

Вінницький державний педагогічний університет
імені Михайла Коцюбинського
Інститут математики, фізики і технологічної освіти

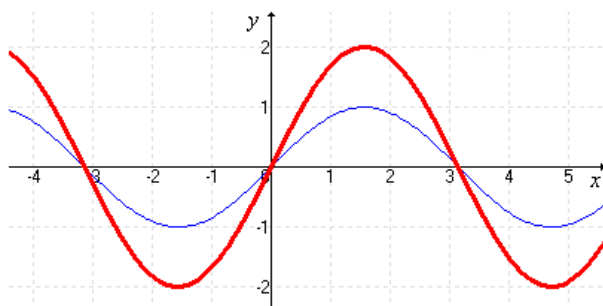
Кафедра математики та інформатики

РОБОЧИЙ ЗОШИТ СТУДЕНТА
з математичного аналізу

I семестр

Вступ в математичний аналіз

(за вимогами кредитно-модульної системи)



Вінниця 2018

Індивідуальний робочий зошит студента

Дисципліна: математичний аналіз

Розділ: Вступ в математичний аналіз

Укладачі: завідувач кафедри математики та інформатики,
доктор педагогічних наук,
кандидат фізико-математичних наук,
професор **Ковтонюк М. М.**
кандидат фізико-математичних наук,
доцент кафедри математики та інформатики **Бак С. М.**

Рецензенти: кандидат фізико-математичних наук,
доцент **Тимошенко О. З.**

Затверджено і рекомендовано до друку рішенням кафедри математики ВДПУ імені Михайла Коцюбинського, протокол №1 від 29 серпня 2018 року.

Передмова

Робочий зошит з математичного аналізу призначений для використання студентами денної і заочної форм навчання фізико-математичних спеціальностей при вивченні тем “Вступ в математичний аналіз”, „Границя числової послідовності” та „Границя функції у точці” в умовах кредитно-модульного навчання.

У **Робочому** зошиті подано робочий план студента з вказаних тем, за яким весь загальний обсяг матеріалу поділено на два загальні модулі поточного контролю, які відповідають двом змістовим модулям, наведено розрахунки рейтингових балів за видами поточного контролю, а також за модулями.

Кожен модуль складається з практичних занять з добіркою типових завдань для аудиторного і самостійного опрацювання та тексти самостійних робіт.

Після кожного модуля подано зразок контрольної роботи або тестового завдання із типовими завданнями. Для допомоги у виконанні самостійної роботи в зошиті подано список рекомендованої літератури і шкалу оцінювання знань згідно з ECTS.

1. Робочий план студента.

Робочий план студента складений на основі навчальної програми з математичного аналізу, затвердженої Вченою радою Вінницького державного педагогічного університету імені Михайла Коцюбинського.

Шкала оцінювання знань студентів у 2018-2019 навчальному році

| Мінімальний бал для отримання позитивної оцінки – 50, максимальний - 100 | Оцінка за розширеною шкалою | Оцінка ЄКТС |
|--|-----------------------------|-------------|
| 90-100 | відмінно | A |
| 80-89 | дуже добре | B |
| 65-79 | добре | C |
| 55-64 | задовільно | D |
| 50-54 | достатньо | E |
| 35-49 | незадовільно | FX |
| 1-34 | неприйнятно | F |

Розподіл рейтингових балів за видами діяльності

| № | Вид діяльності | Коефіцієнт вартості (бали) | Кількість робіт | Результат (бали) |
|------------------------------------|-------------------|----------------------------|-----------------|-------------------|
| 1. | Творче завдання | 16 | 1 | 16 |
| 2. | Практичні заняття | 0,5 | 16 | 8 |
| 3. | Домашні завдання | 0,5 | 16 | 8 |
| 4. | Самостійні роботи | 10 | 1 | 10 |
| 5. | Контрольна робота | 12 | 2 | 24 |
| 6. | Колоквіум | 14 | 1 | 14 |
| Всього за 1-й семестр: | | | | 80 (80%) |
| Екзамен | | | | 20 (20%) |
| Підсумковий рейтинговий бал | | | | 100 (100%) |

МОДУЛЬ 1.

📖 Практичне заняття №1

Тема: Множини

✎1. Задайте переліком елементів множини:

1.1. B – множини коренів рівняння $x^4 - 4x^2 = 0$;

1.2. $H = \{x : (x-2)(x+2) = 0\}$;

1.3. A – множини натуральних чисел, кратних 3 і менших 25;

1.4. C – множини коренів рівняння $x^2 - 5x + 6 = 0$;

1.5. $D = \{x : x^2 - 3x + 2 = 0\}$;

1.6. $E = \{2n+1 : n \in \mathbb{N} \text{ і } n \leq 20\}$;

1.7. $F = \{x : x^2 - 2x + 2 = 0\}$.

Відповідь: 1) $\{-2, 0, 2\}$; 2) $\{-2; 2\}$; 3) $\{3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24\}$;
4) $\{2; 3\}$; 5) $\{1; 2\}$; 6) $\{3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19\}$; 7) \emptyset .

✎2. Дано множини $A = \{a, b, c, 1, 3\}$, $B = \{b, d, 6, 3\}$, $C = \{b, 1, 6\}$.

Знайти:

а) $A \cap B$; б) $A \cap C$; в) $C \cap B$; г) $A \cap B \cap C$.

✎3. Дано: $A = \{x : x^2 - 5x + 6 = 0\}$, $B = \{x : x^2 - 3x + 2 = 0\}$. Знайти:
 $A \cap B$. Відповідь: $\{2\}$.

✎4. Дано: $A = \{1, 3, 5, 7\}$, $B = \{1, 5, 7, 9\}$, $C = \{2, 4\}$. Знайти:

4.1. $A \cup B$; 4.2. $A \cup C$; 4.3. $C \cup B$; 4.4. $A \cup B \cup C$.

✎5. Дано: $A = \{x : x^2 - 4x + 3 = 0\}$, $B = \{x : x^2 - 7x + 12 = 0\}$. Знайти:
 $A \cup B$. Відповідь: $\{1, 3, 4\}$.

✎6. Дано: $M = \{a, b, c, d\}$, $N = \{b, d\}$. Знайти:

6.1. $M \setminus N$; 6.2. $N \setminus M$; 6.3. $(M \setminus N) \cup (N \setminus M)$.

✎7. Для даних множин A і B знайти $A \cup B$ та $A \cap B$:

7.1. $A = [0; 5]$, $B = (1; 6)$; 7.2. $A = (-1; 0]$, $B = [0; 2)$;

7.3. $A = (-\infty; 0)$, $B = [0; 6)$; 7.4. $A = (-1; 0)$, $B = [0; 9)$.

✎8. Для даних множин A , B , C знайти $A \cap B \cap C$ та $A \cup B \cup C$:

8.1. $A = [-2; 2]$, $B = (-\infty; 0)$, $C = [0; 5)$;

8.2. $A = (-5; 8)$, $B = (-2; 10)$, $C = (0; 13)$;

8.3. $A = (2; 10)$, $B = (3; 9)$, $C = (4; 8)$;

8.4. $A = (-\infty; 4]$, $B = [4; +\infty)$, $C = (0; 4)$.

9. Задайте переліком елементів множини:

9.1. $A = \left\{ x \in \mathbb{R} : x + \frac{1}{x} \leq 2 \text{ і } x > 0 \right\}$;

9.2. $B = \left\{ x \in \mathbb{Z} : \frac{1}{4} \leq 2^x < 5 \right\}$;

9.3. $C = \left\{ x \in \mathbb{R} : \sin x + \cos x = 1 \text{ і } 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \right\}$;

9.4. $B = \left\{ x \in \mathbb{Z} : \frac{1}{9} \leq 3^x < 10 \right\}$;

9.5. $C = \left\{ x \in \mathbb{R} : \sin^2 2x = 1 \text{ і } 0 < x < \pi \right\}$;

9.6. $C = \left\{ x \in \mathbb{R} : \sin x + \cos x = \sqrt{2} \text{ і } 0 < x < \frac{\pi}{2} \right\}$.

Відповідь: 1) $\{1\}$; 2) $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$; 3) $\{0; \pi/2\}$; 6) $\{0; \pi/4\}$.

10. Зобразити на координатній площині такі множини:

10.1. $A = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 : x - y = 1\}$;

10.2. $B = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$;

10.3. $C = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 : (x - y)(x + y) = 0\}$;

10.4. $D = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 : y > x^2\}$;

10.5. $E = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 9\}$;

10.6. $F = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 : xy \geq 1\}$;

10.7. $B = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| \leq 1\}$;

10.8. $B = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 : y < \sqrt{x}\}$;

10.9. $B = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + (y + 1)^2 < 4\}$;

10.10. $B = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 : y < 2^{x-1} + 1\}$.

11. Знайти об'єднання, переріз та різницю множин A і B :

11.1. $A = \{x \in \mathbb{R} : 0 < x < 2\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} : 1 \leq x \leq 3\}$;

11.2. $A = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 2x > 0\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 4x + 3 > 0\}$;

$$11.3. A = \left\{ x \in \mathbb{R} : \frac{x^2 - 5x + 6}{x - 4} < 0 \right\}, B = \left\{ x \in \mathbb{R} : \frac{x - 1}{x + 2} \leq 0 \right\};$$

$$11.4. A = \left\{ x \in \mathbb{R} : \sqrt{x + 2} > x \right\}, B = \left\{ x \in \mathbb{R} : \frac{1}{\sqrt{x + 2}} < \frac{1}{x} \right\};$$

$$11.5. A = \left\{ x \in \mathbb{R} : \sin x > \frac{1}{2} \right\}, B = \left\{ x \in \mathbb{R} : \cos x \leq \frac{1}{2} \right\};$$

$$11.6. A = \left\{ x \in \mathbb{R} : 2^{2x} - 6 \cdot 2^x + 8 \geq 0 \right\}, B = \left\{ x \in \mathbb{R} : \log_{\frac{1}{2}}(x - 1,5) > 1 \right\}.$$

Відповідь: 1) $A \cup B = (0; 3]$, $A \cap B = [1; 2)$, $A \setminus B = (0; 1)$; 2) $A \cup B = (-\infty; 1) \cup (2; +\infty)$, $A \cap B = (-\infty; 0) \cup (3; +\infty)$, $A \setminus B = (2; 3)$; 3) $A \cup B = (-\infty; 2) \cup (3; 4)$, $A \cap B = (-2; 1]$, $A \setminus B = (-\infty; -2] \cup (1; 2) \cup (3; 4)$

12. *Напишіть множину нижніх і множину верхніх меж для множин:*

$$12.1 \quad X = (-2; 2),$$

$$12.2 \quad X = [3; +\infty)$$

$$12.3 \quad X = (-5; 3],$$

$$12.4 \quad X = \mathbb{Q}^+,$$

$$12.5 \quad X = \left\{ \frac{2}{3n}, n \in \mathbb{N} \right\},$$

$$12.6 \quad X = \left\{ \sin \frac{\pi}{n}, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

13. *Знайдіть точну нижню межу множин:*

$$13.1 \quad X = [3; 6),$$

$$13.2 \quad X = \left\{ \frac{n}{n+1}, n \in \mathbb{N} \right\}$$

14. *Знайдіть точну верхню межу множин:*

$$14.1 \quad X = \left\{ -\frac{n}{2n+1}, n \in \mathbb{N} \right\},$$

$$13.2 \quad X = \{E(f), \text{ де } f(x) = 6 \cos 3x\}$$

15. *Знайдіть множину верхніх і нижніх меж множини розв'язків нерівності $\log_4 \frac{9 - 2x}{x + 2} < 0$.*

16. *Знайдіть точні верхню і нижню межі множини розв'язків нерівності $\log_8 \left(1 - \frac{1}{x} \right) + \log_{\frac{1}{8}} \left(1 - \frac{x}{6} \right) \leq 1$.*

17. *Знайдіть множину таких значень параметра a , при яких відношення дискримінанта рівняння $ax^2 - 3x + 1 = 0$ до квадрата*

різниці його коренів буде менше, ніж точна верхня межа множини

$$X = \left\{ \frac{11}{10n+1}, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

📖 Практичне заняття №2

Тема: Дійсні числа

✍️1. Виконайте дії та запишіть у вигляді нескінченного десяткового дробу:

1.1. $\frac{1}{3} + \frac{2}{7}$;

1.4. $-\frac{5}{6} \cdot (-0,4)$;

1.7. $\frac{229}{54}$;

1.2. $\frac{2}{3} - 0,17$;

1.5. $-\frac{29}{11}$;

1.8. $\frac{5}{33}$;

1.3. $\frac{4}{7} + 0,3$;

1.6. $\frac{37}{13}$;

1.9. $\frac{223}{111}$.

✍️2. Подайте у вигляді звичайного дробу:

2.1. $0,(2)$;

2.4. $0,(37)$;

2.7. $1,2(3)$;

2.2. $0,(7)$;

2.5. $-1,(0011)$;

2.8. $2,1(32)$;

2.3. $0,(23)$;

2.6. $0,(309)$;

2.9. $0,01(98)$.

✍️3. Обчислити і результати записати у вигляді звичайного дробу:

3.1. $\frac{0,1(2) + 0,3(4)}{0,4(5) - 0,2(3)}$;

3.2. $\frac{0,70(14)}{0,00(62)}$.

Відповідь: 1) 2; 2) 112.

✍️4. Які з даних чисел раціональні, а які – ірраціональні:

4.1. $\frac{\sqrt{6,3 \cdot 1,7} \cdot \left(\sqrt{\frac{6,3}{1,7}} - \sqrt{\frac{1,7}{6,3}} \right)}{\sqrt{(6,3 + 1,7)^2 - 4 \cdot 6,3 \cdot 1,7}}$;

4.2. $\sqrt{9 - 4\sqrt{5}} + \sqrt{14 - 6\sqrt{5}}$;

4.3. $\sqrt{11 - 4\sqrt{7}} + \sqrt{16 - 6\sqrt{7}}$;

4.4. $(\sqrt{3} - \sqrt{2}) \left(\sqrt{4 - 2\sqrt{3}} + \sqrt{3 + 2\sqrt{2}} \right)$;

4.5. $\sqrt{\sqrt{5} - \sqrt{3 - \sqrt{29 - 12\sqrt{5}}}}$;

$$4.6. \frac{\sqrt{17+12\sqrt{2}}-1}{\sqrt{2}+1};$$

$$4.7. (4+\sqrt{15})(\sqrt{10}-\sqrt{6})\sqrt{4-\sqrt{15}};$$

$$4.8. \sqrt[3]{99-70\sqrt{2}} \cdot \sqrt{17+12\sqrt{2}};$$

$$4.9. \frac{\sqrt{4-2\sqrt{3}} \cdot \sqrt[3]{19\sqrt{7}-50}}{(\sqrt{7}-2)(1-\sqrt{3})};$$

Відповідь: 2) 1; 3) 1; 4) 1; 5) 1; 6) 2; 7) 2; 8) 1.

☞5. Доведіть, що вказані числа є ірраціональними:

5.1 $0,2020020002\dots$, де між сусідніми двійками на n -му місці стоїть n нулів,

5.2 $\sqrt{13}$,

5.3 $\sqrt[3]{6}$,

5.4 $\lg 5$,

5.5 $\sin 10^\circ$.

☞6. Якими числами є розв'язки рівняння:

$$6.1 \left| x - \sqrt{5} \right| + \left| 2x + \sqrt{5} \right| = 6, \quad 6.2 \sqrt{x^2 - 2\sqrt{2}x + 2} + \sqrt{4x^2 + 4\sqrt{2}x + 2} = 1$$

☞7. Вказати два ірраціональних числа, різниця (добуток) яких є раціональним числом.

☞8. Нехай α і β – ірраціональні числа, а $\alpha + \beta$ – раціональне число. Довести, що числа $\alpha - \beta$ і $\alpha + 2\beta$ – ірраціональні.

☞9. Нехай α і β – ірраціональні числа, а r – раціональне число. Які з чисел можуть бути раціональними:

9.1. $\alpha + \beta$;

9.5. $\alpha\beta$;

9.9. $\sqrt{\alpha + \sqrt{r}}$;

9.2. $\alpha + r$;

9.6. αr ;

9.10. $\sqrt{r + \sqrt{\alpha}}$.

9.3. $\sqrt{\alpha}$;

9.7. $\sqrt{\alpha + r}$;

9.4. \sqrt{r} ;

9.8. $\sqrt{\alpha + \sqrt{\beta}}$;

Відповідь: 1), 4), 5), 8), 9).

☞10. Довести, що не існує раціонального числа r такого, що:

10.1. $r^2 = 5$;

10.3. $r^2 + 3r + 1 = 0$;

10.2. $r^3 = 7$;

10.4. $r^3 - 7r + 1 = 0$.

