, $l=-\vec{i}+2\vec{j}-2\vec{k}$, M(1,3,2) ;

✍**2. [11, с.286]** *Знайти* $\mathrm{grad}\,u\left(M_0\right)$*, якщо*:

2.1 $u=xy+yz+zx;\quad M_0(1;1;1)$,

2.2 $u=\ln\left(x^2+y^2+z^2\right);\quad M_0(1;1;-1)$,

2.3 $u=\dfrac{9(x+y+z)}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}};\quad M_0(1;-2;-2)$,

2.4 $u=ze^{x^2+y^2+z^2};\quad M_0(0;0;0)$.

В. 1) $(2;2;2)$, 2) $\left(\dfrac{2}{3};\dfrac{2}{3};-\dfrac{2}{3}\right)$, 3) $(4;1;1)$, 4) $(0;0;1)$.

✍**3. [11, с.286]** *Знайти кут між* $\mathrm{grad}\,u\left(M_1\right)$ *і* $\mathrm{grad}\,u\left(M_2\right)$*, якщо*:

3.1 $u=(x+y+z)e^{x+y};\quad M_1(0;0),\ M_2(1;1)$,

3.2 $u=\mathrm{arctg}\dfrac{x}{y+z};\quad M_1(1;1;0),\ M_2(-1;0;1)$,

3.3 $u=\dfrac{x}{x^2+y^2+z^2}$; $\quad M_1(1;2;2),\ M_2(-3;1;0),$

3.4 $u=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$; $\quad M_1\left(3;\sqrt{3};-2\right),\ M_2\left(\sqrt{3};1;2\sqrt{3}\right).$

В. 1) 0; 2) $\arccos\left(-\dfrac{1}{3}\right)$, 3) $\arccos\left(-\dfrac{8}{9}\right)$, 4) $\dfrac{\pi}{2}$.

✍**4. [7, с.218]** *Знайти векторні лінії даного векторного поля:*

4.1 $\vec{u}=-a^2y\vec{i}+b^2x\vec{j},\ a,b$ – *const;*

4.2 $\vec{u}=a\vec{i}+b\vec{j}+c\vec{k},\ a,b,c$ – *const;*

4.3 $\vec{u}=x\vec{i}+y\vec{j}+2z\vec{k},$

4.4 $\vec{E}=\dfrac{g\vec{r}}{r^3}$ *(кулонівське поле точкового заряду* g*, вміщеного у початку координат),* r *– відстань точки від заряду,*

4.5 $\vec{F}=-\dfrac{\gamma m\vec{r}}{r^3}$ *(поле тяжіння, створене матеріальною точкою масою* m*, вміщеною у початку координат,* γ *– гравітаційна стала),* $\vec{r}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$,

4.6 $\vec{u}=grad\,v,\ v=xyz$,

4.7 $\vec{H}=\dfrac{2I}{x^2+y^2}\left(-y\vec{i}+x\vec{j}\right)$ *(магнітне поле напруженості нескінченного прямолінійного струму* I*, що проходить у напрямі осі* Oz*).*

В. 1) $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=C$, 3) $x=C_1y=C_2\sqrt{|z|}$, 5) $x=C_1t,\ y=C_2t,\ z=C_3t$.

✍**5. [7, с.218]** *Знайти дивергенцію даного векторного поля* $\left(\vec{r}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k},\ r=|\vec{r}|,\ \vec{a},\vec{b},\vec{c}-const\right)$*:*

5.1 $\vec{u}=\left(x^2+y^2\right)\vec{i}+\left(y^2+z^2\right)\vec{j}+\left(z^2+x^2\right)\vec{k},$

5.2 $\vec{u}=(x-y)(y-z)\vec{i}+(y-z)(z-x)\vec{j}+(z-x)(x-y)\vec{k},\ P(1,2,3)$**,**

5.3 $\vec{u}=\varphi\vec{a},\ \varphi=xy^2z^3,\ \vec{a}=2\vec{i}+3\vec{j}-\vec{k},$

