Вінницький державний педагогічний університет
імені Михайла Коцюбинського
Інститут математики, фізики і технологічної освіти

Кафедра математики

РОБОЧИЙ ЗОШИТ СТУДЕНТА

з математичного аналізу

III семестр

Інтегральне числення функції однієї змінної. Ряди.

(за вимогами кредитно-модульної системи)

Вінниця 2018

Індивідуальний робочий зошит студента
Дисципліна: математичний аналіз
Розділ: Інтегральне числення функції однієї змінної. Ряди.

Укладачі: доктор педагогічних наук,
професор **Ковтонюк М. М.**
кандидат фізико-математичних наук,
доцент **Бак С. М.**
Рецензенти: кандидат фізико-математичних наук,
доцент **Тимошенко О. З.**

Затверджено рішенням кафедри математики ВДПУ імені Михайла Коцюбинського, протокол №1 від 29 серпня 2018 року.

Передмова

Робочий зошит з математичного аналізу призначений для використання студентами денної і заочної форм навчання фізико-математичних спеціальностей при вивченні тем "Інтегральне числення функції однієї змінної", "Ряди" в умовах кредитно-модульного навчання.

У **Робочому** зошиті подано робочий план студента з вказаних тем, за яким весь загальний обсяг матеріалу поділено на два загальні і чотири змістові модулі, наведено розрахунки рейтингових балів за видами поточного контролю, а також за модулями.

Кожен модуль складається з розширеного плану лекцій з вказівкою літератури, практичних занять з добіркою типових завдань для аудиторного і самостійного опрацювання.

Після кожного модуля подано текст контрольної роботи або тестового завдання в кількості 30 варіантів. Для допомоги у виконанні самостійної роботи в зошиті подано список рекомендованої літератури і шкалу оцінювання знань згідно з ECTS.

1. Робочий план студента.

Робочий план студента складений на основі навчальної програми з математичного аналізу, затвердженої Вченою радою Вінницького державного педагогічного університету імені Михайла Коцюбинського.

Програма навчальної дисципліни

Змістовий модуль 1. Інтегральне числення функцій однієї змінної. Невизначений (неозначений)інтеграл

Тема 1. Первісна та невизначений інтеграл. Задача відновлення функції за її похідною. Основні властивості невизначеного інтеграла. Таблиця основних невизначених інтегралів.

Тема 2. Основні методи інтегрування. Інтегрування частинами. Інтегрування підстановкою (заміна змінної). Поповнення таблиці основних невизначених інтегралів.

Тема 3. Розклад правильних раціональних дробів на прості дроби. Деякі відомості з теорії многочленів. Перша лема про подання правильного раціонального дробу. Друга лема про подання правильного раціонального дробу. Алгоритм розкладання правильних раціональних дробів.

Тема 4. **Інтегрування раціональних дробів.** Інтегрування елементарних раціональних дробів. Інтегрування раціональних дробів у загальному випадку.

Тема 5. Інтегрування деяких ірраціональних функцій. Інтегрування функцій вигляду $f(x)=R(x^{r_1},x^{r_2},...,x^{r_k})$, $f(x)=R\left(x,\sqrt[s]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)$. Інтегрування функцій вигляду $f\left(x\right)=R\left(x,\sqrt{ax^2+bx+c}\right)$. Підстановки Ейлера. Інтегрування біномних диференціалів $x^m(a+bx^r)^p\,dx$.

Тема 6. Інтегрування деяких трансцендентних функцій. Інтегрування функцій вигляду $R(\sin x,\cos x)$. Інтегрування функцій вигляду $\sin^m x,\ \cos^m x,\ \sin^m x\cos^n x$. Інтегрування функцій вигляду $e^{\alpha x}\cos\beta x$, $e^{\alpha x}\sin\beta x$, $x^n\cos\alpha x$, $x^n\sin\alpha x$, $x^n e^{\alpha x}$.

Змістовий модуль 2. Інтегральне числення функцій однієї змінної. Визначений інтеграл.

Тема 7. Визначений інтеграл. Класи інтегровних функцій. Задачі, що приводять до поняття визначеного інтеграла. Означення визначеного інтеграла. Необхідна умова інтегровності функції. Визначений інтеграл у шкільному курсі математики. Суми Дарбу, їх властивості. Достатна умова інтегровності функції. Класи інтегровних функцій.

Тема 8. Основні властивості визначеного інтеграла. Властивості визначеного інтеграла, пов'язані з арифметичними операціями. Адитивна властивість визначеного інтеграла. Властивості визначеного інтеграла, пов'язані з нерівностями. Теореми про середнє.

Тема 9. Інтеграл із змінною верхньою межею. Формула Ньютона-Лейбніца. Означення функції з допомогою інтеграла (інтеграл із змінною верхньою межею), її неперервність. Диференційовність інтеграла із змінною верхньою межею. Перлина математичного аналізу – формула Ньютона-Лейбніца.

Тема 10. Основні методи обчислення визначеного інтеграла. Наближені методи обчислення визначених інтегралів. Означення як інструмент обчислення визначених інтегралів. Формула Ньютона-Лейбніца як інструмент обчислення визначених інтегралів. Застосування інтегрування замінною змінних та інтегрування частинами при обчисленні визначеного інтеграла. Поняття про наближені методи обчислення визначених інтегралів. Формула прямокутників. Формула трапецій. Формула Сімпсона.

Тема 11. Застосування визначених інтегралів. Обчислення площ плоских фігур. Обчислення об'ємів тіл обертання. Обчислення довжини дуги кривої. Обчислення площі поверхні обертання. Обчислення статичних моментів і координат центра ваги плоскої кривої. Перша теорема Гульдіна. Друга теорема Гульдіна.

Тема 12. Узагальнення визначеного інтеграла. Невласні інтеграли від необмежених функцій. Невласні інтеграли з нескінченними межами.

Змістовий модуль 3. Числові та функціональні ряди.

Тема 13. Числові ряди, їх збіжність. Числові ряди з невід'ємними членами. Числовий ряд, його сумування. Сумування геометричної прогресії. Умови збіжності числового ряду. Гармонійний ряд. Властивості збіжних числових рядів. Критерії збіжності ряду з невід'ємними членами. Теорема про порівняння рядів. Достатні ознаки збіжності числового ряду з додатними членами (Д'Аламбера, Коші).

Тема 14. Абсолютна та умовна збіжність числового ряду. Абсолютна та умовна збіжність ряду з довільними членами. Збіжність числового ряду, у якого знаки змінюються почережно. Збереження комутативності додавання при сумуванні абсолютно збіжних рядів.