☞11. Розташувати в порядку зростання числа:

- 11.1. $2,732; -2,73; \sqrt{3}; 2,73; -1,732; \sqrt{3} + 1; 2,73205; \sqrt{3} - 1;$
 11.2. $-1,23; -\sqrt{5}; 1,236; -\sqrt{5} + 1; 0; -1,23606; -\sqrt{5} - 1; 0,23606;$
 11.3. $0; \sqrt{0,8}; 1,2; \frac{11}{30}; 0,91846;$
 11.4. $1; \frac{61}{59}; 0,37; \frac{65}{63}; \operatorname{tg} 33^\circ; \operatorname{tg}(-314^\circ);$

📖 Практичне заняття №3

Тема: Модуль дійсного числа

✍️1. Відмітьте на числовій прямій точки, для координат яких виконуються наступні співвідношення:

- | | |
|--------------------------|---------------------------|
| 1.1. $ x = 2;$ | 1.12. $ x + 1 = 0;$ |
| 1.2. $ x = 5;$ | 1.13. $ 5 - 4x = 0;$ |
| 1.3. $ x - 2 = 1;$ | 1.14. $ x + 1 = 12;$ |
| 1.4. $ x = -1;$ | 1.15. $ x + 1998 = 8;$ |
| 1.5. $ x \geq 0;$ | 1.16. $ -x + 2 = 3;$ |
| 1.6. $ x = x;$ | 1.17. $ x > 0;$ |
| 1.7. $ x = -x;$ | 1.18. $ -x \leq 0;$ |
| 1.8. $ x - 2 = x - 2;$ | 1.19. $ 2 - x \leq 0;$ |
| 1.9. $ x - 2 = 2 - x;$ | 1.20. $ -x \geq x;$ |
| 1.10. $ x^2 = 4;$ | 1.21. $ -x \geq x;$ |
| 1.11. $ 2 - x = x - 2;$ | 1.22. $ x > x.$ |

Відповідь: 1) $\pm 2;$ 2) $\pm 5;$ 3) $\{3; 1\};$ 4) $\emptyset;$ 5) $(-\infty; +\infty);$ 6) $[0; +\infty);$ 7) $0;$
 8) $[2; +\infty);$ 9) $(-\infty; 2];$ 10) $\pm 2;$ 11) $2;$ 12) $-1;$ 13) $\frac{5}{4};$ 14) $\pm 11;$ 15) $\emptyset;$
 16) $\pm 1;$ 17) $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty);$ 18) $0;$ 19) $2;$ 20) $(-\infty; -3) \cup (-3; +\infty);$
 21) $(-\infty; +\infty);$ 22) $(-\infty; 0).$

✍️2. Розв'язати рівняння:

- | | |
|----------------------|-----------------------|
| 2.1. $ x + 1 = 4;$ | 2.5. $ x + 1 = -4;$ |
| 2.2. $ x - 1 = 2;$ | 2.6. $ 5 - 4x = 4;$ |
| 2.3. $ 1 - x = 3;$ | 2.7. $ -x - 2 = 1;$ |
| 2.4. $ 2x - 4 = 3;$ | 2.8. $ 3x - 2 = 11;$ |

2.9. $|-5x - 10| = 5;$

2.10. $|x + 2| = -2 - x;$

2.11. $\frac{|x + 2|}{x + 2} = 1;$

2.12. $\frac{|2 - x|}{2x - 4} = \frac{1}{2};$

2.13. $|x + 1| = x - 1;$

2.14. $|x + 1| = 2x + 1;$

2.15. $|2x + 1| = x;$

2.16. $|2 - x| = 2x - 10;$

2.17. $|2 - x| = 2x + 10;$

2.18. $|2 - 2x| = 4x + 6;$

2.19. $|x - 2| = 2x - 4;$

2.20. $|5 - 3x| = 2x;$

2.21. $|4 - x^2| = 12;$

2.22. $|3x^2 - 2| = 7.$

Відповідь: 1) $\{3; -5\}$; 2) $\{3; -1\}$; 3) $\{4; -2\}$; 4) $\{3,5; 0,5\}$; 5) \emptyset ;

6) $\{2,25; 0,25\}$; 7) $\{-1; 3\}$; 8) $\left\{-3; 4\frac{1}{3}\right\}$; 9) $\{-1; -3\}$; 10) $(-\infty; -2]$;

11) $(-2; +\infty)$; 12) $(2; +\infty)$; 13) \emptyset ; 14) 0; 15) \emptyset ; 16) 8; 17) $-\frac{8}{3}$; 18) $-\frac{2}{3}$;

19) 2; 20) $\{1; 5\}$; 21) ± 4 ; 22) $\pm\sqrt{3}$.

3. Розв'язати рівняння:

3.1. $||x^2 - 4| + 2| = 1;$

3.2. $||2 - x| + 1| = 1;$

3.3. $||x| + 6| = 7;$

3.4. $||x| - 6| = 7;$

3.5. $||x - 1| - 1| = 1;$

3.6. $||x - 2| - 1| = 2;$

3.7. $||3 - x| - 4| = 2;$

3.8. $|6 - |x|| = 1;$

3.9. $||1 + 2x| + 2| = 3;$

3.10. $||x^2 + 1| - 1| = -4 + 4x;$

3.11. $|-4 - |-2x - 2|| = 1;$

3.12. $|5 - |2 - 3x|| = x - 1;$

3.13. $|5 + |1 - 2x|| = 10;$

3.14. $|3 - 2|x|| = -2 - x;$

3.15. $|x - |4 - x|| + 2x = 4;$

3.16. $||3x - 3| - 6| = 1;$

3.17. $||4x| - 2x| = 2;$

3.18. $|5 - 2|x|| = x - 1;$

3.19. $|-4 - |2x - 2|| = 1;$

3.20. $|x^2 - 2|x| + 1| = 1.$

Відповідь: 1) \emptyset ; 2) 2; 3) ± 1 ; 4) ± 13 ; 5) $\{\pm 1; 3\}$; 6) $\{-1; 5\}$;

7) $\{-3; 9; 5; 1\}$; 8) $\{\pm 5; \pm 7\}$; 9) $\{0; -1\}$; 10) 2; 11) \emptyset ; 12) $\{2; 3\}$;

13) $\{-2; 3\}$; 14) $-2,5$; 15) $(-\infty; 2]$; 16) $\left\{-1\frac{1}{3}; -\frac{2}{3}; 2\frac{2}{3}; 3\frac{1}{3}\right\}$; 17) ± 2 ;

18) $\{2; 4\}$; 19) \emptyset ; 20) $\{0; \pm 2\}$.

4. Розв'язати рівняння:

4.1. $|x+2|+|x|=2$;

4.2. $|x-1|+|x-1|=1$;

4.3. $|2x-1|+|1-2x|=2$;

4.4. $|x-1|+|1-2x|=2$;

4.5. $1+|x-1|=|3-x|$;

4.6. $|x-1|=|3-x|$;

4.7. $|x-3|+|x+2|-|x-4|=3$;

4.8. $|3x-5|=|5-2x|$;

4.9. $|x-1|+|2-x|+|3-x|=2$;

4.10. $|3x-8|+|3x-2|=6$;

4.11. $|x^2-4x+3|+|x^2-4x+6|=1$;

4.12. $|x^2-9|+|x-2|=5$;

4.13. $|x-13|+|6-5x|=7$;

4.14. $|7x-12|+|7x-11|=1$;

4.15. $|x^2-4x|+|x-3|-3=0$;

4.16. $|7x-12|+|7x-11|=4$;

4.17. $|4x-1|=|3x-1|$;

4.18. $|x|-2|x+1|+3|x+2|=0$;

4.19. $\frac{|1-x|+|x|-3}{\sqrt{2x-3}}=0$;

4.20. $\frac{|x+2|+|1-x|-3}{\sqrt{x-1}}=0$;

4.21. $\frac{|x+3|+|x+2|-1}{\sqrt{x+3}}=0$;

4.22. $|x^2-9|+|x^2-4|=1$;

4.23. $|x^2-25|+|x^2-1|=24$;

4.24. $|x^2-4x|+3=x^2+|x-5|$.

Відповідь: 1) $[-2; 0]$; 2) $[1; 2]$; 3) $\{0; 1\}$; 4) $\left\{0; \frac{4}{3}\right\}$; 5) $\frac{3}{2}$; 6) 2;

7) $\{-2; 6\}$; 8) $\{0; 2\}$; 9) 2; 10) $\left[\frac{2}{3}; \frac{8}{3}\right]$; 11) \emptyset ; Вказівка. Зробити заміну

$x^2-4x=t$; 12) $\left\{-3; \frac{-1+\sqrt{65}}{2}\right\}$; 13) \emptyset ; 14) $\left[\frac{11}{7}; \frac{12}{7}\right]$; 15) $\left\{0; 3; \frac{3+\sqrt{33}}{2}\right\}$;

16) $\{13,5; 9,5\}$; 17) $\left\{0; \frac{2}{7}\right\}$; 18) -2; 19) 2; 20) \emptyset ; 21) $(-3; -2]$; 22) \emptyset ;

Вказівка. Позначити $x^2=t$; 23) $[-5; -1) \cup [1; 5]$; 24) $\left\{-\frac{2}{3}; \frac{1}{2}; 2\right\}$.

5. Розв'язати рівняння:

5.1. $||x+1|-2|=3$;

5.4. $||1-|x||-2|=1$;

5.2. $||x-1|+1|-1|=1$;

5.5. $||x-1|-2|-1|=2$;

5.3. $||x|-1|-2|=3$;

5.6. $||x-2|-|x||=1$;

5.7. $\|x-3|-|x+2\|=6$;

5.12. $\|x+3|-|x-2\|=|2x+1|$;

5.8. $\|x|-|x+1|=1$;

5.13. $\|x-4|-|x+2\|=6$;

5.9. $\|2x-1|-|2x+1\|=2$;

5.14. $\|x+3|-|x-3\|=|x+3|+|x-3|$;

5.10. $\|5-5x|-|5x-1\|=3$;

5.15. $\|x-8|-|x+1\|=|x-8|+|x+1|$.

5.11. $\|4x+1|-|4x+2\|=2$;

Відповідь: 1) ± 4 ; 2) $\{0; 2\}$; 3) ± 6 ; 4) $\{\pm 4; \pm 2; 0\}$; 5) $\{-4; 6\}$;

6) $\{0,5; 1,5\}$; 7) $-2,5$; 8) $(-\infty; -1] \cup [0; +\infty)$; 9) $\left(-\infty; -\frac{1}{2}\right] \cup \left[\frac{1}{2}; +\infty\right)$;

10) $\{0,3; 0,9\}$; 11) \emptyset ; 12) $[-3; 2]$; 13) $[-2; 4]$; 14) ± 3 ; 15) $\{-1; 8\}$.

№6. Розв'язати нерівність:

6.1. $|x+1| \geq 2$;

6.10. $|3x-1| \geq 1$;

6.2. $|x+1| < 2$;

6.11. $|2-5x| \leq 1$;

6.3. $|x-3| \leq 4$;

6.12. $|2x-1| < 3$;

6.4. $|x-3| > 4$;

6.13. $|-4x+2| \geq 2$;

6.5. $|x+1| > 4$;

6.14. $|3x-5| \geq 10$;

6.6. $|x-3| \leq 2$;

6.15. $|2x-7| \leq 5$;

6.7. $|3x+1| < 2$;

6.16. $|5-x| > \frac{1}{2}$.

6.8. $|5x-2| > 1$;

6.9. $|-2x-1| \geq 5$;

Відповідь: 1) $(-\infty; -5] \cup [3; +\infty)$; 2) $(-3; 1)$; 3) $[-1; 7]$;

4) $(-\infty; -1) \cup (7; +\infty)$; 5) $(-\infty; -5) \cup (3; +\infty)$; 6) $[1; 5]$; 7) $\left(-1; \frac{1}{3}\right)$;

8) $\left(-\infty; \frac{1}{5}\right) \cup \left(\frac{3}{5}; +\infty\right)$; 9) $(-\infty; -2] \cup (3; +\infty)$; 10) $(-\infty; 0] \cup \left[\frac{2}{3}; +\infty\right)$;

11) $\left[\frac{1}{5}; \frac{3}{5}\right]$; 12) $(-1; 2)$; 13) $(-\infty; 0] \cup [1; +\infty)$; 14) $(-\infty; -5/3] \cup [5; +\infty)$;

15) $[1; 6]$; 16) $\left(-\infty; \frac{9}{2}\right) \cup \left(\frac{11}{2}; +\infty\right)$.

№7. Розв'язати нерівність:

7.1. $\|x+2|-2\| \leq 1$;

7.3. $\|2-x|-1\| > 1$;

7.2. $\|3-x|-4\| > 2$;

7.4. $\|5+x|-3\| < 4$;

7.5. $\|2x+1|-1|\geq 1;$

7.6. $\|3x-1|-4|> 2;$

7.7. $\|4-x|-1|\leq 2;$

7.8. $\|4-2x|-2|\geq 1;$

7.9. $\|x|-1|\leq x+1;$

7.10. $\|3x-3\|< x+3;$

7.13. $\|2x+1|-1|\geq x;$

7.14. $\|2x-2|-3|< 4+x;$

7.15. $\|2x-2|-3|\geq -4;$

7.16. $\|2x-4|-1|\geq 2x;$

7.17. $\|x+3|-2|> 2x+1;$

7.18. $\|x-3|-2|< 2x+1;$

7.19. $|x^2-3|\geq 3x+1;$

7.20. $\|x^2-x+1|-1|> x-1.$

7.11. $\|x-1|-3|> x+2;$

7.12. $\|2x+1|-1|< x;$

Відповідь: 1) $[-5; -3) \cup [-1; 1];$ 2) $(-\infty; -3) \cup (1; 5) \cup (9; +\infty);$

3) $(-\infty; 0) \cup (4; +\infty);$ 4) $(-12; 2);$ 5) $\left(-\infty; -\frac{3}{2}\right] \cup \left\{-\frac{1}{2}\right\} \cup \left[\frac{1}{2}; +\infty\right);$

6) $\left(-\infty; -\frac{5}{3}\right] \cup \left(-\frac{1}{3}; 1\right) \cup (3, 5; +\infty);$ 7) $[1; 7];$

8) $\left(-\infty; \frac{1}{2}\right] \cup \left[\frac{3}{2}; \frac{5}{2}\right] \cup \left[\frac{7}{2}; +\infty\right);$ 9) $[-1; +\infty);$ 10) $(-3; 0) \cup (3; +\infty);$

11) $(-\infty; -2);$ 12) $\emptyset;$ 13) $x \in \mathbb{R};$ 14) $(-2; 9);$ 15) $x \in \mathbb{R};$ 16) $\left(-\infty; \frac{3}{4}\right];$

17) $(-\infty; 0);$ 18) $(0; +\infty);$ 19) $\left(-\infty; \frac{-3+\sqrt{17}}{2}\right] \cup [4; +\infty);$ 20) $(2; 5);$

8. Розв'язати нерівність:

8.1. $|x|+|1-x|\geq 0;$

8.2. $|x|+|x-1|\geq 0,5;$

8.3. $|-x|+|1-x|\leq 1;$

8.4. $|x|+|x-1|\leq 2;$

8.5. $|x|+|x-1|\geq 1;$

8.6. $|x|+|x-1|> 1;$

8.7. $|x^2|\leq |x|;$

8.8. $|x+1|+|x-2|\leq 3;$

8.9. $|x-1|+|x-3|> 5;$

8.10. $|x-2|+|3-x|\leq 4;$

8.11. $|2x-1|+|2x-2|\geq 1;$

8.12. $|2x+5|+|-2x-3|\leq 1;$

8.13. $|2x-1|+|2x+1|> 2;$

8.14. $2|x|\leq 4+|x+1|;$

8.15. $|x-2|\geq |x^2-4|;$

8.16. $|x^2-x-2|\geq |x^2-3x-4|;$

8.17. $|x^2+1|\leq |x-2|;$

8.18. $|x^2 - 1| \leq x + 2;$

8.22. $|x^2 - 9| > x + 3;$

8.19. $|x^2 - 4| \leq x - 2;$

8.23. $|x^2 - 9| + |x - 2| \geq 5;$

8.20. $|x^2 - 1| \geq x - 1;$

8.24. $|x - 3| + |x - 1| \geq |2x - 4|;$

8.21. $|x^2 - 4| > |x + 2|;$

8.25. $|x - 2| + |3 - x| \geq 1.$

Відповідь: 1) $x \in \mathbb{R}$; 2) $x \in \mathbb{R}$; 3) $[0; 1]$; 4) $[-0,5; 1,5]$; 5) $x \in \mathbb{R}$;
 6) $(-\infty; 0) \cup (1; +\infty)$; 7) $[-1; 1]$; 8) $[-1; 2]$; 9) $(-\infty; -0,5) \cup (4,5; +\infty)$;
 10) $[1; 4]$; 11) $x \in \mathbb{R}$; 12) \emptyset ; 13) $\left(-\infty; -\frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$; 14) $[-3; 5]$;
 15) $\{2\} \cup [-3; -1]$; 16) $\{1\} \cup [3; +\infty)$; 17) $\left[\frac{1-\sqrt{5}}{2}; \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right]$;
 18) $\left[\frac{1-\sqrt{13}}{2}; \frac{1+\sqrt{13}}{2}\right]$; 19) 2; 20) $x \in \mathbb{R}$; 21) $(-\infty; -2) \cup (-2; 1] \cup$
 $\cup [3; +\infty)$; 22) $(-\infty; -3) \cup (4; +\infty)$; 23) $(-\infty; 2] \cup \left[\frac{-1+\sqrt{65}}{2}; +\infty\right)$;
 24) $x \in \mathbb{R}$; 25) $x \in \mathbb{R}$.

9. Розв'язати нерівність:

9.1. $||1 + 5x| - 1| - |x| \leq -1;$

9.8. $||2x - 1| - |2x + 1|| < 2;$

9.2. $||4 + 3x| + 5| - 7| < 2;$

9.9. $||4x + 1| - |4x + 2|| \geq 2;$

9.3. $||3x - 4| - 5| - 6| \geq -1;$

9.10. $\frac{x^2 - |x| - 12}{x - 3} \geq 2x;$

9.4. $||2x - 4| - 2| + 367| > 100;$

9.11. $|x^3 - 1| > 1 - x;$

9.5. $||x - 2| - |x|| \leq 1;$

9.12. $|x - 6| > |x^2 - 5x + 9|.$

9.6. $||x - 3| - |x + 2|| > 6;$

9.7. $||x| - |x + 1|| \geq 1;$

Відповідь: 1) \emptyset ; 2) $\left(-\frac{8}{3}; -\frac{4}{3}\right) \cup \left(-\frac{4}{3}; 0\right)$; 3) $x \in \mathbb{R}$; 4) $x \in \mathbb{R}$;

5) $[0,5; 1,5]$; 6) \emptyset ; 7) $(-\infty; -1] \cup [0; +\infty)$; 8) $\left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$; 9) \emptyset ;

10) $(-\infty; 3)$; 11) $(-\infty; -1) \cup (0; 1) \cup (1; 2)$; 12) $(1; 3)$.