5.4 $\vec{u} = \operatorname{grad}\varphi,\ \varphi = e^{x+y+z}$,

5.5 $\vec{u} = x^2 y\vec{i} + xy^2\vec{j} + z^2\vec{k},\ P(1,2,-1)$,

5.6 $\vec{H} = \dfrac{2I}{x^2+y^2}\left(-y\vec{i} + x\vec{j}\right)$,

5.7 $\vec{u} = \dfrac{\vec{r}}{r}$,

5.8 $\vec{u} = f(r)\vec{r}$,

5.9 $\vec{u} = \left[\vec{v},\vec{r}\right],\ \vec{v} = x^2\vec{i} + y^2\vec{j}$,

5.10 $\vec{u} = r^2\vec{c}$,

5.11 $\vec{u} = f(r)\vec{c}$,

5.12 $\vec{u} = \left(\vec{b}\left(\vec{r},\vec{a}\right)\right)$,

5.13 $\vec{u} = \left(\vec{r}\left(\vec{r},\vec{a}\right)\right)$,

5.14 $\vec{u} = r\left[\vec{c},\vec{r}\right]$,

5.15 $\vec{u} = \left[\vec{a}\left[\vec{r},\vec{b}\right]\right]$.

В. 1) $2(x+y+z)$, 3) $2y^2z^3 + 6xyz^3 - 3xy^2z^2$, 5) 14, 7) $\dfrac{2}{r}$, 9) 0,

11) $\dfrac{f'(r)}{4}\left(\vec{r},\vec{c}\right)$, 13) $4\left(\vec{r},\vec{a}\right)$, 15) $2\left(\vec{a},\vec{b}\right)$.

✍**6. [11, с.290]** *Перевірити вказані рівності в координатній формі, а також записати і перевірити їх, використовуючи символ* ∇ *і правила дії з ним (*α,β *– числа,* $u,\vec{a},\vec{b}$ *– диференційовні скалярне і векторні поля,* $\vec{c}$ *– сталий вектор) :*

6.1 $\operatorname{rot}\left(\alpha\vec{a} + \beta\vec{b}\right) = \alpha\operatorname{rot}\vec{a} + \beta\operatorname{rot}\vec{b}$,

6.2 $\operatorname{rot}(u\vec{c}) = \left[\operatorname{grad}u,\vec{c}\right]$,

6.3 $\operatorname{rot}(u\vec{a}) = u\operatorname{rot}\vec{a} + \left[\operatorname{grad}u,\vec{a}\right]$,

6.4 $\operatorname{rot}\left[\vec{c},\vec{a}\right] = \vec{c}\operatorname{div}\vec{a} - \left(\vec{c},\nabla\right)\vec{a}$,

6.5 $\operatorname{rot}\left[\vec{a},\vec{b}\right] = \left(\vec{b},\operatorname{rot}\vec{a}\right) - \left(\vec{a},\operatorname{rot}\vec{b}\right)$,

6.6 $\operatorname{div}\left[\vec{a},\vec{b}\right] = \left(\vec{b},\operatorname{rot}\vec{a}\right) - \left(\vec{a},\operatorname{rot}\vec{b}\right)$.

✍**7. [11, с.291]** *Обчислити* $\operatorname{rot}\vec{a}$ *в точці* M_0*, якщо:*

7.1 $\vec{a} = xyz\vec{i} + (2x+3y-z)\vec{j} + \left(x^2+y^2\right)\vec{k};\ M_0(1;3;2)$,

7.2 $\vec{a} = \dfrac{y}{z}\vec{i} + \dfrac{z}{z}\vec{j} + \dfrac{x}{y}\vec{k};\ M_0(1;2;-2)$.

В. 1) $\vec{i}+\vec{j}$**,** 2) $-\frac{5}{4}\vec{i}-\vec{j}+\frac{5}{2}\vec{k}$.

✍**8. [11, с.291]** *Знайти кут між* $\operatorname{rot}\vec{a}\left(M_1\right)$ *і* $\operatorname{rot}\vec{a}\left(M_2\right)$, *якщо:*

8.1 $\vec{a}=\left(x^2+y^2\right)\vec{i}+\left(y^2+z^2\right)\vec{j}+\left(z^2+x^2\right)\vec{k}$, $M_1(1;2;3)$, $M_2(1;1;-1)$,

8.2 $\vec{a}=z^3\vec{i}+\left(x^3+y^3\right)\vec{j}+xyz\vec{k}$, $M_1(1;2;0)$, $M_2(1;12;4)$.