Тема 15. Функціональні послідовності та ряди. Функціональні властивості суми рівномірно збіжного функціонального ряду. Збіжність функціональних послідовностей та рядів. Область збіжності.Рівномірна збіжність функціональних послідовностей та рядів. Умови рівномірної збіжності. Ознака Вейєрштрасса рівномірної збіжності функціонального ряду. Неперервність суми рівномірно збіжного функціонального ряду. Почленне інтегрування рівномірно збіжного функціонального ряду. Почленне диференціювання рівномірно збіжного функціонального ряду.

Змістовий модуль 4. Степеневі ряди.

Тема 16. Степеневий ряд. Розвинення функцій у степеневий ряд. Формула Тейлора. Структура області збіжності степеневого ряду. Теорема Абеля. Знаходження радіуса збіжності степеневого ряду. Формула Коші-Адамара. Властивості суми степеневого ряду.

Тема 17. Розвинення у степеневий ряд деяких елементарних функцій. Розвинення у степеневий ряд функції $y=e^x$. Розвинення у степеневий ряд функцій $y=\sin x$, $y=\cos x$. Розвинення у степеневий ряд функції $y=\ln(1+x)$. Розвинення у степеневий ряд функції $y=(1-x)^{-1}$, $y=(1+x)^{\alpha}$. Використання почленного диференціювання та інтегрування при розвиненні функцій у степеневий ряд.

Тема 18. Наближені обчислення з допомогою степеневих рядів. Загальна постановка задачі. Обчислення наближених значень чисел e і π. Обчислення наближених значень тригонометричних функціій. Обчислення наближених значень логарифмів. Обчислення наближених значень коренів.

Структура навчальної дисципліни

Назви змістових модулів	Кількість годин					
	денна форма					
	усього	лк	пз	лз	інд	с.р.
Модуль 1						
Змістовий модуль 1. Невизначений інтеграл.						
Тема 1.		2	2			5
Тема 2.		2	2			5
Тема 3.		2	1			5
Тема 4.		2	1			5
Тема 5.		2	2			5,5
Тема 6.		2	2			5,5
Разом за змістовим модулем 1	53	12	10			31
Змістовий модуль 2. Інтегральне числення функцій однієї змінної. Визначений інтеграл.						
Тема 7.		2				4,5
Тема 8.		2	1			4,5
Тема 9.		2	1			4,5
Тема 10.		2	4	2		4,5
Тема 11.		2	2	4		4,5
Тема 12.		2	2			4,5
Разом за змістовим модулем 2	55	12	10	6		27
Змістовий модуль 3. Числові та функціональні ряди.						
Тема 13.		2	2			5
Тема 14.		2	2			5
Тема 15.		2	2			5
Разом за змістовим модулем 3	27	6	6			15
Змістовий модуль 4. Степеневі ряди.						
Тема 16.		2	2			4
Тема 17.		2	2	2		4
Тема 18.		2		2		5
Разом за змістовим модулем 4	27	6	4	4		13
Усього годин	**162**	**36**	**30**	**10**		**86**

Шкала оцінювання знань студентів у 2015-2016 навчальному році

Оцінка ЄКТС	Оцінка за розширеною шкалою	Мінімальний бал для отримання позитивної оцінки – 50, максимальний - 100
A	відмінно	90-100
B	дуже добре	80-89
C	добре	75-79
D	задовільно	60-74
E	достатньо	50-59
FX	незадовільно	35-49
F	неприйнятно	1-34

Розподіл рейтингових балів за видами діяльності

№	Вид діяльності	Коефіцієнт вартості (бали)	Кількість робіт	Результат (бали)
1.	Практичні заняття	05	16	8
2.	Домашні завдання	0,5	16	8
3.	Творче завдання	17	1	16
4.	Самостійна робота	8	1	8
5.	Контрольна робота	10	2	20
6.	Колоквіум	10	2	20
Всього за 3-й семестр:				**80 (80%)**
Екзамен				**20 (20%)**
Нормований рейтинговий бал				**100**

МОДУЛЬ 1.

🕮 Практичне заняття №1.

Тема: Первісна та невизначений інтеграл. Елементарні прийоми інтегрування.

✍**1.** *Перевірити, чи функція F є первісною для функції f на проміжку X:*

а) $F(x) = x^3 + x^2 + 3x + 4,\ f(x) = 3x^2 + 2x + 3,\ X = \mathbb{R};$

б) $F(x) = -\dfrac{1}{x^2} + 5,\ f(x) = \dfrac{2}{x^3},\ X_1 = (2;5),\ X_2 = (-1;1);$

в) $F(x) = \dfrac{1}{8}\arcsin^8 x,\ f(x) = \dfrac{x^7}{\sqrt{1-x^{16}}},\ X = (-1;1);$

г) $F(x) = \ln\dfrac{\sqrt{e^x+1}-1}{\sqrt{e^x+1}+1} + 3,\ f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{e^x+1}},\ X = \mathbb{R};$

д) $F(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{x^2}\sin\dfrac{1}{x}, & \text{якщо } x \neq 0, \\ 0 & \text{, якщо } x = 0, \end{cases}$

$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}\left(\dfrac{2}{3}\sin\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x}\cos\dfrac{1}{x}\right), & \text{якщо } x \neq 0, \\ 0 & \text{, якщо } x = 0, \end{cases} \quad X = \mathbb{R}.$

✍**2.** *Знайти функцію f, для якої задана функція є первісною. Записати інтеграл знайденої функції:*

а) $x^4 + 4x^3 - 5x^2 + 6x - 7;$ б) $\dfrac{x^7}{7} + \dfrac{2x^4\sqrt{x}}{3} + \dfrac{3x^2}{2} - \dfrac{2}{\sqrt{x}};$

в) $\sqrt[3]{3x^4 + 2x - 5} + \dfrac{4}{(x-2)^5};$ г) $\sin^3 2x \cdot \cos 8x^5;$

д) $\operatorname{th} x + \operatorname{cth} x;$ е) $\dfrac{1}{2}\operatorname{tg}^2 x + \ln|\cos x|;$

є) $\ln\left|x + \sqrt{x^2 + a}\right|;$ ж) $\dfrac{1}{2a}\ln\left|\dfrac{x+a}{x-a}\right|,\ a \in \mathbb{R}^+.$

✍**3.** *Обчислити інтеграли:*

а) $\int x(x+3)(x-2)dx;$ б) $\int (x^2-2)^2 dx;$

в) $\int\left(\frac{8}{x^3}+\frac{4}{x^2}+\frac{2}{x}\right)dx$; г) $\int\frac{x^2-2x+3}{\sqrt{x}}dx$;

д) $\int\sqrt[3]{x\sqrt{x\sqrt{x}}}\,dx$; е) $\int\frac{\sqrt{1-x^2}+\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1-x^4}}dx$;

є) $\int\frac{dx}{x^2-4x+8}$.