№10. Побудувати графіки функцій:

10.1. $y = |x - 1|$;

10.2. $y = |2x - 3|$;

10.3. $y = |x| - x$;

10.4. $y = x + 1 + |x + 1|$;

10.5. $y = |x|(x + 2)$;

10.6. $y = \frac{x}{|x|}$;

10.7. $y = \frac{x^2 - 1}{|x| + 1}$;

10.8. $y = \frac{x}{|x|}(x^2 - 1)$;

10.9. $y = \frac{x^2 - x - 2}{|x - 2|}$;

10.10. $y = \frac{|x - |x||}{x}$;

10.11. $y = x^2 - 2|x|$;

10.12. $y = |x^2 - 5x + 6|$;

10.13. $y = |x - 1| + |x + 1|$;

10.14. $y = |x - 2| + |2x - 1|$;

10.15. $y = |x + 1| + |2x + 3| - x$;

10.16. $y = x(|x - 2| + |x + 1|)$;

10.17. $y = |x^2 - 2|x| - 3|$;

10.18. $y = |x^2 - 2|x|| + 1$;

10.19. $y = (x + 1)^2 + |x + 1| - 2$;

10.20. $y = |4 - 2|x||$.

📖 Практичне заняття №4

Тема: Функції дійсної змінної

№1. Знайти лінійну функцію $f(x)$, якщо:

1.1. $f(-2) = 10, f(1) = -5$;

1.3. $f(-10) = -2, f(5) = 1$;

1.2. $f(-2) = -5, f(2) = -3$;

1.4. $f(-3) = 3, f(6) = 0$.

Відповідь: 1) $y = -5x$; 2) $y = \frac{x}{5}$; 3) $y = \frac{x}{2} - 4$; 4) $y = -\frac{x}{3} + 2$.

№2. Знайти квадратичну функцію $f(x)$, якщо:

2.1. $f(-1) = -1, f(3) = -3, f(6) = 12$;

2.2. $f(-1) = 3, f(1) = 3, f(2) = 12$;

2.3. $f(-2) = 9, f(1) = 3, f(3) = 19$;

2.4. $f(-\sqrt{2}) = -4, f(2) = -5, f(2\sqrt{2}) = -7$;

2.5. $f(-3) = -8, f(0) = -2, f(3) = 10$;

2.6. $f(-3) = -11, f(0) = 10, f(2) = -6$.

Відповідь: 1) $y = -\frac{1}{3}x^2$; 2) $y = 3x^2$; 3) $y = 2x^2 + 1$; 4) $y = -\frac{1}{2}x^2 - 3$;

5) $y = \frac{1}{3}x^2 + 3x - 2$; 6) $y = -3x^2 - 2x + 10$.

3. Знайти область визначення функції $f(x)$, якщо:

3.1. $f(x) = \frac{x}{x+1}$;

3.2. $f(x) = \frac{x^3 - 1}{x^2 - 6x + 8}$;

3.3. $f(x) = \frac{(x+2)^2}{x^3 - 4x}$;

3.4. $f(x) = \frac{1}{x+|x|}$;

3.5. $f(x) = \sqrt{2 - x - x^2}$;

3.6. $f(x) = \sqrt{\frac{x-3}{1-3x+2x^2}}$;

3.7.

$f(x) = \log_2(4-x) - \log_2(x+7)$;

3.8. $f(x) = \sqrt{\log_{\frac{1}{4}} \frac{2x^2 - 5x + 3}{x^2 - 1}}$;

3.9. $f(x) = \arcsin x + \sqrt{\frac{2}{4x-1}}$;

3.10. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{|x| - 2|x-1|}}$;

3.11. $f(x) = \arccos \frac{2x}{1+x^2} + \sqrt{x^2(x-1)^2(x-3)}$.

Відповідь: 1) $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$; 2) $\mathbb{R} \setminus \{2; 4\}$; 3) $\mathbb{R} \setminus \{0; \pm 2\}$; 4) $(0; +\infty)$;

5) $[-2; 1]$; 6) $\left(\frac{1}{2}; 1\right) \cup [3; +\infty)$; 7) $(-7; 4)$; 8) $(-1; 1) \cup (1; 4]$; 9) $\left[\frac{1}{4}; 1\right]$;

10) $\left(\frac{2}{3}; 2\right)$; 11) $[3; +\infty)$.

4. Знайти $y(0)$, $y(1)$, $y(-3)$, якщо $y = \frac{1}{1+x^2}$.

5. Задана функція $f(x) = x^2$. Знайти:

5.1. $f(-x)$;

5.2. $2f(x-1)$;

5.3. $f\left(\frac{1}{x}\right)$;

5.4. $f(\cos x)$;

5.5. $f^2(x)$;

5.6. $\sqrt{f(x)}$;

5.7. $f(f(x))$;

5.8. $\frac{1}{2}f(x) - 2f\left(\frac{1}{x}\right)$.

6. Знайти множину значень функції $f(x)$, якщо:

6.1. $f(x) = 2x - 5, x \in [-2; 2];$

6.2. $f(x) = |x - 1|, x \in [0; 5];$

6.3. $f(x) = \sqrt{2 + x - x^2};$

6.4. $f(x) = \log_3(1 - 2\cos x);$

6.5. $f(x) = \sin x + |\sin x|;$

6.6. $f(x) = \frac{2x}{1 + x^2};$

6.7. $f(x) = 2^{|\cos x|};$

6.8. $f(x) = \frac{2}{3 - \sin x};$

6.9. $f(x) = x^2 - x^4, x \in [-1; 4];$

6.10. $f(x) = ax + \frac{b}{x}, ab > 0.$

Відповідь: 1) $[-9; -2];$ 2) $[0; 4];$ 3) $\left[0; \frac{3}{2}\right];$ 4) $(-\infty; 1);$ 6) $[-1; 1];$

7) $[1; 2];$ 8) $\left[\frac{1}{2}; 1\right];$ 9) $\left[-240; \frac{1}{4}\right];$ 10) $(-\infty; -2\sqrt{ab}] \cup [2\sqrt{ab}; +\infty).$

7. [15, с. 79] Знайти композиції $f \circ g$ і $g \circ f$, та вказати їх області визначення для заданих функцій:

7.1. $f(x) = x^2, g(x) = \sqrt{x}.$

7.2. $f(x) = g(x) = \sqrt{1 - x^2}.$

7.3. $f(x) = 10^x, g(x) = \lg x.$

7.4. $f(x) = x^5, g(x) = x + 5.$

8. [15, с. 80] Написати формули, які задають композиції:

8.1. $u \circ v \circ w \circ y \circ z.$

8.3. $w \circ y \circ v \circ z \circ u.$

8.2. $z \circ y \circ w \circ v \circ u.$

8.4. $y \circ v \circ z \circ u \circ w;$

якщо $u = \sin x, v = \log_2 x, w = 1 + x, y = \frac{1}{x}, z = \sqrt{x}.$

9. [15, с. 80] Знайти яку-небудь функцію f , яка задовольняє умову:

9.1. $f(x - 2) = \frac{1}{x + 1}, x \in \mathbb{R}, x \neq 1.$

9.2. $f\left(\frac{1}{x}\right) = x^2 + 1, x \in \mathbb{R}, x \neq 0.$

9.3. $f\left(\frac{x - 1}{x + 1}\right) = x, x \in \mathbb{R}, x \neq -1.$

10. [15, с. 80] Нехай $f(x) = \frac{x}{ax + b}, g(x) = \frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}}.$ Знайти:

10.1. $f \circ f \circ f(x)$.

10.4. $\underbrace{g \circ g \circ \dots \circ g}_n(x)$.

10.2. $g \circ g \circ g(x)$.

10.3. $\underbrace{f \circ f \circ \dots \circ f}_n(x)$.

✎11. Довести, що якщо $f(x)$ і $g(x)$ – парні функції на множині X , то функції $f(x) + g(x)$, $f(x) - g(x)$, $f(x) \cdot g(x)$, $\frac{f(x)}{g(x)}$, $g(x) \neq 0 \in$ парними на множині X .

✎12. Довести, що якщо $f(x)$ і $g(x)$ – непарні функції на множині X , то функції $f(x) + g(x)$ і $f(x) - g(x)$ є непарні функції на X , а $f(x) \cdot g(x)$, $\frac{f(x)}{g(x)}$, $g(x) \neq 0 \in$ парними на множині X .

✎13. Довести, що будь-яку функцію $f(x)$, визначену на множині X , симетричній відносно початку координат, можна подати у вигляді суми функцій $\varphi(x)$ і $\psi(x)$, $x \in X$:

$$f(x) = \varphi(x) + \psi(x),$$

де $\varphi(x)$ – парна функція, а $\psi(x)$ – непарна функція. Тут

$$\varphi(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2}, \quad \psi(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}.$$

✎14. Перевірити на парність і непарність функції:

14.1. $y = \sin(\cos x)$;

14.6. $y = \log_2 \frac{1 + \sin x}{1 - \sin x}$;

14.2. $y = \frac{2^x + 2^{-x}}{2^x - 2^{-x}}$;

14.7. $y = |x - 1| + |x + 1| - 2|x|$;

14.3. $y = \ln \frac{1 - x}{1 + x}$;

14.8. $y = \arccos(\cos x)$;

14.4. $y = \log_2(x + \sqrt{1 - x^2})$;

14.9. $y = \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$;

14.5. $y = \sqrt[3]{(x-1)^2} + \sqrt[3]{(x+1)^2}$;

14.10. $y = \frac{|\sin x|}{1 - \cos x}$.

✎15. Подати функцію $f(x)$ у вигляді суми парної і непарної функцій:

15.1. $f(x) = (x + 1)^3$;

15.2. $f(x) = \frac{x - 3}{x^4}$;

15.3. $f(x) = \sin(x+1)$;

15.6. $f(x) = \sin(x^3 + x^2)$.

15.4. $f(x) = \arccos x$;

15.5. $f(x) = \ln(1 + e^x)$;

✎16. Довести, що якщо $f(x)$ і $g(x)$ – визначені і обмежені на множині X , то функції $f(x) + g(x)$, $f(x) - g(x)$, $f(x) \cdot g(x)$, $|f(x)|$, $Cf(x)$ також є обмежені на множині X .

✎17. Довести, що якщо $f(x)$ і $g(x)$ – визначені на множині X , функція $f(x)$ обмежена на X , а функція $g(x)$ така, що $|g(x)| > M > 0$, то функція $\frac{f(x)}{g(x)}$ обмежена на X .

✎18. Дослідити на обмеженість функції:

18.1. $y = x^2 + 3x + 5, x \in [1; 3]$;

18.8. $y = \sqrt{x+1} - \sqrt{x}$;

18.2. $y = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, x \in (-1; 1)$;

18.9. $y = x - [x]$;

18.3. $y = \frac{|x+1|}{x^2+1}$;

18.10. $y = \frac{x^2 + 2x + 3}{x^2 + x + 1}$;

18.4. $y = x^4 - 2x^2 + 3$;

18.11. $y = 0,3^{x^2-1}$;

18.5.

18.12. $y = \frac{1}{\lg(2+x^4)}$;

$y = (x+1)(x+2)(x+3)(x+4)$;

18.13. $y = 2^{-\sqrt{x}}$;

18.6. $y = |x| - |x+1|$;

18.14. $y = \sin^3 3x - 4\sin 17x$.

18.7. $y = \sqrt{1-x^2} - \sqrt{x^2-1}$;

Відповідь: 1) обмежена; 2) обмежена знизу, необмежена зверху; 3) обмежена; 4) обмежена знизу, необмежена зверху; 5) обмежена знизу, необмежена зверху; 6) обмежена; 7) обмежена; 8) обмежена; 9) обмежена; 10) обмежена; 13) обмежена; 14) обмежена.

📖 Практичне заняття №5

Тема: Властивості функцій

✎1. [14, с. 138] Знайти проміжки монотонності функцій:

1.1. $y = \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{x}}$;

1.2. $y = 3^{|x|}$;

1.3. $y = 2x^2 + x + 4$;

$$1.4. y = x + \frac{1}{x};$$

$$1.5. y = |2x - 1|;$$

$$1.6. y = \frac{x - 3}{2x + 1};$$

$$1.7. y = \sqrt{x + 2} - 1;$$

$$1.8. y = \sin x - 3 \cos x;$$

$$1.9. y = \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{ctg} x;$$

$$1.10. y = \log_2 ||x| - 1|.$$

Відповідь: 1) зростає на $(-\infty; 0)$ і $(0; +\infty)$; 2) зростає на $[0; +\infty)$; спадає на $(-\infty; 0)$; 4) зростає на $(-\infty; -1]$ і $[1; +\infty)$; спадає на $[-1; 0)$ і $(0; 1]$; 5) спадає на $(-\infty; \frac{1}{2}]$; зростає на $[\frac{1}{2}; +\infty)$; 6) зростає на $(-\infty; -\frac{1}{2})$ і на $(-\frac{1}{2}; +\infty)$; 7) зростає на $[-2; +\infty)$; 8) зростає на $[\arcsin \frac{3}{\sqrt{10}} - \frac{\pi}{2} + 2\pi k; \arcsin \frac{3}{\sqrt{10}} + \frac{\pi}{2} + 2\pi k]$, $k \in \mathbb{Z}$; 9) функція стала на $(\frac{\pi}{2}k; \frac{\pi}{2}(k+1))$, $k \in \mathbb{Z}$; 10) спадає на $(-\infty; -1)$ і $(0; 1)$; зростає на $(-1; 0)$ і $(1; +\infty)$.

2. [14, с. 142] Знайти точки екстремуму функцій:

$$2.1. y = \frac{|x|}{1 + x^2};$$

$$2.2. y = 3x^2 + 6x + 7;$$

$$2.3. y = 1 + \cos 2x + \sin x + \sin^2 x;$$

$$2.4. y = 3 \sin 5x + 7 \cos 5x;$$

$$2.5. y = x^2 + x, x \in [-2; 5];$$

$$2.6. y = -\frac{1}{\sqrt{x^2 + 1} + 1};$$

$$2.7. y = ||x - 1| - 1|;$$

$$2.8. y = \log_2 (x^2 + 2x + 2);$$

$$2.9. y = 3^{|x-1| - |x+1|};$$

$$2.10. y = \frac{1}{\sqrt{x^2 + x + 1}}.$$

Відповідь: 1) $y_{\max} = y(-1) = y(1) = \frac{1}{2}$; $y_{\min} = y(0) = 0$; 2) $\min_{x \in \mathbb{R}} y(x) = y(-1) = 4$; 3) $\min_{x \in \mathbb{R}} y(x) = y\left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi n\right) = -1$, $n \in \mathbb{Z}$; $\max_{x \in \mathbb{R}} y(x) =$

$$= y\left((-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k\right) = \frac{9}{4}, k \in \mathbb{Z}; \quad 5) \max_{x \in [-2; 5]} y(x) = y(5) = 30; \quad \min_{x \in [-2; 5]} y(x) =$$

$$= y\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{4}; \quad 6) \min_{x \in \mathbb{R}} y(x) = y(0) = -\frac{1}{2}.$$

3. Знайти найбільше значення площі прямокутника, вписаного в дане коло діаметра d .

4. а) Виразіть об'єм $V(x)$ лунки у формі конуса з твірної 20 см як функцію висоти. Знайдіть область визначення отриманої функції, порівняйте з областю визначення її аналітичного виразу, зробіть ескіз графіка функції.

б) Напишіть рівняння прямої, яка є віссю симетрії даної функції.

в) Починаючи з якого номера n ($n \in \mathbb{N}$) послідовність $V(n)$ спадає?

г) Доведіть, що функція $V(x)$ має на відрізку $[10; 30]$ принаймні один корінь.

д) Скільки розв'язків має рівняння $V(x) = a$ в залежності від параметра a ?

5. Число 100 подати у вигляді суми двох додатних чисел так, щоб добуток цих чисел був найбільшим.

6. Знайти коефіцієнти тричлена $y = ax^2 + bx + c$, якщо $y(8) = 0$ і його найменше значення дорівнює -12 в точці $x = 6$,

7. Довести, що якщо функція $f(x) = \sin x + \cos bx$ періодична, то число b є раціональним числом.

Доведення. 1) $D(f) = \mathbb{R}$;

2) Нехай $T \neq 0$ – період функції $f(x)$. Тоді для будь-якого $x \in \mathbb{R}$ правильна рівність

$$\sin(x+T) + \cos b(x+T) = \sin x + \cos bx.$$

Покладемо тут $x = 0$ та $x = -T$, отримаємо дві рівності:

$$\sin T + \cos bT = 1,$$

$$-\sin T + \cos bT = 1.$$

Додавши та віднявши їх, матимемо

$$\begin{cases} 2\cos bT = 2, \\ 2\sin T = 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} bT = 2\pi m, m \in \mathbb{Z}, \\ T = \pi k, k \in \mathbb{Z}; \end{cases} \Leftrightarrow b = \frac{2m}{k} \in \mathbb{Q}.$$

Отже, b – раціональне число. ■

8. Довести, що якщо функція $f(x)$ періодична з періодом $T \neq 0$, то функція $f(ax+b)$, $a > 0$ є періодичною з періодом $\frac{T}{a}$.

Доведення. 1) Покажемо, що число $T_1 = \frac{T}{a}$ є періодом функції

$$f(ax+b): \quad f\left(a\left(x + \frac{T}{a}\right) + b\right) = f((ax+b) + T) = f(ax+b).$$

2) Покажемо, що $\frac{T}{a}$ – найменший додатний період. Припустимо, що існує додатне число T_1 , яке є також періодом функції $f(ax+b)$:

$$f(a(x+T_1)+b) = f(ax+b).$$

Візьмемо довільну точку $x_1 \in D(f)$ і покладемо $x_1 = \frac{x-b}{a}$ ($x = ax_1 + b$). Обчислимо значення функції в точці x :

$$\begin{aligned} f(ax_1 + b) &= f\left(a \cdot \frac{x-b}{a} + b\right) = f(a(x_1 + T_1) + b) = \\ &= f((ax_1 + b) + aT_1) = f(x + aT_1). \end{aligned}$$

Звідси випливає, що період $T \leq aT_1 \Rightarrow \frac{T}{a} \leq T_1$.