В. 1) $\frac{\pi}{2}$**,** 2) $\arccos\left(\frac{3}{5}\right)$.

✍**9. [11, с.219]** *Обчислити потік даного векторного поля через поверхню* P *(у задачах 9.13-9.18 скористатись формулою Остроградського – Гаусса), якщо:*

9.1 $\vec{r}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$**,**

а) P **-** *зовнішня поверхня прямого конуса з радіусом основи* R *та висотою* H, *вершина якого збігається з початком координат;*

б) P **-** *зовнішня поверхня прямого конуса з радіусом основи* R *та висотою* H, *центр нижньої основи якого лежить у початку координат;*

в) P **-** *зовнішня поверхня сфери з радіусом* R *та центром у початку координат;*

9.2 $\vec{u}=xy\vec{i}+(y+z)\vec{j}+(x+2z)\vec{k}$**,** P **-** *зовнішня частина площини* $2x+y+z=2$, *яка міститься у першому октанті;*

9.3 $\vec{E}=\frac{q\vec{r}}{r^3}$, $\vec{r}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$, *якщо:*

а) P **-** *поверхня сфери з центром у точці розміщення заряду* q *і радіусом* R*;*

б) P **-** *поверхня сфери, яка не містить заряду* q*;*

в) P **-** *довільна замкнена поверхня;*

9.4 $\vec{u}=x^3\vec{i}+y^3\vec{j}+z^3\vec{k}$, P **-** *зовнішня поверхня конуса* $x^2+y^2\le\frac{R^2}{h^2}z^2$, $0\le z\le h$;

9.5 $\vec{u} = rot\vec{v}$, P - *довільна замкнена поверхня;*

9.6 $\vec{u} = (x - 2z)\vec{i} + (3z - 4x)\vec{j} + (5x + y)\vec{k}$, P - *зовнішня поверхня піраміди з вершинами* $A(1,0,0)$, $B(0,1,0)$, $C(0,0,1)$, $O(0,0,0)$;

9.7 $\vec{u} = x^2\vec{i} + x\vec{j} + xz\vec{k}$, P - *зовнішня поверхня частини параболоїда* $y = x^2 + z^2$, $0 \le y \le 1$, *розміщена у першому октанті;*

9.8 $\vec{u} = x^2\vec{i} + y^2\vec{j} + z\vec{k}$, P - *зовнішня поверхня тіла* $\frac{H}{R}\sqrt{x^2 + y^2} \le z \le H$;

9.9 $\vec{u} = 2x\vec{i} - y\vec{j}$, P - *частина зовнішньої поверхні циліндра* $x^2 + y^2 = R^2$, $x \ge 0$, $y \ge 0$, $0 \le z \le H$;

9.10 $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} - 2z\vec{k}$, P - *зовнішня поверхня* $|x| \le a$; $|y| \le a$; $|z| \le a$;

9.11 $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, P - *зовнішня поверхня еліпсоїда* $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$, $x \ge 0$, $y \ge 0$, $z \ge 0$;

9.12 $\vec{u} = x^2\vec{i} - y^2\vec{j} + z^2\vec{k}$, P - *зовнішня поверхня тіла* $x^2 + y^2 + z^2 \le 3R^2$, $0 \le z \le \sqrt{x^2 + y^2 - R^2}$;

9.13 $\vec{u} = \frac{\vec{r}}{r}$, $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, P - *зовнішня поверхня сфери* $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$;

9.14 $\vec{u} = 2x\vec{i} + y\vec{j} - z\vec{k}$, P - *поверхня частини параболоїда* $y^2 + z^2 = Rx$, *що відтинається площиною* $x = R$ *у напрямі від'ємної частини осі абсцис;*

9.15 $\vec{u} = (x + z)\vec{i} + (z + y)\vec{k}$, P - *зовнішня сторона замкненої поверхні* $x^2 + y^2 = 9$, $z = 0$, $z = y$ $(z \ge 0)$;

9.16 $\vec{u} = xy^2\vec{i} + yz^2\vec{j} + zx^2\vec{k}$, P - *зовнішня поверхня сфери* $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$;

9.17 $\vec{u} = x^2\vec{i} + x\vec{j} + xz\vec{k}$, P - *зовнішня сторона замкненої поверхні* $y = x^2 + z^2$, $x = 0$, $y = 1$, $z = 0$ $(x \ge 0)$.