✍**4.** *Обчислити інтеграли:*

а) $\int 2^x\cdot 3^x\cdot e^x dx$; б) $\int\frac{2^x+3^x}{6^x}dx$;

в) $\int\left(3^{x-3}+4^{x+4}\right)12^{-x}dx$; г) $\int\frac{e^{3x}+8}{e^{2x}+2e^x+4}dx$;

д) $\int\frac{dx}{e^x+e^{-x}}$; е) $\int x^2e^{3x^3}dx$.

✍**5.** *Обчислити інтеграли:*

а) $\int\sin^2\frac{x}{2}dx$; б) $\int\mathrm{tg}^2\,xdx$;

в) $\int\frac{dx}{1+\cos 2x}$; г) $\int\frac{\cos 2x}{\cos x-\sin x}dx$;

д) $\int\mathrm{sh}^2\frac{x}{2}dx$; е) $\int\mathrm{th}^2\,xdx$.

✍**6.** *Обчислити інтеграли (інтегрування функцій, які містять квадратний тричлен):*

а) $\int\frac{dx}{x^2+4x+20}$; б) $\int\frac{dx}{5-4x-x^2}$;

в) $\int\frac{3x+4}{x^2+x+1}dx$; г) $\int\frac{2-3x}{\sqrt{4+x^2}}dx$;

д) $\int\frac{8x+10}{\sqrt{5+2x-x^2}}dx$.

🕮 Практичне заняття №2.

Тема: Інтегрування заміною змінних.

✍**1.** *Обчислити інтеграли* $\left(\int f(ax+b)dx=\frac{1}{a}F(ax+b)+C\right)$*:*

а) $\int(4x-3)^7dx$; б) $\int\cos(ax+b)dx,\ a\neq 0$;

в) $\int \frac{dx}{(2x+5)^4}$; г) $\int \cos(ax+b)\cos(ax-b)dx$;

д) $\int \sqrt{ax+b}dx$; е) $\int \frac{dx}{\cos^2(ax+b)}$, $a \neq 0$.

✍**2.** *Обчислити інтеграли* $\left(\int \frac{f'(x)dx}{f(x)} = \ln|f(x)| + C \right)$*:*

а) $\int \frac{(2x+7)dx}{x^2+7x+8}$; б) $\int \frac{dx}{x\ln x \ln(\ln x)}$;

в) $\int \frac{\sin 2x dx}{3\cos^2 x + 4\sin^2 x}$; г) $\int \frac{dx}{\sin^2 x \cdot \operatorname{ctg} x}$.

✍**3.** *Обчислити інтеграли* [10,17]*:*

а) $\int \frac{xdx}{\left(1-x^2\right)^2}$; б) $\int \left(\frac{x}{x^5+2}\right)^4 dx$;

в) $\int x^2 \sqrt[3]{x^3+1}\, dx$; г) $\int x\sqrt{1-x}\, dx$;

д) $\int \frac{\ln(\arcsin x)dx}{\sqrt{1-x^2}\arcsin x}$; е) $\int \frac{e^{2x}dx}{\sqrt{e^{2x}+2e^x+2}}$;

є) $\int e^{2x^2+2x+1}(2x+1)dx$; ж) $\int e^{\sqrt{x}} \cdot \frac{dx}{\sqrt{x}}$;

з) $\int \frac{e^{2x}dx}{\sqrt{e^{4x}+1}}$; и) $\int \frac{(\sin x - 2\cos x)dx}{\sin^3 x}$.

✍**4.** *Обчислити інтеграли:*

а) $\int \frac{e^{tgx}dx}{\cos^2 x}$; б) $\int \frac{dx}{x\sin^2(\ln x)}$;

в) $\int x\cos(9-x^2)dx$; г) $\int \sqrt{\sin x}\cos^5 x\, dx$;

д) $\int \frac{\cos x dx}{\sqrt{\cos 2x}}$; е) $\int \frac{\sin x dx}{\sqrt{1+4\cos x+\cos^2 x}}$;

є) $\int \frac{\operatorname{arctg}\sqrt{x}dx}{(1+x)\sqrt{x}}$; ж) $\int \sqrt{\frac{\arcsin x}{1-x^2}}\, dx$.

✍**5.** *Обчислити інтеграли:*

а) $\int \sqrt{a^2 - x^2}\,dx$; б) $\int \frac{dx}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}$;

в) $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$; г) $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-9}}$;

д) $\int \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}$; е) $\int \frac{dx}{\sqrt{(x+a)(x+b)}}$.

✍**6.** *Обчислити інтеграли:*

а) $\int \frac{e^x - 1}{e^x + 1}\,dx$; б) $\int \frac{1-e^{2x}}{1+e^{3x}}\,dx$;

в) $\int \frac{e^x}{e^{2x}+1}\,dx$; г) $\int \frac{e^x\left(1+e^x\right)}{\sqrt{1-e^{2x}}}\,dx$.

🕮 Практичне заняття №3.
Тема: Інтегрування частинами.

✍**1.** *Обчислити інтеграли:*

а) $\int x \cdot 2^x\,dx$; б) $\int x^5 \ln x dx$;

в) $\int x^2 \cos x\,dx$; г) $\int \left(ax^2 + bx + c\right)\sin 2x\,dx$;

д) $\int \operatorname{arctg} x\,dx$; е) $\int \arcsin^2 x\,dx$;

є) $\int \ln\left(x + \sqrt{4+x^2}\right)dx$; ж) $\int x^2\sqrt{x^2+a^2}\,dx$;

з) $\int e^{ax}\sin bx\,dx,\ a^2 + b^2 \neq 0$; и) $\int e^{ax}\cos bx\,dx,\ a^2 + b^2 \neq 0$.

✍**2.** *Обчислити інтеграли:*

а) $\int \frac{x \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$; б) $\int \sqrt{x^2 + a}\,dx$;

в) $\int x^2 e^x \cos x\,dx$; г) $\int x e^x \sin x\,dx$;

д) $\int \sin(\ln x)\,dx$; е) $\int \cos\left(\ln x\right)dx$.

✍**3.** *Обчислити інтеграли методом невизначених коефіцієнтів:*

а) $\int (x^2 + 2x + 3)e^{-3x}\,dx$; б) $\int (x^2 + 2)\cos 2x\,dx$;

в) $\int \left((x^2 + 3x + 1)e^{-3x} + (x-1)\sin x\right)dx$; г) $\int e^x \cos 2x\,dx$.