Отже, $\frac{T}{a}$ – найменший додатний період функції $f(ax+b)$. ■

Знайти найменший період функції:

8.1. $y = \sin 2x$;

8.5. $y = \operatorname{ctg} \frac{3x}{2}$;

8.8. $y = \cos \frac{x}{3}$;

8.2. $y = \operatorname{tg} 3x$;

8.6. $y = \sin \frac{\pi x}{4}$;

8.9. $y = 10 \operatorname{tg} 15x$.

8.3. $y = 3 \cos \frac{x}{2}$;

8.4. $y = 5 \sin \pi x$;

8.7. $y = \operatorname{ctg} 4x$;

Відповідь: 1) π ; 2) $\frac{\pi}{3}$; 3) 4π ; 4) 2; 5) $\frac{2\pi}{3}$; 6) 8; 7) $\frac{\pi}{4}$; 8) 6π ; 9) $\frac{\pi}{15}$.

9. [11, с. 63] Переконайтесь, що кожна з заданих функцій періодична і знайти її період:

9.1. $y = \sin \frac{x}{2} + \operatorname{tg} x$;

9.2. $y = \sin \frac{2x+1}{2}$;

9.3. $y = \sqrt{\sin 3x}$;

$$9.4. y = 1 + \sqrt{\log_2 \cos x};$$

$$9.7. y = \arcsin(\sin x);$$

$$9.5. y = 2^{\sin x};$$

$$9.8. y = \sqrt{|\sin |x||}.$$

$$9.6. y = \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x);$$

Знаходження періоду функції.

1. Функції $y = \cos ax + \cos bx$, $y = \sin ax + \cos bx$, $y = \frac{\cos ax}{\sin bx}$,

$y = \operatorname{tg} ax + \operatorname{ctg} bx$ періодичні, якщо число $\frac{a}{b}$ є раціональним числом, і

неперіодичні, якщо $\frac{a}{b}$ – ірраціональне число.

2. Період функції

$$y = c_1 \sin n_1 x + \dots + c_k \sin n_k x + d_1 \cos m_1 x + \dots + d_l \cos m_l x,$$

де сума ніяких двох або більше членів ряду тотожно не дорівнює нулю, $c_i, d_j \in \mathbb{R}$, $n_i, m_j \in \mathbb{N}$, $i = \overline{1, k}$, $j = \overline{1, l}$, знаходимо за формулою:

$$T = \frac{2\pi}{\text{HCD}(n_1, \dots, n_k, m_1, \dots, m_l)}. \quad (1)$$

3. Аналогічно, період функції

$$y = c_1 \operatorname{tg} n_1 x + \dots + c_k \operatorname{tg} n_k x + d_1 \operatorname{ctg} m_1 x + \dots + d_l \operatorname{ctg} m_l x,$$

знаходимо за формулою

$$T = \frac{\pi}{\text{HCD}(n_1, \dots, n_k, m_1, \dots, m_l)}. \quad (2)$$

4. Якщо $n_i = \frac{s_i}{r_i}$, $m_j = \frac{p_j}{q_j}$, де s_i, r_i, p_j, q_j – натуральні числа, то період

функції $y = c_1 \sin n_1 x + \dots + c_k \sin n_k x + d_1 \cos m_1 x + \dots + d_l \cos m_l x$, становить

$$T = 2\pi \frac{\text{HCK}(r_1, \dots, r_k, q_1, \dots, q_l)}{\text{HCD}(s_1, \dots, s_k, p_1, \dots, p_l)}. \quad (3)$$

5. А період функції $y = c_1 \operatorname{tg} n_1 x + \dots + c_k \operatorname{tg} n_k x + d_1 \operatorname{ctg} m_1 x + \dots + d_l \operatorname{ctg} m_l x$, знаходимо за формулою

$$T = \pi \frac{\text{HCK}(r_1, \dots, r_k, q_1, \dots, q_l)}{\text{HCD}(s_1, \dots, s_k, p_1, \dots, p_l)}. \quad (4)$$

10. Знайти період функції $y = \sin \frac{2}{3} x + \cos \frac{4}{9} x + \cos \frac{8}{27} x$.

Розв'язання. Для вищезгаданої формули (3) маємо: $n_1 = \frac{2}{3}$,

$$m_1 = \frac{4}{9}, \quad m_2 = \frac{8}{27}, \text{ тоді } s_1 = 2, \quad r_1 = 3, \quad p_1 = 4, \quad p_2 = 8, \quad q_1 = 9, \quad q_2 = 27.$$

$$\text{Отже, } T = \frac{НСК(3, 9, 27)}{НСД(2, 4, 8)} \cdot 2\pi = \frac{27}{2} \cdot 2\pi = 27\pi.$$

Відповідь: 27π .

11. Знайти період функції $y = \sin 2x + 3\sin(3x - 2) - 0,5\cos\left(\frac{4}{5}x + 1\right)$.

Розв'язання. Використовуючи раніше згадувану формулу $T = \frac{2\pi}{\omega}$, маємо: функція $\sin 2x$ має період $\frac{2\pi}{2} = \pi$; $\sin(3x - 2)$ має період $\frac{2\pi}{3} = \frac{2}{3}\pi$; $-0,5\cos\left(\frac{4}{5}x + 1\right)$ має період $\frac{2\pi}{\frac{4}{5}} = \frac{5}{2}\pi$.

Основним періодом даної функції $y \in$ НСК періодів $\pi, \frac{2}{3}\pi, \frac{5}{2}\pi$.

Для знаходження НСК зведемо коефіцієнти $1, \frac{2}{3}, \frac{5}{2}$ при π до

спільного знаменника: $\frac{6}{6}\pi, \frac{4}{6}\pi, \frac{15}{6}\pi$, або $6 \cdot \frac{\pi}{6}, 4 \cdot \frac{\pi}{6}, 15 \cdot \frac{\pi}{6}$.

$НСК(6, 4, 15) = 60$. Отже, основний період даної функції y рівний:

$$T_0 = 60 \cdot \frac{\pi}{6} = 10\pi.$$

Відповідь: 10π .

12. Знайти найменший період функції:

12.1. $y = 3\sin 4x + 6\sin x + \sin(x - \pi) + 5\sin(x + \pi)$;

12.2. $y = \sin 2x + \operatorname{tg} \frac{x}{2}$;

12.3. $y = \cos \frac{x}{3} + \operatorname{tg} \frac{x}{5}$;

12.4. $y = \sin \frac{3x}{4} + 5\cos \frac{2x}{3}$;

12.5. $y = \sin x + \cos x$;

12.6. $y = 2\operatorname{ctg} 3x - 4\operatorname{tg} 2x$;

12.7. $y = \sin 2x - \cos 5x$;

12.8. $y = \cos^2 x$;

12.9. $y = |\sin x|$;

12.10. $y = \sin \frac{x}{2} + \cos 2x$;

12.11. $y = \cos \frac{x}{3} + \sin \frac{2}{5}x$;

12.12. $y = \sin x - |\sin x|$;

$$12.13. y = \sin^4 x;$$

12.14.

$$y = \sin 3x - \sin x \cos x + \cos 4x;$$

$$12.15. y = \cos 5x \cos 3x;$$

$$12.16. y = \operatorname{tg} \frac{3x}{4} + \operatorname{ctg} \frac{2x}{3};$$

12.17.

$$y = \cos \frac{\pi x}{3} + \cos \frac{\pi x}{4} + \cos \frac{\pi x}{5}.$$

Відповідь: 1) $\frac{\pi}{2}$. 2) 2π . 3) 30π . 4) 24π . 5) $\frac{\pi}{2}$. 6) π ; 7) π ; 8) π ; 9) π ;

10) 4π ; 11) 30π ; 12) 2π ; 13) π ; 14) 2π ; 15) π ; 16) 12π ; 17) 120 .

✎13. На області визначення функції знайти функцію, обернену до заданої:

$$13.1. y = \frac{x-1}{x+2};$$

$$13.2. y = 4^{x+1} - 1;$$

$$13.3. y = \log_2(x-1);$$

Відповідь: 1) $y = \frac{2x+1}{1-x}$; 2) $y = \log_4(x+1) - 1$; 3) $y = 2^x + 1$;

📖 Практичне заняття №6-7

Тема: Побудова графіків елементарних функцій.

Самостійна робота №1

✎1. На рис. 1 зображено графік функції $y = f(x)$. Побудувати графік функції:

$$1.1. y = f(2x);$$

$$1.2. y = f(-x);$$

$$1.3. y = f\left(\frac{x}{2}\right);$$

$$1.4. y = f(x+2);$$

$$1.5. y = f(|x|);$$

$$1.6. y = |f(x)|;$$

$$1.7. y = -\frac{1}{2}f(x);$$

$$1.8. y = f(2x+1);$$

$$1.9. y = f(|x-1|).$$

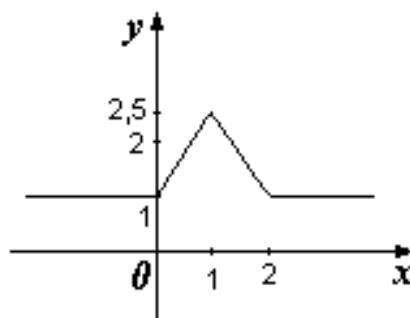


Рис. 1

2. На рис. 2 зображено графік функції $y = f(x)$. Побудувати графік функції:

2.1. $y = f\left(\frac{x}{2}\right)$;

2.2. $y = \frac{1}{2}f(x)$;

2.3. $y = f(3x)$;

2.4. $y = f(x-1)$;

2.5. $y = f(|x|)$;

2.6. $y = |f(x)|$;

2.7. $y = 2f(x)$;

2.8. $y = f(1-2x)$;

2.9. $y = f(|2-x|)$.

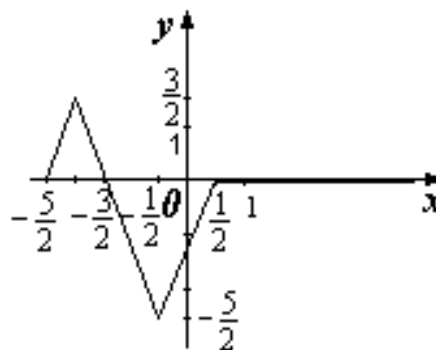


Рис. 2

3. Використовуючи правила побудови графіків функцій $y = f(-x)$, $y = f(x+a)$, $y = f(x)+b$, побудуйте графіки функцій:

3.1 $y = \frac{1}{x+2}$;

3.5 $y = \sqrt{5-x} + 3$;

3.2 $y = \sqrt{3-x}$;

3.6 $y = -\frac{x+2}{x+5}$;

3.3 $y = \log_{\frac{1}{2}}(x-4)$;

3.7 $y = 1 - \arcsin(-x)$;

3.4 $y = x^2 + 4x + 6$;

3.8 $y = \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) + 2$.

4. Використовуючи правила побудови графіків функцій $y = f(kx)$, $y = kf(x)$, побудуйте графіки функцій:

4.1 $y = \sqrt[5]{4x}$;

4.5 $y = \sqrt[3]{4+3x}$;

4.2 $y = \cos 2x$;

4.6 $y = 2 - \frac{1}{\pi} \arccos x$;

4.3 $y = 3 \log_3 x$;

4.7 $y = -\frac{1}{3} 5^x$;

4.4 $y = \cos \frac{x}{3}$;

4.8 $y = \frac{1}{2} \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right)$.

5. Використовуючи правила побудови графіків функцій $y = f(|x|)$, $y = |f(x)|$, побудуйте графіки функцій:

$$5.1 \quad y = \log_4 |x|;$$

$$5.5 \quad y = \frac{1}{1-3|x|};$$

$$5.2 \quad y = \cos \left| x - \frac{\pi}{4} \right|;$$

$$5.6 \quad y = \frac{|x|-2}{|x|+3};$$

$$5.3 \quad y = \left| \frac{4-x}{5-2x} \right|;$$

$$5.7 \quad y = x^2 - 4|x| + 7$$

$$5.4 \quad y = |\operatorname{tg} 2x + 1|;$$

$$5.8 \quad y = |x^2 - 6|x| + 8|.$$

6. Використовуючи різні властивості перетворень, побудуйте графік функцій:

$$6.1. \quad y = \frac{|x+2|}{x+3};$$

$$6.2. \quad y = 1 + \frac{|x|}{x+1};$$

$$6.3. \quad y = |2x-1| + |x-1| - x;$$

$$6.4. \quad y = |2-3x| - |1+5x| + |7-2x|;$$

$$6.5. \quad y = \sqrt{|x-1| + |x+1|};$$

$$6.6. \quad y = \sqrt[3]{|x|-1};$$

$$6.7. \quad y = |3x^2 - 5x + 2| + |x^2 - 7x + 6|;$$

$$6.8. \quad y = |2x^2 - 8x + 6| - |3x^2 - 10x + 7| - 2x + 1.$$

7. Побудувати графік функції:

$$7.1. \quad y = \sqrt[3]{x^2 \operatorname{sign}(\cos \pi x)};$$

$$7.6. \quad y = \left(\sqrt{\sin 3x} \right)^2;$$

$$7.2. \quad y = \operatorname{arctg} \frac{|-2|x+1||}{3};$$

$$7.7. \quad y = \operatorname{tg} 2x \cdot \operatorname{ctg} 2x;$$

$$7.3. \quad y = \sqrt{1 - \cos^2 2x};$$

$$7.8. \quad y = \arcsin \frac{|-|2x+1||}{4};$$

$$7.4. \quad y = \cos^2 x \sin^2 x;$$

$$7.9. \quad y = \sin x - \sqrt{\sin^2 x};$$

$$7.5. \quad y = 2^{\log_{\sqrt{2}} \sin x};$$

$$7.10. \quad y = 2^{|\log_2 x|}.$$

8. Побудувати графік функції:

8.1. $y = \arcsin(\sin x)$;

8.2. $y = \arccos(\cos x)$;

8.3. $y = \arctg(\operatorname{tg} x)$;

8.4. $y = \operatorname{arcctg}(\operatorname{tg} x)$;

8.5. $y = \arcsin(\cos x)$;

8.6. $y = \arccos(\sin x)$;

8.7. $y = \sin(\operatorname{arctg} x)$;

8.8. $y = \arcsin \sqrt{1-x^2}$.

9. [Вавілов, с. 265] Побудувати графік функції:

9.1. $y = |\operatorname{tg} x| - |\operatorname{tg} x - 1| + 2$;

9.2. $y = \frac{x}{x^2 - 1}$;

9.3. $y = \frac{x}{x^2 + 1}$;

9.4. $y = \frac{x^2 + 2x + 3}{x + 2}$;

9.5. $y = \frac{x^2 + x + 1}{x^2 - x + 1}$;

9.6. $y = \lg(x^2 - x)$;

9.7. $y = 2^{\frac{1-x}{1+x}}$;

9.8. $y = \arccos\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$;

9.9. $y = \sqrt[3]{x + \frac{1}{x}}$;

9.10. $y = |\sin x - 1| - \sin x + 1$.

8 Самостійна робота №1 (зразок)

1. Які з даних чисел є раціональними, а які ірраціональними:

$$\frac{\sqrt{37 + 12\sqrt{7}} - 1}{\sqrt{7} + 1}.$$

2. Подати нескінченні десяткові дроби у вигляді звичайних дробів:

2,4(16).

3. Нехай задані функції $f(x), g(x), h(x)$. Побудувати для кожної операційної схеми функцію:

$$f + g \circ h, \quad f(x) = 2x + 5, \quad g(x) = x^2 + 1, \quad h(x) = \frac{1}{x}.$$

4. Розв'язати рівняння: $|x - 2| - |5 - x| = x + 1 - |2 - 6x|$.

5. Розв'язати нерівність: $||x| - 1| \leq x + 1$.

📖 Практичне заняття №8

Тема: Числові послідовності

1. Знайти перші шість членів послідовності (x_n) , заданої формулою загального члена:

1.1. $x_n = 3$;

1.2. $x_n = \frac{1 + (-1)^n}{n}$;

1.3. $x_n = (-1)^n + (-1)^{n+1}$;

1.4. $x_n = \sin \frac{n\pi}{2}$;

1.5. $x_n = n \sin \frac{n\pi}{2} + n^2 \cos \frac{n\pi}{2}$;

1.6. $x_n = n^{(-1)^n}$;

1.7. $x_n = \frac{n!}{n^n + 1}$;

1.8. $x_n = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot 2n}$;

2. Знайти перші n 'ять членів послідовності, заданої рекурентно:

2.1. $x_1 = 1, x_{n+1} = 2x_n$;

2.2. $x_1 = 1, x_{n+1} = 3x_n - 2$;

2.3. $x_1 = 3, x_{n+1} = x_n - n$;

2.4. $x_1 = 1, x_{n+1} = \frac{x_n}{n}$;

2.5. $x_1 = x_2 = 1, x_{n+2} = x_{n+1} + x_n$;

2.6. $x_1 = -1, x_2 = 0, x_{n+2} = x_{n+1} + x_n$;

2.7. $x_1 = 1, x_2 = 2, x_{n+2} = x_{n+1} \cdot x_n$;

2.8. $x_1 = 1, x_2 = 2, x_{n+2} = \frac{x_{n+1}}{x_n}$;

2.9. $x_1 = 1, x_2 = 2, x_{n+2} = \frac{x_n + x_{n+1}}{2}$;

2.10. $x_1 = 2, x_{n+1} = \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{1}{x_n} \right)$.