В. *1а)* $\pi R^2 H$ *; 1б)* $3\pi R^2 H$ *; 1в)* $4\pi R^3$*; 3а)* $-4\pi q$*; 3б) 0; 3в) 0; 5) 0;*

7) $\frac{1}{15}$*; 9)* $\frac{\pi R^2 H}{4}$*; 11)* $\frac{\pi abc}{2}$*; 13)* $4\pi R^2$*; 15) 36; 17)* $\frac{2}{5}$.

Контрольна робота №2 (зразок) (15 балів).

1. Знайти масу частини ланцюгової лінії $y = a\,\mathrm{ch}\frac{x}{a}$ між точками з абсцисами $x_1 = 0$ і $x_2 = a$, якщо густина лінії в кожній її точці обернено пропорційна ординаті точки, причому густина в точці $(0;a)$ дорівнює γ (**В.** γa).

2. Обчислити $\int\limits_L \frac{x^2dy - y^2dx}{\sqrt[3]{x^5} + \sqrt[3]{y^5}}$, де L - дуга астроїди $x = 2\cos^3 t,\ y = 2\sin^3 t$ від точки $A(2;0)$ до точки $B(0;2)$ $\left(\text{В. } \frac{3\sqrt{2}\pi}{8}\right)$.

3. Обчислити інтеграл $\oint\limits_L \left(x^2 + y^2\right)dx + \left(x^2 - y^2\right)dy$, де L - контур трикутника з вершинами $A(0;0),\ B(1;0),\ C(0;1)$ (**В.** $-\frac{1}{3}$).

4. Довести, що вираз $\left(2x - 3y^2 + 1\right)dx + \left(2 - 6xy\right)dy$ є повним диференціалом функції $u(x,y)$. Знайти функцію $u(x,y)$.

5. Обчислити роботу сили $\vec{F} = xy\vec{i} + (x + y)\vec{j}$ при переміщенні матеріальної точки вздовж прямої $y = x$ від точки $(0;0)$ до точки $(1;1)$.

6. Застосувавши формулу Гріна, обчислити інтеграл $\oint y^2dx + (x + y)^2 dy$ вздовж контуру трикутника ABC з вершинами $A(2;0),\ B(2;2),\ C(0;2)$ $\left(\text{В. } \frac{16}{3}\right)$.

7. Обчислити поверхневий інтеграл першого роду $\iint\limits_P \sqrt{x^2+y^2}\,dP$, якщо P - частина поверхні конуса $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{16}=\frac{z^2}{9}$, розташована між площинами $z=0$ і $z=3$ В. $\frac{160\pi}{3}$.

8. Знайти потік векторного поля $\vec{a}$ через частину поверхні P, яка вирізається площиною π (нормаль зовнішня до замкнутої поверхні): $\vec{a}=\left(x+xy^2\right)\vec{i}+\left(y-yx^2\right)j+\left(z-3\right)\vec{k}$, $P:\ x^2+y^2=z^2\ \left(z\ge 0\right),\ \pi: z=1$.

9. Обчислити дивергенцію векторного поля $\vec{a}\left(M\right)=\left(xy+z^2\right)\vec{i}+\left(yz+x^2\right)\vec{j}+\left(zx+y^2\right)\vec{k}$ в точці $M\left(1;3;-5\right)$.

10. Знайти циркуляцію векторного поля $\vec{a}$ вздовж кривої L (в напрямку, який відповідає зростанню параметра t):

$$\vec{a}=y\vec{i}-x\vec{j}+z^2\vec{k},\ L:\begin{cases} x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cos t,\ y=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cos t, \\ z=\sin t \end{cases}$$

11. Знайти ротор векторного поля $\vec{a}\left(M\right)=xyz\vec{i}+\left(x+y+z\right)\vec{j}+\left(x^2+y^2+z^2\right)\vec{k}$ в точці $M\left(1;-1;2\right)$.

12. Обчислити потік векторного поля $\vec{a}=\left(x+z\right)\vec{i}+\left(z+y\right)\vec{k}$ через поверхню P, скориставшись формулою Остроградського – Гаусса, якщо P - зовнішня сторона замкненої поверхні $x^2+y^2=9,\ z=0,\ z=y\ \left(z\ge 0\right)$;

13. Використовуючи формулу Стокса, обчислити інтеграл $\int\limits_L z^3dx+x^3dy+y^3dz$, де L – крива $2x^2-y^2+z^2=a^2,\ \ x+y=0$, орієнтованої додатно відносно вектора (1;0;0).