✍**4.** *Вивести рекурентні формули для обчислення інтегралів [2] :*

а) $I_n = \int x^n e^{ax} dx;$ б) $I_n = \int \ln^n x\, dx;$

в) $I_n = \int \sin^n x\, dx;$ г) $I_n = \int \cos^n x\, dx;$

д) $I_n = \int \frac{x^n dx}{\sqrt{x^2 + a}};$ е) $I_n = \int \frac{dx}{\sin^n x}.$

✍**5.** *Довести формули (*$P_n(x)$ *– многочлен степеня* n*)*[10] *:*

а) $\int P_n(x) e^{ax} dx = \left(P_n(x) - \frac{P_n'(x)}{a} + \ldots + (-1)^n \frac{P_n^{(n)}(x)}{a^n} \right) \frac{e^{ax}}{a} + C;$

б) $\int P_n(x) \sin ax\, dx = -\left(P_n(x) - \frac{P_n''(x)}{a^2} + \frac{P_n^{(4)}(x)}{a^4} - \ldots \right) \frac{\cos ax}{a} +$

$+\left(\frac{P_n'(x)}{a} - \frac{P_n'''(x)}{a^3} + \ldots \right) \frac{\sin ax}{a} + C;$

в) $\int P_n(x) \cos ax\, dx = \left(P_n(x) - \frac{P_n''(x)}{a^2} + \frac{P_n^{(4)}(x)}{a^4} - \ldots \right) \frac{\sin ax}{a} +$

$+\left(\frac{P_n'(x)}{a} - \frac{P_n'''(x)}{a^3} + \ldots \right) \frac{\cos ax}{a} + C.$

🕮 Практичне заняття №4.

Тема: Інтегрування раціональних функцій.

✍**1.** *Обчислити інтеграли:*

а) $\int \frac{x-4}{x^2 - 5x + 6} dx;$ б) $\int \frac{x^3 - 7x + 18}{x^2 - 3x + 2} dx;$

в) $\int \frac{x^5 + x^4 - 8}{x^3 - 4x} dx;$ г) $\int \frac{3x-1}{x^3 - x^2 - 2x} dx;$

д) $\int \frac{2x^2 + 3x + 8}{(x+1)(2x+3)(3x+4)} dx;$ е) $\int \frac{x^7 - 5x^5 + 7x^4 + 4}{x^5 - 5x^3 + 4x} dx.$

✍**2.** *Обчислити інтеграли:*

а) $\int \frac{x^4}{(x+1)^2 (x-2)} dx;$ б) $\int \frac{x^5 + x}{(x+2)^2 (x+3)^2} dx;$

в) $\int \frac{dx}{(x+1)(x+2)^2(x+3)^3}$; г) $\int \frac{2x^4+3x^2+x-1}{x^3-3x^2}dx.$

✍**3.** *Обчислити інтеграли:*

а) $\int \frac{dx}{x^2+4x+9}$; б) $\int \frac{2x+3}{x^2+8x+20}dx$;

в) $\int \frac{(x+1)dx}{\left(x^2-6x+5\right)\left(x^2+6x+10\right)}$; г) $\int \frac{2x^2-3x-3}{(x-1)\left(x^2-2x+5\right)}dx$;

д) $\int \frac{x\left(1-x^2\right)}{1+x^4}dx$; е) $\int \frac{3x+5}{x\left(x^2+1\right)^2}dx$;

є) $\int \frac{3x^4-4}{x^2\left(x^2+2\right)^3}dx$; ж) $\int \frac{x\left(2x^2+2x-1\right)}{(x-1)^2\left(x^2+x+1\right)}dx$;

з) $\int \frac{dx}{x^8+x^6}$; и) $\int \frac{x^4+2x^2+4}{\left(x^2+1\right)^3}dx$;

і) $\int \frac{3x^2+2x+10}{\left(x^3+x^2\right)\left(2x^2-4x+5\right)}dx$; ї) $\int \frac{2x^4-2x^3-x^2+2}{2x^3-4x^2+3x-1}dx.$

✍**4.** *Обчислити інтеграли методом Остроградського:*

а) $\int \frac{x^4+x^3+x+4}{\left(x^3+1\right)^2}dx$; б) $\int \frac{x^2}{\left(x^2+2x+2\right)^2}dx$;

в) $\int \frac{x}{(x-1)^2(x+1)^3}dx$; г) $\int \frac{2x+1}{\left(x^2+2x+5\right)^2}dx$; д) $\int \frac{\left(4x^2-8x\right)dx}{(x-1)^2\left(x^2+1\right)^2}.$

🕮 Практичне заняття №5.

Тема: Інтегрування ірраціональних функцій.

✍**1.** *Обчислити інтеграли (* $\int R\left(x, x^{r_1},..., x^{r_k}\right)dx$ *):*

а) $\int \frac{dx}{x+\sqrt[3]{x^2}}$; б) $\int \frac{\sqrt{x}\,dx}{\sqrt[4]{x^3}+1}$;

в) $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$; г) $\int \frac{\left(x^{\frac{1}{3}}+x^{-\frac{5}{4}}\right)dx}{x^{\frac{1}{2}+1}}$.

✍**2.** *Обчислити інтеграли* $\left(\int R\left(x, \sqrt[n]{(ax+b)^m}\right)dx; \int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)dx\right)$:

а) $\int \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \cdot \frac{dx}{1-x}$; б) $\int \frac{\sqrt{x-1}-\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-1}+\sqrt{x+1}}dx$;

в) $\int \frac{x\sqrt[3]{2+x}}{x+\sqrt[3]{2+x}}dx$; г) $\int \frac{dx}{x\left(2+\sqrt[3]{\frac{x-1}{x}}\right)}$;

д) $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{(x-1)^3(x+2)^5}}$; е) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(x+1)^2(x-1)^4}}$.

✍**3.** *Обчислити інтеграли за допомогою підстановок Ейлера [10,13]:*

а) $\int \frac{dx}{x+\sqrt{x^2+x+1}}$; б) $\int \frac{x-\sqrt{x^2+3x+2}}{x+\sqrt{x^2+3x+2}}dx$;

в) $\int \frac{x-1}{\left(x^2+2x\right)^{\frac{3}{2}}}dx$; г) $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{7x-10-x^2}}$;

д) $\int \frac{\sqrt{x^2+x+1}}{(x+1)^2}dx,\ x>-1$; е) $\int \frac{dx}{\left(1+\sqrt{x^2+x}\right)^2}$.

✍**4.** *Обчислити інтеграли (частинні випадки квадратичних ірраціональностей):*

а) $\int \frac{x^{10}dx}{\sqrt{x^2+1}}$; б) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+4x+7}}$;

в) $\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2-2}}$; г) $\int \frac{dx}{x\sqrt{5x^2-2x+1}}$;

д) $\int \frac{x^3dx}{(x+1)\sqrt{1+2x-x^2}}$; е) $\int \frac{x^2dx}{\left(4-2x+x^2\right)\sqrt{2+2x-x^2}}$.