3. Підібрати одну з можливих формул для загального члена послідовності, якщо відомо декілька перших її членів:

3.1. 4, 9, 16, 25, 36, ...;

3.7. 1, 0, -1, 1, 0, -1, 1, 0, -1, ...;

3.2. 4, 16, 36, 64, 100, ...;

3.8. $2, 0, \frac{2}{3}, 0, \frac{2}{5}, 0, \frac{2}{7}, \dots$;

3.3. $\frac{1}{1 \cdot 5}, \frac{1}{5 \cdot 9}, \frac{1}{9 \cdot 13}, \frac{1}{13 \cdot 17}, \dots$;

3.9. $1, 2, \frac{3}{2}, \frac{2}{3}, \frac{5}{24}, \dots$;

3.4. $\frac{2}{1 \cdot 2}, \frac{4}{2 \cdot 3}, \frac{8}{3 \cdot 4}, \frac{16}{4 \cdot 5}, \dots$;

3.10. $2, \frac{1}{3}, 4, \frac{1}{5}, 6, \dots$.

3.5. $1, \frac{4}{2}, \frac{9}{6}, \frac{16}{24}, \frac{25}{120}, \dots$;

3.6. $\frac{2}{4}, \frac{5}{7}, \frac{10}{12}, \frac{17}{19}, \frac{26}{28}, \dots$;

Відповідь: 1) $(n+1)^2$; 2) $(2n)^2$; 3) $\frac{1}{(4n-3)(4n+1)}$; 4) $\frac{2^n}{n(n+1)}$;

5) $\frac{n^2}{n!}$; 7) $\frac{2}{\sqrt{3}} \sin\left(\frac{\pi(2n-1)}{3}\right)$; або $\sin \frac{n\pi}{2}$; 10) $(n+1)^{(-1)^{n+1}}$.

4. Довести, що довільний член послідовності:

4.1 $x_n = 4^n + 15n - 1$ ділиться на 9;

4.2 $5^n + 2 \cdot 3^{n-1} + 1$ ділиться на 8;

4.3 $3^{2n+2} + 5 \cdot 2^{3n+1}$ ділиться на 19;

4.4 $2^{5n+3} + 5^5 \cdot 3^{n+2}$ ділиться на 17;

5. [17, с. 250], [14, с. 58] Довести, що послідовність (x_n) є зростаючою, якщо:

5.1. $x_n = 5n - 12$;

5.7. $x_n = 4^n - 2^n$;

5.2. $x_n = n^2 + n - 1$;

5.8. $x_n = \frac{2^n}{n+1}$;

5.3. $x_n = \frac{n}{n+1}$;

5.9. $x_n = \frac{n}{\sqrt{n+1}}$;

5.4. $x_n = \frac{3n+5}{n+3}$;

5.10. $x_n = n^3 - n^2$.

5.5. $x_n = 3^{n+1}$;

5.6. $x_n = 2^{n-1}$;

6. Довести, що послідовність (x_n) є спадною, якщо:

6.1. $x_n = 11 - 2n$;

6.2. $x_n = -n^2 + n - 1$;

6.3. $x_n = \frac{1}{n^2}$;

6.4. $x_n = \frac{2n+3}{3n-2}$;

6.5. $x_n = \frac{2n}{n^2+1}$;

6.6. $x_n = \frac{1}{n^2+2n+4}$;

6.7. $x_n = \frac{n}{4^n}$;

6.8. $x_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$;

6.9. $x_n = \sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n}$;

6.10. $x_n = \frac{3n^2+2}{3n^2+1}$.

7. [17, с. 250], [14, с. 63] Дослідити на монотонність послідовності:

7.1. $x_n = \frac{n+2}{0,5n-5}$;

7.2. $x_n = \frac{3n+4}{n+2}$;

7.3. $x_n = \frac{6^{n+1}}{n!}$;

7.4. $x_n = \frac{n^3}{2^n}$;

7.5. $x_n = \frac{n^3}{n^2-2n+3}$;

7.6. $x_n = \frac{n^2}{n^3+32}$;

7.7. $x_n = \sqrt{n+3} - \sqrt{n}$;

7.8. $x_n = \sqrt{n^2+2n} - n$.

Відповідь: 1) спадає для $n \geq 11$; 2) зростає; 3) спадає для $n > 5$; 4) спадає.

8. [17, с. 252], [14, с. 65] Знайти найбільший член послідовності:

8.1. $x_n = 8n - n^3$;

8.2. $x_n = -n^2 + 4n + 16$;

8.3. $x_n = 3 - \left(n - \frac{7}{3}\right)^2$;

8.4. $x_n = \frac{10\sqrt{n}}{n+25}$;

8.5. $x_n = \frac{3n+3}{3n-4}$;

8.6. $x_1 = 1, x_n = \sqrt[n]{n}, (n > 1)$;

8.7. $x_n = \frac{n}{n^3+1000}$;

8.8. $x_n = \frac{(\sqrt{39})^n}{n!}$;

8.9. $x_n = \frac{(\sqrt{126})^n}{(2n)!}$;

8.10. $x_n = \sin \frac{n\pi}{2}$.

Відповідь: 1) $x_2 = 8$; 2) $x_2 = 20$; 3) $x_2 = \frac{26}{9}$; 4) $x_{25} = 1$; 5) $x_2 = \frac{9}{2}$;

6) $x_3 = \sqrt[3]{3}$; 7) $x_8 = \frac{1}{189}$; 8) $x_6 = \frac{39^3}{6!}$; 9) $x_5 = \frac{126^5}{10!}$; 10) $x_{4n+1} = 1$.

9. [17, с. 255] Знайти найменший член послідовності:

$$9.1. x_n = (n-1)(n-2)(n-4);$$

$$9.5. x_n = n^3 - 10;$$

$$9.2. x_n = n + 3\cos \pi n;$$

$$9.6. x_n = n^3 - 18n;$$

$$9.3. x_n = \frac{(n+3)(n+12)}{n};$$

$$9.7. x_n = n - 2\sin \frac{\pi n}{2};$$

$$9.4. x_n = \frac{6n-5}{3n-4};$$

$$9.8. x_n = n + \frac{4}{n}.$$

Відповідь: 1) $x_3 = -2$; 2) $x_1 = -2$; 3) $x_6 = 27$; 4) $x_1 = -1$; 5) $x_1 = -9$;
6) $x_2 = -28$; 7) $x_1 = -1$; 8) $x_2 = 2$.

10. [17, с. 256] Довести, що послідовність (x_n) обмежена зверху:

$$10.1. x_n = \frac{2n+7}{n+2};$$

$$10.6. x_n = \frac{n}{3^n};$$

$$10.2. x_n = -n^2 - n;$$

$$10.7. x_n = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)};$$

$$10.3. x_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n};$$

$$10.4. x_n = \sqrt[3]{n+2} - \sqrt[3]{n+1};$$

$$10.8. x_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2}.$$

$$10.5. x_n = \frac{3^n}{n!};$$

11. [17, с. 258] Довести, що послідовність (x_n) обмежена знизу:

$$11.1. x_n = n^2 + n + 1;$$

$$11.4. x_n = \frac{n^2 - 3n + 1}{n};$$

$$11.2. x_n = 2n^2 - n + 4;$$

$$11.5. x_n = n^3 - 6n + 2;$$

$$11.3. x_n = \frac{n+2}{n^2 + 6n + 5};$$

$$11.6. x_n = n^3 - 8n.$$

12. [14, с. 64] Довести, що послідовність (x_n) обмежена:

$$12.1. x_n = \frac{2-n}{\sqrt{n^2+3}};$$

$$12.3. x_n = \frac{n^2+3}{n^2+4n+5};$$

$$12.2. x_n = \frac{3n+(-1)^n}{9n-1};$$

$$12.4. x_n = \frac{3^n}{4^n+1};$$

$$12.5. x_n = \underbrace{\sqrt{4 + \sqrt{4 + \dots + \sqrt{4}}}}_{n \text{ коренів}}$$

(Вказівка. Використайте метод

математичної індукції);

$$12.6. x_1 = 2, x_{n+1} = \frac{x_n^2 - 2}{2};$$

$$12.7. x_1 = 1, x_{n+1} = \frac{3}{4}x_n + \frac{1}{x_n}.$$

13. Довести, що послідовність (x_n) необмежена:

13.1. $x_n = n^2 - 5n + 2$;

13.2. $x_n = n^3 - 27n$;

13.3. $x_n = \log_2(n^2 + n)$;

13.4. $x_n = \log_3(n^2 + 4n) - 3$;

13.5. $x_n = 3^n - 2^n$;

13.6. $x_1 = -4, x_2 = 3, x_{n+2} = x_{n+1} + \frac{3}{4}x_n$.

Практичне заняття №9

Тема: Границя числової послідовності. Нескінченно малі і нескінченно великі послідовності

1. Послідовність (x_n) задана формулою загального члена. Для заданого числа ε вказати такий номер n_0 , що для всіх $n > n_0$ виконується нерівність $|x_n - a| < \varepsilon$:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n > n_0 \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon$$

1.1. $x_n = \frac{n+1}{n}, a = 1, \varepsilon = \frac{1}{2}; 0,1; 0,001$;

1.2. $x_n = \frac{2n}{n^3+1}, a = 0, \varepsilon = \frac{1}{2}; 0,1; 0,01$;

1.3. $x_n = 3 + \frac{(-1)^{n-1}}{n}, a = 3, \varepsilon = 0,05; 0,08; 0,004$;

1.4. $x_n = \frac{2n^2 - n + 2}{n^2 + 3n - 1}, a = 2, \varepsilon = \frac{1}{2}; 0,1; 0,001$.

1.5. $x_n = (-1)^n \frac{1}{7^n}, a = 0$;

1.6. $x_n = \frac{n+1}{n+2}, a = 1$;

1.7. $x_n = 2^n, a = +\infty$;

1.8. $x_n = -n^2, a = -\infty$;

1.9. $x_n = \frac{3n-2}{2n-4}, a = \frac{3}{2}$;

1.10. $x_n = \frac{4n-1}{2n+1}, a = 2$;

2. Довести за означенням, що $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$:

$$2.1. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n+2}{n} = 3;$$

$$2.4. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2 + 2n - 2}{n^2 + n + 1} = 3;$$

$$2.2. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n = 0;$$

$$2.5. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+1}{(n+1) \cdot 2^n} = 0;$$

$$2.3. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + n - 1}{2n^2 + 3n + 4} = \frac{1}{2};$$

$$2.6. \lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n \frac{3^n}{5n + 3^n} = 1.$$

3. Довести, що якщо $x_n \geq 0 \forall n \in \mathbb{N}$ і $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, то $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{x_n} = \sqrt{a}$.

4. Знайти границю:

$$4.1. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-2n^2 + 7n + 1}{n^2 + 1};$$

$$4.8. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 + 4}{n + 5n^2 + 8}.$$

$$4.2. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+3}{3n-4};$$

$$4.7. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n + (-1)^n}{n - (-1)^{n-1}};$$

$$4.3. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n+1}{n^2 + n};$$

$$4.9. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^4 - (n-1)^4}{(n^2+1)^2 - (n^2-1)^2};$$

$$4.4. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 - n + 4}{2n^2 + n + 3};$$

$$4.10. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2+n)^{100} - n^{100} - 200n^{99}}{n^{98} - 10n^2 + 1}.$$

$$4.5. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n+1)(n+2)}{(n+3)(n+4)(n+5)};$$

$$4.6. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n+1}{3n-2}\right)^2;$$

$$4.11. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3n-1}{2n+3} - \frac{2+3n^2}{2n^2-7}\right);$$

$$4.12. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^3-1}{5n^3-1} - \frac{2-n}{5n+3}\right);$$

$$4.13. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(3-n)^2 + (3+n)^2}{(3-n)^2 - (3+n)^2};$$

$$4.14. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(1+2n)^2 - 8n^3}{(1+2n)^2 + 4n^2}.$$

Відповідь: 1) -2; 2) $\frac{2}{3}$; 3) 0; 4) $\frac{1}{2}$; 5) 1; 6) $\frac{4}{9}$; 7) 1; 8) ∞ ; 9) ∞ ;

10) 4950.

5. Знайти границю:

$$5.1. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+2} - \sqrt{n+3}};$$

$$5.2. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n}{\sqrt{n^2+1} + \sqrt{2+n^2}};$$

$$5.3. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{n^2-n} - \sqrt{2n}\right);$$

$$5.4. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{3n^2 + 2n - 1} - \sqrt{3n^2 - 4n + 8} \right);$$

$$5.5. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{n + \sqrt{n + \sqrt{n}}} - \sqrt{n} \right);$$

$$5.6. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt[4]{n^4 + n^2} - n \right);$$

$$5.7. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt[p]{n^p + (p-1)n^{p-1}} - n \right);$$

$$5.8. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{n^2 + n} - \sqrt[3]{n^3 + n^2} \right);$$

$$5.9. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 \sqrt{5n^2} + \sqrt[4]{9n^8 + 1}}{(n + \sqrt{n}) \sqrt{7 - n + n^2}};$$

$$5.10. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n-1} - \sqrt{n^2 + 1}}{\sqrt[3]{3n^3 + 3} + \sqrt[4]{n^5 + 1}}.$$

Відповідь: 1) $\frac{1}{2}$; 2) 1; 3) ∞ ; 4) $\sqrt{3}$; 5) $\frac{1}{2}$; 6) 0; 7) $\frac{p-1}{p}$; 8) $\frac{1}{6}$; 9) $\sqrt{3}$;

10) 0.

6. Знайти границю:

$$6.1. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+2)! + (n+1)!}{(n+3)!};$$

$$6.2. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+2)! + (n+1)!}{(n+2)! - (n+1)!};$$

$$6.3. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{(n+1)! - n!};$$

$$6.4. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! + (n+2)!}{((n+1)! + n!) \cdot n};$$

$$6.5. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! + (n+1)!}{(n+2)! + (n+3)!};$$

$$6.6. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+2) \cdot n!}{(n+1)!}.$$

Відповідь: 1) 0; 2) 1; 3) 0; 4) 1; 5) 0; 6) 1.

7. Знайти границю:

$$7.1. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n + 1}{2^n + 5};$$

$$7.2. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n + 3^n}{n^2 + 2 \cdot 3^n};$$

$$7.3. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3n-4}{7n+5} - \frac{5^n+1}{4-3 \cdot 5^n} \right);$$

$$7.4. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(1+(-1)^n)^n}{3^n \ln(n+2)};$$

$$7.5. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\lg(n^2 + n - 1)}{\lg(n^{10} + n^5 + 1)};$$

$$7.6. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n + 5^n + \lg(n+1)}{n^2 - 5^n + \lg(n+1)};$$

$$7.7. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log_2 n + \log_3 n}{\log_3 n + \log_4 n};$$

$$7.8. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log_2(n^{1000} + 1)}{n+2}.$$

Відповідь: 1) 1; 2) $\frac{1}{2}$; 3) $\frac{16}{21}$; 4) 0; 5) $\frac{1}{5}$; 6) -1; 7) $\frac{\log_2 e + \log_3 e}{\log_3 e + \log_4 e}$; 8) 0.

8. Знайти границю:

$$8.1. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin^2(n+2)}{n+2};$$

$$8.2. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} \sin \frac{\pi(n+1)}{n+2};$$

$$8.3. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\ln 2 + \sqrt{n}}{\sqrt{2n+3}} + \frac{\cos n}{n^2} \right);$$

$$8.4. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n^2} \sin n!}{n+1};$$

$$8.5. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sin \frac{1}{n} \cos n \right);$$

$$8.6. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n + \sin n}{2n + \sin n}.$$

Відповідь: 1) 0; 2) 0; 3) $\frac{1}{\sqrt{2}}$; 4) 0; 5) 0; 6) $\frac{1}{2}$.

9. Знайти границю:

$$9.1. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+4+7+\dots+(3n-2)}{n^2};$$

$$9.2. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \dots + \frac{n-1}{n^2} \right);$$

$$9.3. \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{n}{2} \left(\frac{1}{n^3} + \frac{2}{n^3} + \dots + \frac{n}{n^3} \right)};$$

$$9.4. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n\sqrt{1+3+\dots+(2n-1)}}{2n^2+n-1};$$

$$9.5. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1+3+\dots+(2n-1)}{n+1} - \frac{2n+1}{2} \right);$$

$$9.6. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-2+3-4+\dots-2n}{\sqrt{n^2+1}};$$

$$9.7. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{2^{n-1}} \right);$$

$$9.8. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+2+4+\dots+2^{n-1}}{2^{n+1}};$$

$$9.9. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} \right) + \dots + \left(\frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} \right) \right);$$

$$9.10. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^n}}{1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{3^n}}.$$

Відповідь: 1) $\frac{3}{2}$; 2) $\frac{1}{2}$; 3) $\frac{1}{2}$; 4) $\frac{1}{2}$; 5) $-\frac{3}{2}$; 6) -1 ; 7) $\frac{2}{3}$; 8) $\frac{1}{2}$; 9) $\frac{3}{2}$; 10) $\frac{4}{3}$.

✎10. Знайти границю:

$$10.1. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} \right);$$

$$10.2. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \dots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} \right);$$

$$10.3. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{4 \cdot 11} + \frac{1}{11 \cdot 18} + \dots + \frac{1}{(7n-3)(7n+4)} \right);$$

$$10.4. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2 \cdot 9} + \frac{1}{9 \cdot 16} + \dots + \frac{1}{(7n-5)(7n+2)} \right).$$

Відповідь: 1) 1; 2) $\frac{1}{28}$; 3) $\frac{1}{28}$; 4) $\frac{1}{14}$.