14. Встановити потенціальність поля

$$\vec{a}\left(M\right)=e^{\frac{y}{z}}\vec{i}+\left(\frac{e^{\frac{y}{z}}\left(x+1\right)}{z}+ze^{yz}\right)\vec{j}+\left(\frac{e^{\frac{y}{z}}\left(x+1\right)y}{z^2}+ye^{yz}+e^{-z}\right)\vec{k}$$

і знайти його потенціал.

Список рекомендованої літератури

1. Берман Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа. – М.: Изд-во физ.-мат. литературы, 1958. – 436 с.
2. Виленкин Н.Я.,Бохан К.А., Марон И.А. и др. Задачник по курсу математического анализа. – М.: Просвещение, 1971.–Ч.2.– 336 с.
3. Давыдов Н.А.,Коровин П.П.,Никольский В.Н. Сборник задач по математическому анализу. – М.: Просвещение, 1973. – 256 с.
4. Давидов М.О. Курс математичного аналізу. – К.: Вища школа, 1979. – Ч. 1, 2. – 366 с.
5. Давидов М.О. Курс математичного аналізу. – К.: Вища школа, 1979. – Ч. 3. – 384 с.
6. Дороговцев А.Я. Математический анализ: Сборник задач. – К.: Вища школа, 1987. – 408 с.
7. Дюженкова Л.І., Колесник Т.В., Ляшенко М.Я., Михалін Г.О., Шкіль М.І. Математичний аналіз у задачах і прикладах. К.: Вища школа, 2003. – Ч. 2. – 470с.
8. Запорожец Г.И. Руководство к решению задач по математическому анализу. – М.: Высшая школа, 1966. – 460 с.
9. Зорич В.А. Математический анализ. – М.: Наука, Ч.1. – М.: Наука, 1981.–543 с., 1984. – Ч.2. – 640 с.
10. Кудрявцев Л.Д. Курс математического анализа. – М.: Высшая школа, 1989. – Т.1, 2, 3.
11. Кудрявцев Л.Д., Кутасов А.Д., Чехлов В.И., Шабунин М.И. Сборник задача по математическому анализу.Интегралы. Ряды. – М.: Наука, 1986. – 528 с.
12. Ляшко И.И., Боярчук А.К., Гай Я.Г., Головач Г.П. Справочное пособие по математическому анализу. – К.: Высшая школа, 1979. – Ч.2.
13. Ляшко И.И., Боярчук А.К., Александрович И.Н., Молодцов А.И., Рублев Б.В. Сборник задач и упражнений по математическому анализу. – М.: Изд. Дом „Вильямс”, 2001. – Ч.1. – 432 с.
14. Рябушко А.П., Бархатов В.В., Державец В.В., Юруть И.Е. Сборник индивидуальных заданий по высшей математике. – Минск: Вышейшая школа, 1990. – Ч. 2. – 360 с.
15. Рябушко А.П., Бархатов В.В., Державец В.В., Юруть И.Е. Сборник индивидуальных заданий по высшей математике. – Минск: Вышейшая школа, 1990. – Ч. 3.