✍**5.** *Обчислити інтеграли* $\int x^m\left(a+bx^n\right)^p dx$ *за допомогою підстановок Чебишева [12]:*

а) $\int \sqrt{x}\left(1+\sqrt[3]{x}\right)^3 dx$; б) $\int \frac{\sqrt{x}\,dx}{\left(1+\sqrt[3]{x}\right)^2}$;

в) $\int \sqrt[3]{x}\cdot\sqrt[3]{1+3\sqrt[3]{x^2}}\,dx$; г) $\int \frac{x^3dx}{\sqrt{1+2x^2}}$;

д) $\int \frac{x^3dx}{\sqrt{\left(1-x^2\right)^3}}$; е) $\int x\sqrt{1+x^4}\,dx$;

є) $\int \sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}\,dx$; ж) $\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt{x}}}{x}\,dx$.

🕮 Практичне заняття №6.
Тема: Інтегрування тригонометричних функцій.

✍**1.** *Обчислити інтеграли:*

а) $\int \sin 2x \sin 3x\,dx$; б) $\int \sin 7x \sin 15x\,dx$;

в) $\int \sin 3x \cos 8x\,dx$; г) $\int \cos 4x \cos 9x\,dx$;

д) $\int \sin x \sin 2x \sin 3x\,dx$; е) $\int \cos x \cos 3x \cos 5x\,dx$.

✍**2.** *Обчислити інтеграли, використовуючи універсальну підстановку* $\left(\operatorname{tg}\frac{x}{2}=t\right)$:

а) $\int \frac{dx}{5-4\sin x+3\cos x}$; б) $\int \frac{dx}{2\sin x-\cos x+5}$;

в) $\int \frac{2-\sin x}{2+\cos x}\,dx$; г) $\int \frac{(1+\sin x)dx}{\sin x(1+\cos x)}$.

✍**3.** *Обчислити інтеграли, використовуючи тригонометричні підстановки:*

а) $\int \frac{dx}{\sin^5 x\cos x}$; б) $\int \frac{\sin^3 x\,dx}{\cos^4 x}$;

в) $\int \sin^7 2x\cos^5 2x\,dx$; г) $\int \frac{\sin 3x\,dx}{\cos x}$;

д) $\int \frac{\sin^2 x\,dx}{\cos^3 x}$; е) $\int \frac{dx}{\cos^3 x}$;

є) $\int \frac{\sin^2 x \cos x\, dx}{\sin^4 x - 1}$;   ж) $\int \frac{\left(\cos^5 x + 2\cos^3 x\right) dx}{\sin^4 x + \sin^2 x}$.

✍**4.** *Обчислити інтеграли, використовуючи тригонометричні підстановки:*

а) $\int \frac{\cos^2 x \sin^2 x\, dx}{\sin^8 x + \cos^8 x}$;   б) $\int \frac{\sin x\, dx}{\sin^3 x + \cos^3 x}$;

в) $\int \frac{\sin^2 x\, dx}{\cos^6 x}$;   г) $\int \frac{dx}{\cos^4 x \sin^2 x}$;

д) $\int \frac{dx}{\sin^3 x \cos^5 x}$;   е) $\int ctg^6 x\, dx$;

є) $\int \frac{(2tgx + 3)\, dx}{\sin^2 x + 2\cos^2 x}$;   ж) $\int \frac{(3\cos x - 8\sin x)\, dx}{7\cos x + 4\sin x}$;

з) $\int \frac{dx}{\sin^4 x + \cos^4 x}$;   и) $\int \frac{dx}{\sin^6 x + \cos^6 x}$.

🕮 Практичне заняття №7.

Тема: Інтегрування трансцендентних функцій.

✍**1.** *Вивести рекурентні співвідношення для інтегралів:*

а) $I_n = \int \sin^n x\, dx$;   б) $I_n = \int \cos^n x\, dx$;

в) $I_n = \int \frac{dx}{\sin^n x}$;   г) $I_n = \int \frac{dx}{\cos^n x}$;

д) $I_n = \int \left(a^2 - x^2\right)^n dx$;   е) $I_n = \int \ln^n x\, dx$;

є) $I_n = \int x^n e^x\, dx$;   ж) $I_n = \int \mathrm{tg}^n x\, dx$.

✍**2.** *Обчислити інтеграли:*

а) $\int \frac{xe^x\, dx}{(x+1)^2}$;   б) $\int xe^{\sqrt{x}} dx$;

в) $\int \frac{x \sin x\, dx}{\sqrt{\left(4 - \sin^2 x\right)^3}}$;   г) $\int \frac{(1 + \sin x)e^x\, dx}{1 + \cos x}$.

✍**3.** *Обчислити інтеграли* [17]*:*

а) $\int \mathrm{sh}\, x\, \mathrm{sh}\, 2x\, dx$;   б) $\int \mathrm{ch}\, x\, \mathrm{ch}\, 3x\, \mathrm{ch}\, 5x\, dx$;

в) $\int \mathrm{sh}^3 x\, dx$;   г) $\int \mathrm{sh}^2 x\, \mathrm{ch}^3 x\, dx$;

д) $\int \frac{dx}{\operatorname{sh} x \operatorname{ch}^4 x}$; е) $\int \frac{\operatorname{ch}^3 x\, dx}{\operatorname{sh}^4 x}$.

⌛Самостійна робота №1.

✍1. Обчислити інтеграл використовуючи метод заміни змінної:

1. $\int \frac{\sin x dx}{\cos^3 x - 1}$;	**11.** $\int \frac{e^x dx}{e^{2x} - 6e^x + 13}$;	**22.** $\int \frac{dx}{\sqrt{x}\left(1+1\sqrt{x}\right)}$;
2. $\int \frac{\ln(\ln x) dx}{x}$;	**12.** $\int \frac{xdx}{\sqrt{5-4x}}$;	**23.** $\int \frac{\cos x dx}{\sqrt[3]{\sin^2 x}}$;
3. $\int \frac{\sin\sqrt{x}}{2\sqrt{x}} dx$;	**13.** $\int \sqrt{e^x - 1} dx$;	**24.** $\int \frac{\sin x dx}{\sqrt[3]{3+2\cos x}}$;
4. $\int \frac{xdx}{x^2+x+1}$;	**14.** $\int x^2 \sqrt[3]{1+x^3} dx$;	**25.** $\int \frac{dx}{x\sqrt{1-\ln^2 x}}$;
5. $\int \frac{xdx}{x^4+4}$;	**15.** $\int \frac{dx}{\sqrt{x}(x+1)}$;	**26.** $\int \frac{2^{\ln x} dx}{x\left(1+4^{\ln x}\right)}$;
6. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$;	**16.** $\int x e^{-x^2} dx$;	**27.** $\int \frac{\sin 5x dx}{1+\cos^2 5x}$;
7. $\int \frac{\ln^2 x dx}{x}$;	**17.** $\int \sin^5 x \cos x dx$;	**28.** $\int \frac{3-2\operatorname{ctg}^2 x}{\cos^2 x} dx$;
8. $\int \frac{\sin x + \cos x}{\sqrt[3]{\sin x - \cos x}} dx$;	**18.** $\int \sqrt{\sin x} \cos^5 x dx$;	**29.** $\int \frac{dx}{\sqrt{x}(x-7)}$;
9. $\int \frac{dx}{\sin x}$;	**19.** $\int \frac{\sqrt{1+\ln x} dx}{x}$;	**30.** $\int \frac{dx}{\left(1+x^2\right)\left(\operatorname{arctg} x - 3\right)}$.
10. $\int \frac{\operatorname{arctg} x\, dx}{1+x^2}$;	**20.** $\int \frac{3^{arctgx}}{1+x^2} dx$;	
	21. $\int \frac{\sin x dx}{\sqrt{\cos 2x}}$;	