✎11. Довести, що

$$11.1. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(2n - \frac{n+1}{n-2} \right) = +\infty;$$

$$11.2. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + n}{n + 2} = +\infty;$$

$$11.3. \lim_{n \rightarrow \infty} (2n+1)^3 = +\infty;$$

$$11.4. \lim_{n \rightarrow \infty} (n^2 - \ln n) = +\infty.$$

✎12. Знайти границі даних послідовностей:

$$1) \left(\frac{1}{n} + \frac{2 \sin^2 n}{n^2} \right);$$

$$2) \left(\frac{1}{5n} \sin \frac{1}{n^2} - \frac{3n}{6n+4} \right);$$

$$3) \left(\frac{8n}{n^2+3} \cos \frac{n+1}{2n-1} - \frac{(-1)^n (n^2+1)}{n^2(n+5)} \right);$$

$$4) \left(\frac{1+2+3+\dots+n}{n^2+1} \right);$$

$$5) \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{3^n} \right);$$

$$6) \left(\frac{\sin n^2}{n} \right);$$

$$7) \left(\frac{\cos n}{\sqrt{n}} \right);$$

$$8) \left(\left(\frac{n}{2n^2-1} \right) \cos \frac{n}{2n^2-1} \right);$$

$$9) \left(2^{-n} \arccos(-1)^n \frac{n+1}{2n} \right);$$

$$10) \left(\frac{\ln n}{n} \operatorname{arctg}(\ln n) \right);$$

$$11) \left((\sqrt[n]{2} - 1) \frac{(-1)^n n^2}{n^2 + 1} \right); \quad 12) (\sin \sqrt{n+1} - \sin \sqrt{n}).$$

В: 1) 0; 2) $-\frac{1}{2}$; 3) 0; 4) $\frac{1}{2}$; 5) 1,5; 12) 0.

📖 Практичне заняття №10

Тема: Обчислення границь числових послідовностей. Границя монотонної послідовності

№1. [15, с. 142] Знайти $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$, якщо:

1.1. $x_n = 0,11\dots1;$

1.2. $x_1 = 0,4; x_2 = 0,45; x_3 = 0454; x_4 = 04545; \dots; X_{2k} = 0,4545\dots45; \dots;$

1.3. $x_1 = 0,2; x_2 = 0,23; x_3 = 0,234; x_4 = 0,2342; x_5 = 0,23423;$
 $x_6 = 0,234234; \dots;$

Відповідь: 1) $\frac{1}{9}$; 2) $\frac{5}{11}$; 3) $\frac{26}{111}$.

№2. [14, с. 101], [15, с. 135] Дослідити на збіжність числову послідовність, якщо:

2.1. $x_n = \frac{1}{1^3} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \dots + \frac{1}{n^3};$

2.2. $x_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n;$

2.3. $x_n = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{3^n};$

2.4. $x_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!};$

2.5. $x_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n};$

2.6. $x_n = 1 + \frac{2}{4} + \frac{3}{4^2} + \dots + \frac{n}{4^{n-1}};$

2.7. $x_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{4n};$

$$2.8. x_n = \left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{n^2}\right);$$

$$2.9. x_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}};$$

$$2.10. x_n = \frac{n!}{(2n+1)!!}.$$

3. Знайти границю:

$$3.1. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{2n-9};$$

$$3.4. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{4}{n}\right)^{3n};$$

$$3.2. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2+n}{1+n}\right)^{1-5n};$$

$$3.5. \lim_{n \rightarrow \infty} 8n(\ln(n+3) - \ln(n+1));$$

$$3.3. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2+1+n}{n^2+2}\right)^{2n};$$

$$3.6. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n+5}{2n-3}\right)^{3n-4}.$$

Відповідь: 1) e^2 ; 2) e^{-5} ; 3) e^2 ; 4) e^{-12} ; 5) 16; 6) e^{12} .

4. Знайти границю послідовності (x_n) , заданої рекурентно:

$$4.1. x_1 = 5, x_{n+1} = \sqrt{5 + x_n}, n \in \mathbb{N};$$

$$4.2. x_1 = 0, x_{n+1} = \sqrt{6 + x_n}, n \in \mathbb{N};$$

$$4.3. x_1 = 13, x_{n+1} = \sqrt{12 + x_n}, n \in \mathbb{N};$$

$$4.4. x_1 = \sqrt{a}, x_{n+1} = \sqrt{a + x_n}, a > 0;$$

$$4.5. x_1 = 2, x_{n+1} = \frac{x_{n+1}}{3}, n \in \mathbb{N};$$

$$4.6. x_1 = \sqrt{2}, x_{n+1} = \sqrt{2x_n}, n \in \mathbb{N};$$

$$4.7. x_1 = \frac{a}{2}, x_{n+1} = \frac{x_n^2 + a}{2}, n \in \mathbb{N}, a \in [0; 1];$$

$$4.8. x_1 = 1, x_{n+1} = x_n^2 + a, n \in \mathbb{N}, a \in \left[0; \frac{1}{4}\right];$$

$$4.9. x_1 = 1, x_{n+1} = 1 - \frac{1}{4x_n}, n \in \mathbb{N};$$

$$4.10. x_1 = 0, x_{n+1} = \frac{1}{4(1-x_n)}, n \in \mathbb{N};$$

5. [15, с. 161] Дослідити на збіжність послідовності (x_n) :

$$5.1. x_1 = 0, x_{n+1} = \frac{x_{n+1}}{x_{n+2}}, n \in \mathbb{N}; \quad 5.2. x_1 = \frac{1}{2}, x_{n+1} = (1 - x_n)^2, n \in \mathbb{N}.$$

6. Нехай $x_1 = a, 0 < a < 1, x_{n+1} = 1 + qx_n^2, n \in \mathbb{N}$. При яких $q \in [0; 1]$ послідовність (x_n) збіжна? [15, с. 161], [14, с.219]

7. [15, с. 161] Нехай $x_1 > 0, x_{n+1} = \frac{1}{3} \left(2x_n + \frac{125}{x_n^2} \right), n \in \mathbb{N}$. Довести, що існує $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$, і знайти її.

8. [15, с. 161] Нехай $x_1 = \sqrt{2}, x_{n+1} = \sqrt{2 + \sqrt{x_n}}, n \in \mathbb{N}$. Довести, що послідовність $\{x_n\}$ збігається.

9. [15, с. 161] Довести, що:

9.1. Послідовність $\{x_n\}$, де $x_1 = a, a > -1, x_{n+1} = \frac{1}{1 + x_n}$, має границю,

і знайти її.

9.2. У послідовності $\{x_n\}$, де $x_1 = a, 0 < a < 1, x_{n+1} = 1 - x_n^2$, її підпослідовності $\{x_{2k}\}$ та $\{x_{2k-1}\}$ мають границі, які є коренями рівняння $x = x^2(2 - x^2)$.

10. [15, с. 161] Дослідити на збіжність $(n \in \mathbb{N})$:

$$10.1. x_1 = -3, x_{n+1} = 1 + \frac{6}{x_n}; \quad 10.3. x_1 = \frac{8}{17}, x_{n+1} = \frac{1}{x_n} - \frac{3}{2};$$

$$10.2. x_1 = -\frac{7}{13}, x_{n+1} = \frac{1 + x_n}{2x_n}; \quad 10.4. x_1 = \frac{6}{7}, x_{n+1} = 4 - \frac{3}{x_n}.$$

11. [15, с. 161] Нехай $x_1 > 0, x_{n+1} = \frac{a}{x_n} + b, n \in \mathbb{N}$, де $a > 0, b > 0$.

Довести, що послідовність $\{x_n\}$ збігається, і знайти її границю.

12. [15, с. 161] Нехай $a \in \mathbb{R}, x_1 = \frac{a}{2}, x_{n+1} = \frac{a}{2} + \frac{x_n^2}{2}$. Знайти всі значення a , при яких послідовність $\{x_n\}$ збігається, і знайти її границю.

13. [15, с. 161] 14.1. Нехай $0 < x_1 < 1, x_{n+1} = x_n(2 - x_n), n \in \mathbb{N}$:

а) довести, що послідовність $\{x_n\}$ збігається і $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1$;

б) дослідити послідовність $\{x_n\}$ на збіжність, якщо $x_1 \notin (0; 1)$.

13.2. Нехай $0 < x_1 < \frac{1}{a}$, $x_{n+1} = x_n(2 - ax_n)$, $n \in \mathbb{N}$, де $a > 0$. Довести, що послідовність $\{x_n\}$ збігається і $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \frac{1}{a}$.

13.3. Нехай $0 < x_1 < a$, $x_{n+1} = x_n(a - x_n)$, $n \in \mathbb{N}$. Довести, що:

а) $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a - 1$ при $a > 1$; б) $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$ при $0 < a \leq 1$.

14. [15, с. 161] Послідовності $\{x_n\}$ та $\{y_n\}$ задовольняють умови:

14.1. $x_1 = a > 0$, $y_1 = b > 0$, $x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + y_n)$, $y_{n+1} = \sqrt{x_n y_n}$, $n \in \mathbb{N}$;

14.2. $x_1 = a > 0$, $y_1 = b > 0$, $x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + y_n)$, $y_{n+1} = \frac{2x_n y_n}{x_n + y_n}$, $n \in \mathbb{N}$.

Довести, що послідовності $\{x_n\}$ та $\{y_n\}$ збігаються і $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$.

У випадку 14.2 знайти цю границю.

15. [15, с. 162] При яких a і b з \mathbb{R} збігається (відповідно розбігається) послідовність $\{x_n\}$, якщо $x_1 = a$, $x_2 = b$ і:

15.1. $x_{n+2} = 2x_{n+1} - x_n$;

15.3. $x_{n+2} = -2x_{n+1} - x_n$;

15.2. $x_{n+2} = 4x_{n+1} - 3x_n$;

15.4. $x_{n+2} = x_{n+1} + 2x_n$, $n \in \mathbb{N}$.

16. [15, с. 162] Нехай $x_1 = a$, $x_{n+1} = \frac{x_n}{4 - x_n}$, $n \in \mathbb{N}$. Довести, що

послідовність $\{x_n\}$ має границю, і знайти її, якщо:

16.1. $0 < a < 3$;

16.2. $3,5 < a < 4$.

§ Контрольна робота №1 (зразок)

1. Побудувати графік функції $y = \arcsin(\sin x)$.

2. Побудувати графік функції $y = \frac{1}{3} \log_2(2x - 1) + 4$.

3. Побудувати графік функції $y = \arccos|x - 2|$.

4. Довести, що $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ (вказати $n_0(\varepsilon)$): $a_n = \frac{3n-2}{2n-1}$, $a = \frac{3}{2}$.

5. Обчислити границі числових послідовностей:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(3-n)^2 + (3+n)^2}{(3-n)^2 - (3+n)^2}.$$

6. Обчислити границі числових послідовностей:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\sqrt{n^2 + 1} - \sqrt{n^2 - 1} \right).$$

7. Обчислити границі числових послідовностей:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n+3}{2n+1} \right)^{n+1}.$$

МОДУЛЬ 2

Практичне заняття №11

Тема: Границя функції. Обчислення границі функції, виходячи з означення. Односторонні границі.

1. [13, с. 93], [12, с. 80] Для заданих функцій $f(x)$ і точки x_0 знайти границю $A = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ і $\forall \varepsilon > 0$ вказати $\delta > 0$ таке, що

$$\forall x: 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon:$$

1.1. $f(x) = 3x - 2$, $x_0 = 1$, $\varepsilon = 0,1$; $\varepsilon = 0,01$; $\varepsilon = 0,001$.

1.2. $f(x) = x^3$, $x_0 = 2$, $\varepsilon = 0,1$; $\varepsilon = 0,01$; $\varepsilon = 0,001$.

1.3. $f(x) = \frac{2x+1}{x+3}$, $x_0 = -1$, $\varepsilon = 0,1$; $\varepsilon = 0,01$; $\varepsilon = 0,001$.

1.4. $f(x) = \frac{x-1}{2(x+1)}$, $x_0 = 3$, $\varepsilon = 0,1$; $\varepsilon = 0,01$; $\varepsilon = 0,001$.

1.5. $f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$, $x_0 = \infty$, $\varepsilon = 0,2$.

1.6. $f(x) = \frac{x^2}{x^2 + 4}$, $x_0 = \infty$, $\varepsilon = 0,1$.

1.7. $f(x) = 4x - 3$, $x_0 = 2$, $\varepsilon = 0,1$; $\varepsilon = 0,01$; $\varepsilon = 0,001$.

1.8. $f(x) = \sqrt{x+4}$, $x_0 = 5$, $\varepsilon = 0,1$; $\varepsilon = 0,01$; $\varepsilon = 0,001$.

2. Довести (знайти $\delta(\varepsilon)$):

$$2.1. \lim_{x \rightarrow \frac{1}{3}} \frac{6x^5 - 5x + 1}{x - \frac{1}{3}} = -1.$$

$$2.2. \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{2x^2 - 7x + 3}{x - \frac{1}{2}} = -5.$$

$$2.3. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - 3x^2}{x - 3} = 9.$$

$$2.4. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 - 4x + 1}{x - 1} = 2.$$

3. Довести, що не існують границі функцій $f(x) = \sin x$ і $\varphi(x) = \operatorname{tg} x$ при $x \rightarrow \infty$, $x \rightarrow +\infty$, $x \rightarrow -\infty$.

4. Довести, що не існують границі функцій у точці x_0 :

$$4.1. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x - 1}.$$

$$4.4. f(x) = \operatorname{sign} x^2, x_0 = 0.$$

$$4.2. \lim_{x \rightarrow 0} 2^{\frac{1}{x}}.$$

$$4.5. f(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0, \\ x - 2, & x < 0, \end{cases} x_0 = 0.$$

$$4.3. f(x) = \begin{cases} 2, & x \geq 0, \\ -2, & x < 0, \end{cases} x_0 = 0.$$

$$4.6. f(x) = \cos \frac{1}{x}, x_0 = 0.$$

5. [11, с. 119] Перевірити, чи має ліву і праву границі у точці $x = a$ функція:

$$5.1. y = \frac{x}{|x|}, x = 0.$$

$$5.2. y = \operatorname{sgn} x, x = 0.$$

$$5.3. y = [x], x = -1.$$

$$5.4. f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 2, & x = 0, \end{cases} x = 0; x = \pi.$$

$$5.5. y = (0,5)^{\frac{1}{x}}, x = 0.$$

$$5.6. y = \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x), x = 0; x = \frac{\pi}{2}; x = \pi.$$

$$5.7. y = \frac{1}{(x-1)^2}, x = 1.$$

$$5.8. y = \frac{4x+3}{64x^2+27}, x = -\frac{3}{4}.$$

$$5.9. f(x) = \begin{cases} 1+x, & x > 0, \\ 1-x, & x \leq 0, \end{cases} x = 0; x = 1.$$

$$5.10. f(x) = \begin{cases} e^x, & x < 0, \\ b+x, & x \geq 0, \end{cases} x = 0; x = 1.$$

Практичне заняття №12

Тема: Нескінченно малі і нескінченно великі функції

№1. Знайти границю функції:

$$1.1. \lim_{x \rightarrow 1} (2x^2 + 3x - 4).$$

$$1.2. \lim_{x \rightarrow 2} (x\sqrt{x+2} - x^2 - x).$$

$$1.3. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x+4}{6-5x}.$$

$$1.4. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 3x + 6}{x+2}.$$

$$1.5. \lim_{x \rightarrow 2} (3x)^{x^2}.$$

$$1.6. \lim_{x \rightarrow 1} (2x^2)^{\lg x}.$$

$$1.7. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} (x^3 + 2\cos x).$$

$$1.8. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^2 + 3x} - x^3}{\operatorname{tg} \frac{\pi x}{4} + 2x}.$$

Відповідь: 1) 1; 2) -2; 3) 7; 4) 3; 5) 6^4 ; 6) 1; 7) $\frac{\pi^3}{64} + \sqrt{2}$; 8) $\frac{1}{3}$.

№2. [11, с.132] Знайти точку, в якій функція $y = f(x)$ має границею число A :

$$2.1. f(x) = (x^2 - 6x)^2 - 2(x-3)^2, A = 81.$$

$$2.2. f(x) = 7\left(x + \frac{1}{x}\right) - 2\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right), A = 9.$$

$$2.3. f(x) = \frac{(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)}{(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)}, A = 1.$$

$$2.4. f(x) = \frac{\log_2(9-2^x)}{3-x}, A = 1.$$

Відповідь: 1) 3; $3 \pm 2\sqrt{5}$; 2) 2; $\frac{1}{2}$; 3) 0; 4) 0.

№3. [12] Знайти границю функції:

$$3.1. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2}.$$

$$3.2. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 3x - 2}{x^3 - 8}.$$

$$3.3. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^3 - 2x^2 - x - 2}.$$

$$3.4. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^5 - (1+5x)}{x^2 + x^5}.$$

$$3.5. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^3 - 2x^2 + x - 1}{x^3 - x^2 + 3x - 3}.$$

$$3.6. \lim_{x \rightarrow 7} \frac{2x^2 - 11x - 21}{x^2 - 9x + 14}.$$

$$3.7. \lim_{x \rightarrow -5} \frac{(x^2 + 2x)^2 - 14(x^2 + 2x) - 15}{x^4 - 29x^2 + 100}.$$

$$3.8. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^m - 1}{x^n - 1}.$$

$$3.9. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 3x^{11} + 2}{x^{50} + 2x^{30} - 3}.$$

$$3.10. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x^2 + 1)^5 - (1 - 3x^2)^6}{3x^2 - x^3}.$$

$$3.11. \lim_{x \rightarrow a} \frac{(x^n - a^n) - na^{n-1}(x - a)}{(x - a)^2}.$$

$$3.12. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{101} - 101x + 100}{x^2 - 2x + 1}.$$

Відповідь: 1) 4; 2) $\frac{3}{4}$; 3) $-\frac{1}{3}$; 4) 10; 5) $\frac{3}{4}$; 6) $\frac{17}{5}$; 7) $\frac{64}{105}$; 8) $\frac{m}{n}$;

12) 5050.