Таблиця похідних та інтегралів від елементарних функцій

№	*Похідні від елементарних функцій*	*Інтеграли від елементарних функцій*
1	$\left(x^n\right)' = nx^{n-1}$	$\int dx = C$, $\int kdx = kx + C$
2	$\left(\sqrt{x}\right)' = -\frac{1}{2\sqrt{x}}$ $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$	$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C,$ якщо $n \neq -1$
3	$\left(a^x\right)' = a^x \ln a$, $\left(e^x\right)' = e^x$	$\int \frac{dx}{x} = \ln\lvert x\rvert + C$
4	$\left(\log_a x\right)' = \frac{1}{x\ln a}$, $\left(\ln x\right)' = \frac{1}{x}$	$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$, $\int e^x dx = e^x + C$
5	$\left(\sin x\right)' = \cos x$	$\int \sin x dx = -\cos x + C$
6	$\left(\cos x\right)' = -\sin x$	$\int \cos x dx = \sin x + C$
7	$\left(\mathrm{tg}\, x\right)' = \frac{1}{\cos^2 x}$	$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \mathrm{tg}\, x + C$
8	$\left(\mathrm{ctg}\, x\right)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$	$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\mathrm{ctg}\, x + C$
9	$\left(\arcsin x\right)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C = -\arccos\frac{x}{a} + C$
10	$\left(\arccos x\right)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a}} = \ln\left\lvert x + \sqrt{x^2 + a}\right\rvert + C$
11	$\left(\mathrm{arctg}\, x\right)' = \frac{1}{1+x^2}$	$\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a}\mathrm{arctg}\frac{x}{a} + C$
12	$\left(\mathrm{arcctg}\, x\right)' = -\frac{1}{1+x^2}$	$\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left\lvert\frac{x-a}{x+a}\right\rvert + C$
13	$\left(\mathrm{sh}\, x\right)' = \mathrm{ch}\, x$	$\int \mathrm{sh}\, x dx = \mathrm{ch}\, x + C$
14	$\left(\mathrm{ch}\, x\right)' = \mathrm{sh}\, x$	$\int \mathrm{ch}\, x dx = \mathrm{sh}\, x + C$
15	$\left(\mathrm{th}\, x\right)' = \frac{1}{\mathrm{ch}^2 x}$	$\int \ln x dx = x\ln x - x + C$
16	$\left(\mathrm{cth}\, x\right)' = -\frac{1}{\mathrm{sh}^2 x}$	$\int \sin x dx = \ln\lvert\mathrm{tg}\frac{x}{2}\rvert + C$

Навчальне видання

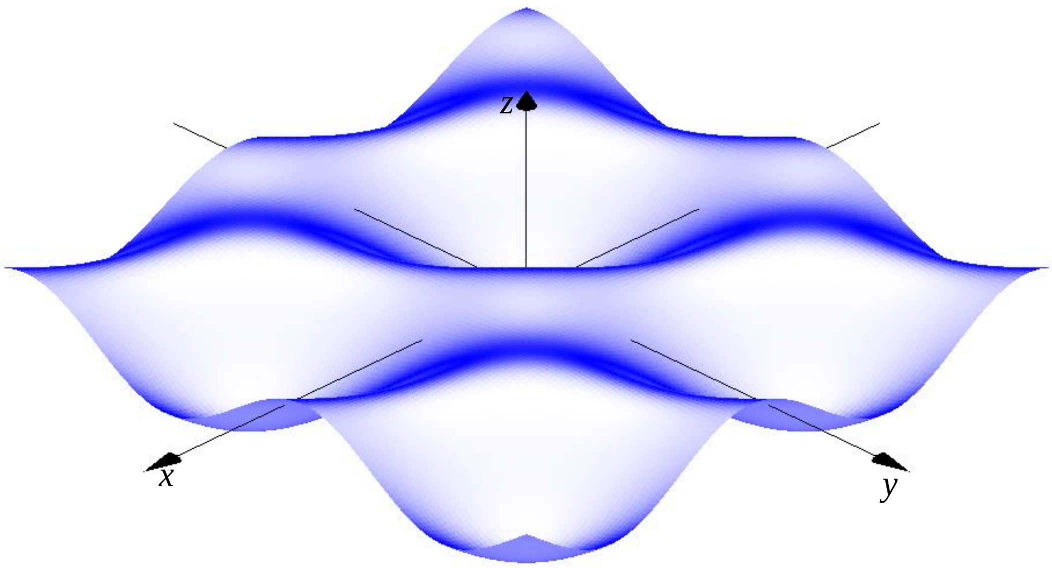
Ковтонюк Мар'яна Михайлівна
Бак Сергій Миколайович

Комп'ютерна верстка та набір Бака С.М., Ковтонюк М.М.

РОБОЧИЙ ЗОШИТ СТУДЕНТА
з математичного аналізу
IV семестр
Диференціальне та інтегральне числення функцій багатьох змінних.
(за вимогами кредитно-трансферної системи)

Папір офсетний. Гарнітура Times.
Ум. друк. арк. 3,2.
Наклад 300 примірників. Замовлення №
Віддруковано з оригіналів.

21010 м.Вінниця, вул. Острозького, 32.


z
x
y