✍2. Обчислити інтеграли використовуючи метод інтегрування частинами:

1. $\int \operatorname{arctg}\sqrt{2x-1} dx$;	**11.** $\int x^2 \sin 2x dx$;	**21.** $\int \frac{\ln x}{x^2} dx$;
2. $\int \frac{\operatorname{arctg} x}{x^2} dx$;	**12.** $\int \arcsin x dx$;	**22.** $\int \sqrt{x} \ln x dx$;
3. $\int \frac{\operatorname{arctg}\sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx$;	**13.** $\int \arccos x dx$;	**23.** $\int (1-x)\sin x dx$;
4. $\int x^2 \ln\sqrt{1-x} dx$;	**14.** $\int x^3 \operatorname{arctg} x dx$;	**24.** $\int \operatorname{arctg}\sqrt{x} dx$;
	15. $\int x^2 \cdot 2^x dx$;	

5. $\int xe^{-x}dx$; **6.** $\int x^2\cos 2x\,dx$; **7.** $\int \arccos x\,dx$; **8.** $\int \ln x\,dx$; **9.** $\int \sqrt{x}\ln^2 x\,dx$; **10.** $\int x^3e^{-x^2}dx$;	**16.** $\int \left(x^2+3\right)e^{-2x}dx$; **17.** $\int (x+2)\ln x\,dx$; **18.** $\int x\ln\left(1+x^2\right)dx$; **19.** $\int x^2e^{-\frac{x}{2}}dx$; **20.** $\int x^2\cos 3x\,dx$;	**25.** $\int \left(x^2+3\right)\cos x\,dx$; **26.** $\int \frac{xdx}{\cos^2 x}$; **27.** $\int x^3e^{x^2}dx$; **28.** $\int \frac{xdx}{\sin^2 x}$; **29.** $\int \frac{\ln x}{x^3}dx$; **30.** $\int e^{2x}\sin 2x\,dx$.

✍3. Обчислити інтеграли від дробово-раціональних функцій:

1. $\int \frac{3x+13}{(x-1)\left(x^2+2x+5\right)}dx$; **2.** $\int \frac{2x^2+2x+20}{(x-1)\left(x^2+2x+5\right)}dx$; **3.** $\int \frac{36dx}{(x+2)\left(x^2-2x+10\right)}dx$; **4.** $\int \frac{\left(4x^2+3x+17\right)dx}{(x-1)\left(x^2+2x+5\right)}$; **5.** $\int \frac{\left(4x-x^2-12\right)dx}{x^3+8}$; **6.** $\int \frac{(6-9x)dx}{x^3+8}$; **7.** $\int \frac{\left(2x^2+7x+7\right)dx}{(x-1)\left(x^2+2x+5\right)}$; **8.** $\int \frac{(3x-1)dx}{(x+3)\left(x^2-4x+17\right)}$; **9.** $\int \frac{\left(4x^2+x+9\right)dx}{x^3+27}$;	**17.** $\int \frac{\left(19x-x^2-34\right)dx}{(x+1)\left(x^2-4x+8\right)}$; **18.** $\int \frac{\left(2x^2+4x+20\right)dx}{(x+1)\left(x^2-2x+10\right)}$; **19.** $\int \frac{\left(4x^2+7x+4\right)dx}{(x-3)\left(x^2-2x+5\right)}$; **20.** $\int \frac{\left(5x^2+17x+14\right)dx}{(x+1)\left(x^2+6x+34\right)}$; **21.** $\int \frac{(12-6x)dx}{(x+1)\left(x^2-4x+3\right)}$; **22.** $\int \frac{x^2+3x+2}{x^3-1}dx$; **23.** $\int \frac{(7x-10)dx}{x^3+8}$; **24.** $\int \frac{\left(x^2-5x+40\right)dx}{(x+2)\left(x^2-2x+10\right)}$; **25.** $\int \frac{(3-9x)dx}{x^3-1}$;

10. $\int \frac{\left(x^2+6x+12\right)dx}{x^3-27}$;	**26.** $\int \frac{\left(x^2+23\right)dx}{(x+1)\left(x^2+6x+13\right)}$;
11. $\int \frac{x^2-6x+8}{x^3+8}dx$;	**27.** $\int \frac{\left(4x^2+28\right)dx}{(x+3)\left(x^2-2x+10\right)}$;
12. $\int \frac{x^2+3x-6}{(x+1)\left(x^2+6x+13\right)}dx$;	**28.** $\int \frac{(5x+13)dx}{(x+3)\left(x^2+8x+20\right)}$;
13. $\int \frac{(9x-9)dx}{(x+1)\left(x^2-4x+13\right)}$;	**29.** $\int \frac{\left(3x^2+2x+9\right)dx}{x^3+64}$;
14. $\int \frac{4x+2}{x^4+4x^2}dx$;	**30.** $\int \frac{(2x+16)dx}{(x-4)\left(x^2-2x+26\right)}$.
15. $\int \frac{\left(x^2-13x+40\right)dx}{(x+1)\left(x^2-4x+29\right)}$;	
16. $\int \frac{(4x-10)dx}{(x+2)\left(x^2-2x+10\right)}$;	

✍4. Обчислити інтеграли від ірраціональних функцій:

1. $\int \frac{1-\sqrt{x+1}}{\left(1+\sqrt[3]{x+1}\right)\sqrt{x+1}}dx$;	**16.** $\int \frac{\sqrt{3x+1}+2}{\sqrt{3x+1}+2\sqrt[3]{3x+1}}dx$;
2. $\int \frac{\sqrt[4]{x}+\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}dx$;	**17.** $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(2x+1)^2}-\sqrt{2x+1}}$;
3. $\int \frac{\sqrt[3]{(x+1)^2}+\sqrt[6]{x+1}}{\sqrt{x+1}+\sqrt[3]{x+1}}dx$;	**18.** $\int \frac{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x}-\sqrt[6]{x}-1}dx$;
4. $\int \frac{\left(\sqrt[3]{x}+1\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}{\sqrt[6]{x^5}}dx$;	**19.** $\int \frac{\sqrt{x}}{1-\sqrt[4]{x}}dx$;
5. $\int \frac{x+\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[6]{x}}{x\left(1+\sqrt[3]{x}\right)}dx$;	**20.** $\int \frac{\sqrt[6]{3x+1}+1}{\sqrt{3x+1}-\sqrt[3]{3x+1}}dx$;
6. $\int \frac{\sqrt{2x+1}+\sqrt[3]{2x+1}}{\sqrt{2x+1}}dx$;	**21.** $\int \frac{\sqrt{x}}{x-4\sqrt[3]{x^2}}dx$;
	22. $\int \frac{x+\sqrt{x}+\sqrt[3]{x^2}}{x\left(1+\sqrt[3]{x}\right)}dx$;