☞4. Знайти границю функції:

$$4.1. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x-2} - 1}{x-3}.$$

$$4.2. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - \sqrt{x}}{1 - \sqrt{x}}.$$

$$4.3. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{5-x} - 2}{\sqrt{2-x} - 1}.$$

$$4.4. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1-x} - \sqrt[3]{1+x}}{x}.$$

$$4.5. \lim_{x \rightarrow 8} \frac{\sqrt{1-x} - 3}{2 + \sqrt[3]{x}}.$$

$$4.6. \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sqrt{1 - \operatorname{tg} x} - \sqrt{1 + \operatorname{tg} x}}{\sin 2x}.$$

$$4.7. \lim_{x \rightarrow -1} \frac{1 + \sqrt[3]{x}}{1 + \sqrt[5]{x}}. \text{ (Заміна } x = z^{15} \text{).}$$

$$4.8. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - \sqrt{3x-2}}{x^2 - 4}.$$

Відповідь: 1) $\frac{1}{2}$; 2) -3 ; 3) $\frac{1}{2}$; 4) $-\frac{2}{3}$; 5) -2 ; 6) $-\frac{1}{2}$; 7) $\frac{5}{3}$; 8) $\frac{1}{16}$.

☞5. [14, с.326] Знайти границю функції:

$$5.1. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - 3x + 4}{1 - x - x^2}.$$

$$5.2. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x + 4 + \sin x}{x - 2}.$$

$$5.3. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(1+x)(1+2x) \cdot \dots \cdot (1+10x)}{x^{10} + 1}.$$

$$5.4. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}}{\sqrt{x+1}}.$$

$$5.5. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(2x-1)^{15} (3x-1)^{31}}{(x^2 + 13x + 4)^{23}}.$$

$$5.6. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2 + 2} - \sqrt[3]{8x^3 + x}}{\sqrt{x^2 + 5}}.$$

$$5.7. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x+5)^5 + (x+6)^5 + (x+7)^5}{x^5 + 5^5}.$$

$$5.8. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x+1)^2(3-7x)^2}{(2x-1)^4}.$$

$$5.9. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x-1)^{20}(2x+3)^{15}}{(3x+17)^{35}}.$$

$$5.10. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\left(x - \sqrt{x^2 - 1}\right)^{20} - \left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)^{20}}{x^{20}}.$$

Відповідь: 1) -2; 2) 2; 3) 10!; 4) 1; 5) $2^{15} \cdot 3^{31}$; 7) 3; 8) $\frac{49}{16}$; 9) $\frac{2^{15}}{3^{35}}$; 10) 2^{20} .

№6. Знайти границю функції:

$$6.1. \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x - \sqrt{x^2 + x + 2}\right).$$

$$6.2. \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{1}{x(x-2)^2} - \frac{1}{x^2 - 3x + 2}\right).$$

$$6.3. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt[3]{x^3 + 3x^2 + 4x} - \sqrt[3]{x^3 - 3x^2 + 4}\right).$$

$$6.4. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt{x^2 + \sqrt{x^2 + \sqrt{x^2}}} - \sqrt{x^2}\right).$$

$$6.5. \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{m}{1-x^m} - \frac{n}{1-x^n}\right), m, n \in \mathbb{N}. \text{ (Заміна } x-1=y.)$$

$$6.6. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt{x^4 + 2x^2 - 1} - \sqrt{x^4 - 2x^2 - 1}\right).$$

📖 Практичне заняття №13

Тема: Техніка знаходження границь функцій. Таблиця „чудових” границь

№1. [12] Знайти границю функції:

$$1.1. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{x}.$$

$$1.6. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^3 x}{x - \sin 2x}.$$

$$1.2. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 7x - \sin 3x}{\sin 2x}.$$

$$1.7. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 3x}{x \cdot \operatorname{tg} 2x}.$$

$$1.3. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{\sin^3 x}.$$

$$1.8. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{\sqrt[4]{x+1} - 1}.$$

$$1.4. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 2x}{\arcsin 3x}.$$

$$1.9. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt[3]{\operatorname{tg} x} - 1}{2\sin^2 x - 1}.$$

$$1.5. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{\cos x}}{1 - \cos \sqrt{x}}.$$

$$1.10. \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{\sin(x-2)}{x^2-4} + 2^{\frac{1}{(x-2)^2}} \right).$$

$$1.11. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right)}{1 - 4\sin^2 x}.$$

$$1.12. \lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{3}} \frac{\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)}{1 - 8\cos^3 x}.$$

$$1.13. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{1 - \sqrt[3]{\sin 3x}}{\sqrt{\operatorname{tg} \frac{3x}{2} - 1}}.$$

$$1.14. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{\operatorname{tg} x} - \sqrt{\operatorname{tg} 1}}{\sqrt[3]{\sin x} - \sqrt[3]{\sin 1}}.$$

Відповідь: 1) 3; 2) 2; 3) 1; 4) $\frac{2}{3}$; 5) 0; 6) ∞ ; 7) $\frac{9}{4}$; 8) 16.

✎2. [11, с.133] Знайти границю функції:

$$2.1. \lim_{x \rightarrow a} \frac{e^x - e^a}{x - a}.$$

$$2.2. \lim_{x \rightarrow a} \frac{\ln x - \ln a}{x - a}.$$

$$2.3. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{10^x - 1}{2^x - 1}.$$

$$2.4. \lim_{x \rightarrow +\infty} x(\ln(x+1) - \ln x).$$

$$2.5. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3^{\operatorname{tg} 3x} - 1}{\sin 3x}.$$

$$2.6. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+x} - 1}{2x}.$$

$$2.7. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^x - \sqrt{1+x}}{x}.$$

$$2.14. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+3x+x^2) + \ln(1-3x+x^2)}{x^2}.$$

$$2.8. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin 5x} - e^{\sin x}}{\ln(1+2x)}.$$

$$2.9. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - \cos x}{\sin^2 x}.$$

$$2.10. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - 1}{\sqrt{1 + \sin x^2} - 1}.$$

$$2.11. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg}(x^2 + 2x)}{\arcsin 2x}.$$

$$2.12. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \cos 2x}{\ln \cos 5x}.$$

$$2.13. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + 4x\right)}{x}.$$

✎3. [15, с.188] Знайти границю функції:

$$3.1. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + 4}{x^2 - 4} \right)^{x^2}.$$

$$3.2. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\sqrt{1+x} - x \right)^{\frac{1}{x}}.$$

$$3.3. \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + 3x^4 \right)^{\frac{1}{\sin^2 x}}.$$

$$3.4. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(1 + \operatorname{ctg} x \right)^{\operatorname{tg} x}.$$

$$3.5. \lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{x^2}}.$$

$$3.6. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\sin x)^{\operatorname{tg}^2 x}.$$

$$3.9. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{xe^x + 1}{x\pi^x + 1} \right)^{\frac{1}{x^2}}.$$

$$3.7. \lim_{x \rightarrow 0} (\cos 6x)^{\operatorname{ctg}^2 x}.$$

$$3.10. \lim_{x \rightarrow 0} (\cos x + \operatorname{arctg}^2 x)^{\frac{1}{\operatorname{arctg} x^2}}.$$

$$3.8. \lim_{x \rightarrow 0} (\ln(e+x))^{\operatorname{ctg} x}.$$

Відповідь 1) e^8 ; 2) $\frac{1}{\sqrt{e}}$; 3) e^3 ; 4) e ; 5) \sqrt{e} ; 6) $\frac{1}{\sqrt{e}}$; 7) e^{-18} ; 8) $e^{\frac{1}{e}}$; 9) $\frac{e}{\pi}$; 10) \sqrt{e} .

4. [15] Знайти значення α і β , при яких функція є нескінченно малою:

$$4.1. f(x) = \ln(1 + e^{3x}) - \alpha x - \beta, x \rightarrow +\infty; x \rightarrow -\infty.$$

$$4.2. f(x) = x \operatorname{arctg} x - \alpha x - \beta, x \rightarrow +\infty; x \rightarrow -\infty.$$

$$4.3. f(x) = x^\alpha \sin \frac{1}{x^\beta}, x \rightarrow +0.$$

$$4.4. f(x) = \frac{\ln(1 + x^\alpha)}{x^\beta}, x \rightarrow +0.$$

$$4.5. f(x) = x^\alpha \operatorname{arctg} \frac{1}{x^\beta}, x \rightarrow +0.$$

$$4.6. f(x) = (1 - x^\alpha)^{x^\beta}, x \rightarrow +0.$$

5. [15] Знайти значення α і β , при яких функції $f(x)$ і $g(x) = \alpha x^\beta$ еквівалентні:

$$5.1. f(x) = \sqrt{2x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}, x \rightarrow +0; x \rightarrow +\infty.$$

$$5.2. f(x) = \sqrt{1 - 2x} - \sqrt[3]{1 - 3x}, x \rightarrow 0. \text{ (Вказівка. Використати формулу Тейлора).}$$

$$5.3. f(x) = 2e^{x^4} + (\cos x - 1)^2 + x^5 - 2, x \rightarrow 0.$$

$$5.4. f(x) = \sin^2 2x + \arcsin^2 x + 2 \operatorname{arctg} x^2, x \rightarrow 0.$$

$$5.5. f(x) = 1 - \cos \left(1 - \cos \frac{1}{x} \right), x \rightarrow \infty.$$

6. [12, с. 92] 1) Визначити, які із наступних функцій при $x \rightarrow 0$ будуть нескінченно малими одного порядку, вищого порядку, нижчого порядку у порівнянні з x ; 2) визначити порядок малості у порівнянні із нескінченно малою $\beta(x) = x$:

$$6.1. \alpha(x) = -\frac{x}{2}.$$

$$6.2. \alpha(x) = \sqrt[3]{\sin x}.$$

$$6.3. \alpha(x) = x + \sqrt[3]{\sin x}.$$

$$6.4. \alpha(x) = \sqrt{1+2x} - \sqrt{1-x}.$$

$$6.5. \alpha(x) = \operatorname{tg} x - \sin x.$$

$$6.6. \alpha(x) = \sqrt{4+x} - 2.$$

$$6.7. \alpha(x) = \frac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt{1+x}}.$$

$$6.8. \alpha(x) = \operatorname{tg} \sqrt[3]{x^3 \sqrt{x}}.$$

$$6.9. \alpha(x) = \lg \left(1 - \frac{1}{2} \sin x \right).$$

$$6.10. \alpha(x) = \sqrt{1-2x} - \sqrt[3]{1-3x}.$$

Відповідь: 1) 6.1, 6.4, 6.6, 6.7, 6.9 – одного порядку; 6.5, 6.6 – вищого порядку; 6.2, 6.3, 6.8 – нижчого порядку; 2) 6.2, 6.3 – порядок 2; 6.5 – порядок 3; 6.8 – порядок $\frac{4}{9}$; 6.10 – порядок 2.

7. [12, с. 93] *Визначити порядок малості наступних нескінченно малих функцій відносно нескінченно малої функції $\beta(x) = x - 1$ при $x \rightarrow 1$:*

$$7.1. \alpha(x) = x^3 + 2x - 3.$$

$$7.3. \alpha(x) = \sqrt{1-\sqrt{x}}.$$

$$7.2. \alpha(x) = \ln(x^2 + 2x - 2).$$

$$7.4. \alpha(x) = x^x - 1.$$

Відповідь: 1), 2), 3), 4) нескінченно малі першого порядку.

8. [12, с. 93] *Визначити порядок наступних нескінченно великих функцій відносно нескінченно великої функції $\beta(x) = x$:*

$$8.1. \alpha(x) = 3x^2 + 5x - 3.$$

$$8.4. \alpha(x) = \ln(2 + e^{3x^2}).$$

$$8.2. \alpha(x) = \frac{3x^3}{1-2x+x^2}.$$

$$8.5. \alpha(x) = \sqrt{3+\sqrt{x}}.$$

$$8.3. \alpha(x) = \sqrt[5]{x^3} - \sqrt{x} + \sqrt{x}.$$

Відповідь: 1), 4) другого порядку; 2) першого порядку; 3) порядку $\frac{3}{5}$; 5) порядку $\frac{1}{4}$.

9. [12, с. 93] *При $x \rightarrow 1$ наступні функції є нескінченно великими. Визначити їх порядок у порівнянні із нескінченно великою функцією $\beta(x) = \frac{1}{x-1}$, $x \rightarrow 1$:*

$$9.1. \alpha(x) = \frac{x^2}{x^3 - 1}.$$

$$9.2. \alpha(x) = \frac{\sin x}{\sqrt[3]{1 - x^2}}.$$

$$9.3. \alpha(x) = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}.$$

$$9.4. \alpha(x) = \frac{1}{\sin \pi x}.$$

$$9.5. \alpha(x) = \frac{1}{e^{\cos \frac{\pi}{2} x} - 1}.$$

Відповідь: 1) другого порядку; 2) першого порядку; 3) першого порядку; 4) порядку $\frac{2}{3}$.

📖 Практичне заняття №14

Тема: Функції, неперервні в точці, їх властивості

✎1. [12] Виходячи з означення $(\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0))$, довести неперервність функцій:

$$1.1. y = 3x^2 - 2x + 1, x \in \mathbb{R}.$$

$$1.3. y = \cos(ax + b), x \in \mathbb{R}.$$

$$1.2. y = \frac{x^3 + x - 1}{2x^2 + 3x - 5}, x \in (2; 3).$$

$$1.4. y = \frac{x^2 \cos x}{1 + \sin^2 x}, x \in \mathbb{R}.$$

✎2. [12] Виходячи з означення неперервності функції в термінах „ $\varepsilon - \delta$ ”, довести неперервність функцій:

$$2.1. y = \frac{x+3}{2-3x}, x_0 = \frac{1}{2}.$$

$$2.3. y = \operatorname{tg} x, x_0 \in D(y).$$

$$2.2. y = \sqrt{x}, x_0 \in D(y).$$

$$2.4. y = \frac{1}{x^2}, x_0 \in D(y).$$

✎3. [12] Виходячи з означення неперервності функції $(\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = 0)$, довести неперервність функцій:

$$3.1. y = x^2 + 3x + 1, x_0 \in \mathbb{R}.$$

$$3.3. y = \arcsin x, x_0 \in (-1; 1).$$

$$3.2. y = 2^x, x_0 \in \mathbb{R}.$$

$$3.4. y = \sqrt[3]{x}, x_0 \in \mathbb{R}.$$

✎4. [12] Знайти односторонні границі функцій:

$$4.1. f(x) = \begin{cases} x+1, & x \leq 2, \\ -2x+1, & x > 2, \end{cases} x_0 = 2.$$

$$4.2. f(x) = \frac{\sin x}{|x|}, x_0 = 0.$$

$$4.3. f(x) = \frac{x^3 - 1}{|x - 1|}, x_0 = 1.$$

$$4.4. f(x) = \frac{\sqrt{1 - \cos 2x}}{x}, x_0 = 0.$$

$$4.5. f(x) = \cos \frac{\pi}{x}, x_0 = 0.$$

$$4.6. f(x) = x + \frac{2}{1 + 2^{\frac{1}{2-x}}}, x_0 = 2.$$

$$4.7. f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x-2}, & x < 0, \\ 1, & x = 0, \\ x, & 0 < x < 1, \\ -2x, & 1 \leq x \leq 2, \end{cases} x_0 = 0, x_0 = 1.$$

$$4.8. f(x) = \frac{\cos x}{3 - 2^{\frac{1}{\sin x}}}, x_0 = 0.$$

▣5. [13, с.116] Дослідити на неперервність композиції $f \circ g$ і $g \circ f$:

$$5.1. f(x) = \operatorname{sgn} x, g(x) = 1 + x^2.$$

$$5.2. f(x) = \operatorname{sgn} x, g(x) = x(1 - x^2).$$

$$5.3. f(x) = \operatorname{sgn}(x - 1), g(x) = \operatorname{sgn}(x + 1).$$

▣6. [11] Знайти множину точок неперервності функцій:

$$6.1. f(x) = x^2 - 2x - 3.$$

$$6.6. f(x) = \sqrt{\sin^3 x}.$$

$$6.2. f(x) = \frac{x^2 + 1}{2x^3 - 3x^2 - 3x + 2}.$$

$$6.7. f(x) = \arcsin \frac{2x}{x^2 + 1}.$$

$$6.3. f(x) = \sqrt{9 - 4x^2}.$$

$$6.8. f(x) = x^{\frac{1}{\operatorname{tg} x}}.$$

$$6.4. f(x) = \frac{x - 1}{\sqrt{x^2 - 1}}.$$

$$6.5. f(x) = \sin x + \operatorname{tg} x.$$

7. Виходячи з неперервності показникової функції, довести неперервність функцій:

7.1. $y = \operatorname{ch} x$.

7.3. $y = \operatorname{cth} x$.

7.2. $y = \operatorname{th} x$.

7.4. $y = \log_a x$, $a > 0$, $a \neq 1$.

8. Виходячи з неперервності тригонометричних функцій, довести неперервність обернених тригонометричних функцій:

8.1. $y = \arcsin x$.

8.3. $y = \operatorname{arctg} x$.

8.2. $y = \arccos x$.

8.4. $y = \operatorname{arcctg} x$.

9. Довести, що якщо $f(x)$ – неперервна функція, то неперервними будуть:

9.1. $y = |f(x)|$.

9.2. $y = f(|x|)$.

10. [15] Знайти значення a , при якому функція $f(x)$ буде неперервною:

$$10.1. f(x) = \begin{cases} \frac{(1+x)^n - 1}{x}, & x \neq 0, n \in \mathbb{N}, \\ a, & x = 0. \end{cases}$$

$$10.2. f(x) = \begin{cases} x \operatorname{ctg} 2x, & x \neq 0, |x| < \frac{\pi}{2}, \\ a, & x = 0. \end{cases}$$

$$10.3. f(x) = \begin{cases} (\pi + 2x) \operatorname{tg} x, & x \neq -\frac{\pi}{2}, -\pi < x < \frac{\pi}{2}, \\ a, & x = -\frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

$$10.4. f(x) = \begin{cases} \frac{c^x - 1}{x}, & x \neq 0, c > 0, \\ a, & x = 0. \end{cases}$$

$$10.5. f(x) = \begin{cases} \frac{\operatorname{sh} x}{x}, & x \neq 0, \\ a, & x = 0. \end{cases}$$

$$10.6. f(x) = \begin{cases} x \ln x^2, & x \neq 0, \\ a, & x = 0. \end{cases}$$

$$10.7. f(x) = \begin{cases} \cos x, & x \leq 0, \\ a(x-1), & x > 0, \end{cases} \quad x_0 = 0.$$

📖 Практичне заняття № 15

Тема: Точки розриву, їх класифікація.