7. $\int\frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt[3]{x-1}+\sqrt[6]{x-1}}dx;$	**23.** $\int\frac{\sqrt{x}}{x-\sqrt[3]{x^2}}dx;$
8. $\int\frac{\sqrt{x-1}-2\sqrt[3]{x-1}}{2\sqrt[3]{x-1}+\sqrt{x-1}}dx;$	**24.** $\int\frac{\sqrt{x}}{3x+\sqrt[3]{x^2}}dx;$
9. $\int\frac{\sqrt{x+3}}{\sqrt[3]{x+3}+\sqrt[6]{x+3}}dx;$	**25.** $\int\frac{\sqrt{x}}{1-\sqrt[3]{x}}dx;$
10. $\int\frac{\sqrt[6]{x-1}}{\sqrt[3]{x-1}+\sqrt{x-1}}dx;$	**26.** $\int\frac{x-\sqrt[3]{x^2}}{x\left(1+\sqrt[6]{x}\right)}dx;$
11. $\int\frac{\sqrt{x+3}}{1+\sqrt[3]{x+3}}dx;$	**27.** $\int\frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt[4]{x}}dx;$
12. $\int\frac{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}+\sqrt[6]{x}}dx;$	**28.** $\int\frac{\sqrt{3x+1}-1}{2+\sqrt{3x+1}-\sqrt[3]{3x+1}}dx;$
13. $\int\frac{\sqrt[3]{x+3}}{\sqrt[3]{x+3}+\sqrt{x+3}}dx;$	**29.** $\int\frac{\sqrt{x}}{4x-\sqrt[3]{x^2}}dx;$
14. $\int\frac{x+1+\sqrt[3]{(x+1)^2}+\sqrt[6]{x+1}}{(x+1)\left(1+\sqrt[3]{x+1}\right)}dx;$	**30.** $\int\frac{\sqrt{x+1}-1}{\left(\sqrt[3]{x+1}+1\right)\sqrt{x+1}}dx.$
15. $\int\frac{\sqrt{x}-1}{\left(\sqrt[3]{x}+1\right)\sqrt{x}}dx;$	

✍5. Обчислити інтеграли, використовуючи підстановки Ейлера:

1. $\int\frac{dx}{(x+1)\sqrt{1+x^2}};$	**11.** $\int\frac{dx}{x\sqrt{1+x-x^2}};$	**21.** $\int\frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2-x-1}};$
2. $\int\frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2-1}};$	**12.** $\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2+x-2}};$	**22.** $\int\frac{dx}{(x-1)\sqrt{1+x-x^2}};$
3. $\int\frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2-1}};$	**13.** $\int\frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2-x+1}};$	**23.** $\int\frac{dx}{(x+1)\sqrt{1-x-x^2}};$
4. $\int\frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}};$	**14.** $\int\frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2-x-1}};$	**24.** $\int\frac{dx}{(x-1)\sqrt{1-x-x^2}};$
5. $\int\frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}};$	**15.** $\int\frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+x+1}};$	**25.** $\int\frac{dx}{x\sqrt{1-x-x^2}};$

6. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$;	**16.** $\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+x-1}}$;	**26.** $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+x-3}}$;
7. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+x+1}}$;	**17.** $\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{1+x-x^2}}$;	**27.** $\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+x-2}}$;
8. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-x+1}}$;	**18.** $\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2+x+1}}$;	**28.** $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-3x+2}}$;
9. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+x-1}}$;	**19.** $\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2-x+1}}$;	**29.** $\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{2-x-x^2}}$;
10. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-x-1}}$;	**20.** $\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2+x-1}}$;	**30.** $\int \frac{dx}{x\sqrt{1-3x-2x^2}}$.

✍6. Обчислити інтеграли від тригонометричних функцій:

1. $\int \cos^4 3x \sin^2 3x\,dx$;	**11.** $\int \frac{\sin^3 x}{\sqrt[5]{\cos^3 x}}dx$;	**21.** $\int \frac{\sin^3 2x}{\sqrt[3]{\cos^2 2x}}dx$;
2. $\int \sqrt[5]{\sin^4 x}\cos^3 x\,dx$;	**12.** $\int \sqrt[3]{\cos^2 x}\sin^3 x\,dx$;	**22.** $\int \sin^4 x\cos^3 x\,dx$;
3. $\int \cos^3 x\sin^8 x\,dx$;	**13.** $\int \sqrt[3]{\sin^2 x}\cos^3 x\,dx$;	**23.** $\int \sin^2 x\cos^4 x dx$;
4. $\int \cos^4 x\sin^3 x\,dx$;	**14.** $\int \sqrt[5]{\cos^3 2x}\sin^3 2x\,dx$;	**24.** $\int \sin^4 x\cos^2 x\,dx$;
5. $\int \frac{\cos^3 x\,dx}{\sqrt[3]{\sin^4 x}}$;	**15.** $\int \frac{\cos^3 x\,dx}{\sqrt[5]{\sin^3 x}}$;	**25.** $\int \sin^3 x\cos^8 x\,dx$;
6. $\int \sqrt[6]{\sin^3 2x}\cos^3 2x\,dx$;	**16.** $\int \sin^2 2x\cos^4 2x\,dx$;	**26.** $\int \frac{3\cos^3 x}{\sin^4 x}dx$;
7. $\int \frac{\cos^3 x}{\sqrt[3]{\sin^2 x}}dx$;	**17.** $\int \frac{\sin^3 x}{\sqrt[3]{\cos^2 x}}dx$;	**27.** $\int \sin^5 x\sqrt[5]{\cos^3 x}dx$;
8. $\int \frac{\sin^3 x}{\sqrt[3]{\cos^4 x}}dx$;	**18.** $\int \sqrt[5]{\cos^4 x}\sin^3 x\,dx$;	**28.** $\int \sin^4 x\cos^5 x\,dx$;
9. $\int \frac{3\sin^3 x}{\cos^4 x}dx$;	**19.** $\int \sin^4 2x\cos^2 2x\,dx$;	**29.** $\int \sin^4 3x\cos^2 3x\,dx$;
10. $\int \sin^5 x\cos^4 x\,dx$;	**20.** $\int \frac{\cos^3 2x}{\sqrt[3]{\sin^2 2x}}dx$;	**30.** $\int \frac{\sin^3 x}{\sqrt[3]{\cos^4 x}}dx$.