Самостійна робота №2

☞1. [15] Дослідити функцію на неперервність, встановити характер точок розриву і побудувати графік:

$$1.1. y = \begin{cases} x^2 + 2, & x \leq 0, \\ x - 1, & x > 0. \end{cases}$$

$$1.2. y = \begin{cases} -\frac{1}{x}, & x < 0, \\ 5x - x^2, & x \geq 0. \end{cases}$$

$$1.3. y = \begin{cases} 1 - x^3, & x < 0, \\ (x - 1)^3, & 0 \leq x \leq 2 \\ 4 - x, & x > 2. \end{cases}$$

$$1.4. y = \begin{cases} 2^x, & -1 \leq x < 1, \\ 1, & x = 1, \\ x - 1, & x > 1. \end{cases}$$

$$1.5. y = \begin{cases} \cos x, & -\frac{\pi}{2} \leq x < \frac{\pi}{4}, \\ 1, & x = \frac{\pi}{4}, \\ x^2 - \frac{\pi^2}{16}, & \frac{\pi}{4} < x \leq \pi. \end{cases}$$

$$1.6. y = \begin{cases} -x, & x \leq -1, \\ \frac{2}{x-1}, & x > -1. \end{cases}$$

$$1.7. y = \begin{cases} \frac{1}{x-1}, & x < 0, \\ (x+1)^2, & 0 \leq x \leq 2, \\ 1 - x, & x > 2. \end{cases}$$

$$1.8. y = x - E(x).$$

$$1.9. y = \frac{1}{x - E(x)}.$$

$$1.10. y = \frac{(x+1)^2 - (x-1)^2}{x^2 - x}.$$

☞2. [15] Знайти точки розриву функції, встановити їх рід, до визначити функцію в точках усувного розриву, знайти стрибки в точках розриву I роду:

$$2.1. y = \frac{x}{x^2 + x - 6}.$$

$$2.2. y = \frac{1}{x^3 - 3x^2 - 4x}.$$

$$2.3. y = \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}}{\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x}}.$$

$$2.4. y = \frac{x}{\cos x}.$$

$$2.5. y = \frac{\arcsin x}{\sin 2x}.$$

$$2.6. y = \frac{\cos \frac{\pi x}{2}}{x^3 - x^2}.$$

$$2.7. y = \frac{2}{1-2^x}.$$

$$2.8. y = \lg(x^2 + 3x).$$

$$2.9. y = \frac{1}{\ln|x-1|}.$$

$$2.10. y = \operatorname{sgn}(x^2 - 2x - 3).$$

$$2.11. y = \operatorname{sgn}(\cos x).$$

$$2.12. y = \arcsin \frac{1}{x}.$$

$$2.13. y = (-1)^{\left[\frac{1}{x}\right]}.$$

$$2.14. y = \operatorname{arcctg} \frac{1}{x^2}.$$

$$2.15. y = \frac{3^{\frac{1}{x}} + 2^{\frac{1}{x}}}{3^{\frac{1}{x}} - 2^{\frac{1}{x}}}.$$

✎3. Дослідити на неперервність і побудувати графік функції $f(x)$:

$$3.1. f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1+x^n}.$$

$$3.4. f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x + e^{nx}}{1 + xe^{nx}}.$$

$$3.2. f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{2n} - 1}{x^{2n} + 1}.$$

$$3.5. f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} x \operatorname{arctg}(n \operatorname{ctg} x).$$

$$3.3. f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \cos^n x.$$

$$3.6. f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x^n + x^{2n}}.$$

✎ Самостійна робота №2 (зразок)

✎1. Довести (знайти $\delta(\varepsilon)$), що: $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x^2 - 5x - 2}{x - 2} = 7.$

✎2. Обчислити границю функції: $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 5x^2 + 7x + 3}{x^3 + 4x^2 + 5x + 2}.$

✎3. Обчислити границю функції: $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 3x + 2}{\sqrt{5-x} - \sqrt{x+1}}.$

✎4. Обчислити границю функції: $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x-1}{2x+4} \right)^{-x}.$

✎5. Обчислити границю функції: $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{e^{3x} - 1}{x} \right)^{\cos^2(\pi/4+x)}.$

📖 Практичне заняття №16

Тема: Властивості функцій, неперервних на відрізку. Рівномірна неперервність

✎1. [15, с.247] Довести, що функція $f(x)$ рівномірно неперервна:

$$1.1. f(x) = \sin x \text{ на } \mathbb{R}.$$

$$1.3. f(x) = \sqrt{x} \text{ на } [0; +\infty).$$

$$1.2. f(x) = \frac{1}{x} \text{ на } [a; +\infty), a > 0.$$

$$1.4. f(x) = 2x - 1 \text{ на } \mathbb{R}.$$

2. Довести, що функція $f(x)$ не є рівномірно неперервною на X :

2.1. $f(x) = \frac{1}{x}$, $X = (0; a]$, $a > 0$.

2.3. $f(x) = \cos \frac{1}{x}$, $X = (0; 1)$.

2.2. $f(x) = x^2$, $X = \mathbb{R}$.

2.4. $f(x) = \ln x$, $X = (0; 1)$.

3. [11] Знайти множину значень функції на X :

3.1. $f(x) = \sin^4 x + \cos^4 x$, $X = [0; \pi]$.

3.2. $f(x) = x^2 - 2x - 3$, $X = [-2; 2]$.

3.3. $f(x) = \frac{x+3}{x-5}$, $X = [0; 1]$.

3.4. $f(x) = \left| \frac{1-|x|}{1+|x|} \right|$, $X = [0; 2]$.

3.5. $f(x) = 4^x + 4^{-x}$, $X = [-1; 1]$.

3.6. $f(x) = \log_2(5 + \sin x)$, $X = [0; 2\pi]$.

3.7. $f(x) = \frac{x^2 - 5x + 1}{x^2 - 5x + 4}$, $X = [2; 3]$.

4. [11] Довести, що рівняння має принаймні один корінь:

4.1. $3\sin^2 x - 5\sin x + 1 = 0$.

4.4. $8^x - 3 \cdot 2^x - 16 = 0$.

4.2. $x^3 - |x| + 3 = 0$.

4.5. $x \arcsin x - 1 = 0$.

4.3. $\ln x + x = 0$.

4.6. $2\sqrt{2x^2 - x + 1} - x - 3 = 0$.

5. [15] Довести, що рівняння $x^3 - 3x^2 + 6x - 1 = 0$ має тільки один корінь. Знайти цей корінь з точністю до 0,1.

6. Довести, що рівняння $x^4 + 3x^2 - x - 2 = 0$ має тільки два дійсних корені.

7. [11] Довести, що: 1) довільний многочлен непарного степеня має принаймні один дійсний корінь; 2) многочлен парного степеня, який має значення за знаком, протилежне до знаку коефіцієнта при x у найвищому степені, має принаймні два корені.

8. [15, с. 213] Довести, що:

8.1. Рівняння $\frac{a_1}{x - \lambda_1} + \frac{a_2}{x - \lambda_2} + \frac{a_3}{x - \lambda_3} = 0$, де $a_i > 0$, $i = \overline{1, 3}$,

$\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$, має по одному дійсному кореню в інтервалах $(\lambda_1; \lambda_2)$ і $(\lambda_2; \lambda_3)$;

8.2. Рівняння $\sum_{j=1}^n \frac{a_j}{x - \lambda_j} = 0$, де $a_j > 0$, $j = \overline{1, n}$, $\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_n$, має

по одному дійсному кореню в інтервалах $(\lambda_j; \lambda_{j+1})$, $j = \overline{1, n-1}$.

9. [11] Дослідити функцію $f(x)$ на знак:

9.1. $f(x) = (8x^3 - 1)(4x^2 - 1)$.

9.2. $f(x) = (x^6 - 1)(x^3 - 1)$.

9.3. $f(x) = (x^8 - 1) \log_2 \left(x + \frac{1}{2} \right)$.

9.4. $f(x) = (2^x - 8) \sin x$.

9.5. $f(x) = (x^2 - 2x - 35) \arcsin x$.

9.6. $f(x) = (4x^4 - x^2) \arccos x$.

9.7. $f(x) = |13 + x| - |x - 2| - 3$.

9.8. $f(x) = |x^2 - 5x + 4| - |3 - 2x - x^2|$.

9.9. $f(x) = \log_{x^2 - 3x} (x^2 + 2x) - 1$.

9.10. $f(x) = x^{2 \log_{x^2} (x+2)^2} - 4$.

10. [11] Розв'язати нерівності:

10.1. $\frac{3x - 2}{2x - 3} > \frac{4x - 5}{5x - 4}$.

10.2. $\frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 5x + 6} < -2$.

10.3. $\frac{6x}{2x^2 - 3x + 4} + \frac{x}{2x^2 - 5x + 4} > 3$.

10.4. $\sqrt{-2x^2 + 11x - 5} > 2x - 11$.

10.5. $\sqrt{1+x} + \sqrt[4]{1-x} > 1$.

10.6. $\log_{\frac{1}{2}} \log_4 \frac{x^2 - 4x - 5}{x^2 + 2x} > 1$.

10.7. $(2x^2 + 3x + 2)^{x-1} > 1$.

10.8. $\log_2(x-7) > \log_2(21-x)$.

10.9. $\cos^2 x + 9 \sin x \cos x - 10 \sin^2 x > 0$.

✎11. [11] Розв'язати нерівності:

11.1. $\sqrt{4x-3-x^2} < x^3 + x$.

11.2. $5^{\sin x-1} + 5^{\cos x} > 6$.

11.3. $\left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{x-1}} + \left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{x+3}} < \sqrt{x-1} + \sqrt{x+3}$.

11.4. $x^2 + 2x + 1 > \sin x$.

11.5. $\sin x \sin 5x < 1$.

✎12. [11] Визначити проміжки монотонності функції $y = f(x)$ і на кожному з них побудувати функцію $y = f^{-1}(x)$, якщо:

12.1. $f(x) = 2x - 1$.

12.6. $f(x) = 2^{\operatorname{arctg} x}$.

12.2. $f(x) = x^2$.

12.7. $f(x) = \log_2(4 - x^2)$.

12.3. $f(x) = \sin x$.

12.8. $\log_3(3^x + 1)$.

12.4. $f(x) = \operatorname{tg} x$.

12.5. $f(x) = e^{x^2-4x+3}$.

📖 Практичне заняття №17

Тема: Елементарні функції та їх неперервність. Дослідження і побудова графіків

✎1. [13, с. 118] Побудувати графіки раціональних функцій:

1.1. $y = (1 - x^2)(2 + x)$.

1.2. $y = x^2 - x^4$.

1.3. $y = x(a - x)^2(a + x)^3, a > 0$.

1.4. $y = \frac{1}{1 - x^2}$.

1.5. $y = \frac{(x+1)(x-2)}{(x-1)(x+2)}$.

1.6. $y = \pm \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$.

✎2. [13, с. 122] Побудувати графік складної функції $y = e^{y_1}$, якщо:

2.1. $y_1 = x^2$.

2.4. $y_1 = \frac{1}{x^2}$.

2.2. $y_1 = -x^2$.

2.3. $y_1 = \frac{1}{x}$.

2.5. $y_1 = -\frac{1}{x^2}$.

$$2.6. y_1 = \frac{2x}{1-x^2}.$$

✎3. [13, с. 122] Побудувати графік складної функції $y = \ln y_1$, якщо:

$$3.1. y_1 = 1 + x^2.$$

$$3.4. y_1 = \frac{1}{x^2}.$$

$$3.2. y_1 = (x-1)(x-2)^2(x-3)^3.$$

$$3.3. y_1 = \frac{1-x}{1+x}.$$

✎4. Побудувати графіки функцій:

$$4.1. y = \sin^2 x.$$

$$4.3. y = \sin x \sin 3x.$$

$$4.2. y = \sin^3 x.$$

$$4.4. y = \sin x^2.$$

✎5. Побудувати графіки функцій:

$$5.1. y = \arcsin \frac{1}{x}.$$

$$5.3. y = \operatorname{arccotg} \frac{1}{x}.$$

$$5.2. y = \arccos \frac{1}{x}.$$

$$5.4. y = \arcsin(2 \sin x).$$

✎6. Побудувати графік функції $y = \arcsin y_1$, якщо:

$$6.1. y_1 = 1 - \frac{x}{2}.$$

$$6.3. y_1 = \frac{1-x}{1+x}.$$

$$6.2. y_1 = \frac{2x}{1+x^2}.$$

$$6.4. y_1 = e^x.$$

✎7. [13, с. 137] Побудувати графік функції $y = f(x)$, $x \in \mathbb{R}$, якщо $f(x+1) = 2f(x)$ і $f(x) = x(1-x)$ при $0 \leq x \leq 1$.

✎8. [13, с. 137] Побудувати графік функції $y = f(x)$, $x \in \mathbb{R}$, якщо $f(x+\pi) = f(x) + \sin x$ і $f(x) = 0$ при $0 \leq x \leq \pi$.

✎9. [13, с. 157] Дослідити на неперервність і побудувати графіки функцій:

$$9.1. y = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1+x^n}, x \geq 0.$$

$$9.4. y = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x}{1+(2 \sin x)^{2n}}.$$

$$9.2. y = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^x - n^{-x}}{n^x + n^{-x}}.$$

$$9.5. y = \lim_{n \rightarrow \infty} (x \operatorname{arctg}(n \operatorname{ctg} x)).$$

$$9.3. y = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1+x^{2n}}.$$

$$9.6. y = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x+x^2 e^{nx}}{1+e^{nx}}.$$

⌚ Контрольна робота №2 (зразок)

➤ 1. Обчислити границю функції: $\lim_{x \rightarrow 1/3} \frac{\sqrt[3]{x/9} - 1/3}{\sqrt{1/3 + x} - \sqrt{2x}}$.

➤ 2. Обчислити границю функції: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin(\pi(x+1))}{\ln(1+2x)}$.

➤ 3. Обчислити границю функції: $\lim_{x \rightarrow 2\pi} \frac{\sin 7x - \sin 3x}{e^{x^2} - e^{4\pi^2}}$.

➤ 4. Обчислити границю функції: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^{3x} - 3^{2x}}{x + \arcsin x^3}$.

➤ 5. Обчислити границю функції: $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x + \operatorname{arctg}^2 x)^{\frac{1}{\operatorname{arctg} x^2}}$.

➤ 6. Дослідити функцію на неперервність та побудувати її графік:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \leq 0, \\ 2^x, & 0 < x \leq 2, \\ x + 3, & x > 2. \end{cases}$$

➤ 7. Дослідити функцію на неперервність у вказаних точках:

$$f(x) = 7^{\frac{1}{5-x}} + 1; \quad x_1 = 4, \quad x_2 = 5.$$

Список рекомендованой літератури

1. Давидов М.О. Курс математического анализа. Ч. 1. – К.: Вища школа, 1979.
2. Дороговцев А.Я. Математичний аналіз. Ч.1 – К.: Либідь, 1993.
3. Кудрявцев Л.Д. Курс математического анализа. Т.1. – М.: Высшая школа, 1988.
4. Райков Д.А. Одномерный математический анализ. М.:Высшая школа, 1982.
5. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления, т.1, М.:Наука, 1970
6. Томусяк А.А., Трохименко В.С., Шунда Н.М. Математичний аналіз. Вступ до аналізу. – Вінниця, ВДПУ, 2001.
7. Зорич В.А. Математический анализ. Ч.1. – М.: Наука, 1981.
8. Шкіль М.І. Математичний аналіз. Ч.1, К.:Вища школа, 1978.
9. Dennis D. Berkey Calculus. – New York, 1988.
10. Thomas G. Calculus and analytic geometry. – Boston, 2000
11. Шунда Н.М., Томусяк А.А. Практикум з математичного аналізу. Вступ до аналізу. Диференціальне числення. – К.: Вища школа, 1993.
12. Виленкин Н.Я., Бохан К.А., Марон И.А. и др. Задачник по курсу математического анализа. Ч.1. – М.: Просвещение.
13. Ляшко И.И., Боярчук А.К., Гай Я.Г., Головач Г.П. Справочное пособие по математическому анализу. Ч.1. – К.: Высшая школа.
14. Вавилов В.В., Мельников И.И., Олейник С.Н, Паниченко П.И. Задачи по математике. Начала анализа. – М.:Наука, 1990. –608 с.
15. Кудрявцев Л.Д. и др. Сборник задач по математическому анализу. Т.1. – М.: Физматгиз, 2003. – 496 с.
16. Запорожец Г.И. Руководство к решению задач по математическому анализу. – М.: Высшая школа, 1966. – 460 с.
17. Мерзляк А.Г., Полонский В.Б., Рабинович Е.М., Якир М.С. Учимся решать задачи по началам анализа. – Киев: “Магістр – S”, 1998. – 416 с.
18. Рябушко А.П., Бархатов В.В., Державец В.В., Юреть И.Е. Сборник индивидуальных заданий по высшей математике. Часть 1. – Минск: Высшая школа, 1990. – 270 с.
19. Кузнецов Л.А. Сборник заданий по высшей математике (типовые расчеты). – М.: Высшая школа, 1983. – 175 с.

Навчальне видання

Ковтонюк Мар'яна Михайлівна
Бак Сергій Миколайович

РОБОЧИЙ ЗОШИТ СТУДЕНТА З МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ
І семестр
Вступ в математичний аналіз