✍7. Обчислити інтеграли, використовуючи універсальну тригонометричну підстановку:

1. $\int \frac{dx}{5+2\sin x+3\cos x}$;	**16.** $\int \frac{dx}{4\cos x+3\sin x}$;

2. $\int\frac{dx}{5-4\sin x+2\cos x}$;	**17.** $\int\frac{2-\sin x+3\cos x}{1+\cos x}dx$;
3. $\int\frac{3\sin x-2\cos x}{1+\cos x}dx$;	**18.** $\int\frac{dx}{5+\sin x+3\cos x}$;
4. $\int\frac{dx}{5+3\cos x-5\sin x}$;	**19.** $\int\frac{dx}{4\sin x+3\cos x+5}$;
5. $\int\frac{dx}{5\cos x+10\sin x}$;	**20.** $\int\frac{7+6\sin x-5\cos x}{1+\cos x}dx$;
6. $\int\frac{dx}{3+2\cos x-\sin x}$;	**21.** $\int\frac{dx}{3+\sin x+\cos x}$;
7. $\int\frac{dx}{5-3\cos x}$;	**22.** $\int\frac{6\sin x+\cos x}{1+\cos x}dx$;
8. $\int\frac{dx}{8-4\sin x+7\cos x}$;	**23.** $\int\frac{dx}{3\cos x-4\sin x}$;
9. $\int\frac{dx}{3+5\cos x}$;	**24.** $\int\frac{dx}{5+3\cos x}$;
10. $\int\frac{dx}{2\sin x+3\cos x+3}$;	**25.** $\int\frac{dx}{4\sin x-6\cos x}$;
11. $\int\frac{dx}{5+4\sin x}$;	**26.** $\int\frac{dx}{3+5\sin x+3\cos x}$;
12. $\int\frac{dx}{8+4\cos x}$;	**27.** $\int\frac{dx}{\cos x-3\sin x}$;
13. $\int\frac{dx}{3\sin x-4\cos x}$;	**28.** $\int\frac{dx}{4-4\sin x+3\cos x}$;
14. $\int\frac{dx}{7\sin x-3\cos x}$;	**29.** $\int\frac{dx}{3\sin x-\cos x}$;
15. $\int\frac{dx}{2+4\sin x+3\cos x}$;	**30.** $\int\frac{dx}{2-3\cos x+\sin x}$.

🕮 Практичне заняття №8.

Тема: Означення визначеного інтегралу.

Інтегральна сума та суми Дарбу.

✍**1.** *Обчислити визначені інтеграли як границі інтегральних сум Рімана, розбивши відрізок інтегрування на* n *рівних частин* [12, *с.73;* 17, *с.121*]*:*

а) $\int_0^1 e^x dx$; б) $\int_0^2 x^2 dx$; в) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\, dx$;

г) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos x\, dx$; д) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin x\, dx$; е) $\int_0^2 \left[x^2\right] dx$.

✍**2.** *Обчислити визначені інтеграли як границі інтегральних сум Рімана, розбивши відрізок інтегрування точками, які утворюють геометричну прогресію:*

а) $\int_1^2 x^3 dx$; б) $\int_a^b \frac{\ln x}{x} dx$;

в) $\int_1^2 x^m dx,\ m \in Z \setminus \{-1\}$; г) $\int_1^2 x \ln x\, dx$.

✍**3.** *Обчислити верхні і нижні інтегральні суми, що відповідають розбиттю відрізка* $[a; b]$ *на* n *рівних частин:*

а) $\int_0^2 \frac{dx}{1+x^2},\ \ n=5;\ n=10$; б) $\int_0^1 \sqrt{x}\, dx,\ n=k$;

в) $\int_{-2}^1 \operatorname{sgn} x\, dx,\ n=3k$; г) $\int_{-5}^0 [x] dx,\ n=5k$.

✍**4.** *Обчислити інтегральні суми для функції* $f(x)=x^3$ *на відрізку* $[1; 3]$, *якщо* [17, *с. 124*]:

а) $x_k = 1+\frac{2k}{n},\ k=\overline{0,n},\ \xi_k = x_{k-1},\ k=\overline{1,n}$;

б) $x_k = 1+\frac{2k}{n},\ k=\overline{0,n},\ \xi_k = x_k,\ k=\overline{1,n}$;

в) $x_k = 1+\frac{2k}{n},\ k=\overline{0,n},\ \xi_k = \frac{x_{k-1}+x_k}{2},\ k=\overline{1,n}$;

г) $x_k = \left(\sqrt[n]{3}\right)^k,\ k=\overline{0,n},\ \xi_k = x_{k-1},\ k=\overline{1,n}$;

д) $x_k = \left(\sqrt[n]{3}\right)^k,\ k=\overline{0,n},\ \xi_k = x_k,\ k=\overline{1,n}$.

✍**5.** *Користуючись геометричним змістом інтегралу обчислити:*

а) $\int_1^2 \sqrt{2x-x^2}\, dx$; б) $\int_0^2 \sqrt{4x-x^2}\, dx$;

в) $\int\limits_{-1}^{5}\sqrt{5+4x-x^2}\,dx$; г) $\int\limits_{-1}^{2}\left||x|-1\right|dx$;

д) $\int\limits_{0,5}^{1}\arcsin x\,dx$.

🕮 Практичне заняття №9.

Тема: Основні властивості визначеного інтеграла.

✍**1.** *Довести, що кожний з інтегралів дорівнює нулю* [17*, с. 137*]*:*

а) $\int\limits_{-3}^{3}x\sqrt{9-x^2}\,dx$; б) $\int\limits_{-10}^{10}\lg\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)dx$;

в) $\int\limits_{-2}^{2}\left(|x-1|+|x+1|-2|x|\right)dx$; г) $\int\limits_{0}^{1}\left(2\arcsin x-\arccos\left(1-2x^2\right)\right)dx$;

д) $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\left(\sin^4 x-\frac{1}{8}\cos 4x+\frac{1}{2}\cos 2x-\frac{3}{8}\right)dx$;

е) $\int\limits_{0}^{1}\left(\frac{1}{2}\arccos x-\arccos\sqrt{\frac{1+x}{2}}\right)dx$;

є) $\int\limits_{-\pi}^{\pi}e^{x^2}\sin x\,dx$; ж) $\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\cos x^2+x^2\right)\sin x\,dx$.

✍**2.** *Порівняти інтеграли* [15*, с. 227*]*;* [10*, с.76*]*:*

а) $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{x}dx$ і $\int\limits_{0}^{\pi}\frac{\sin x}{x}dx$; б) $\int\limits_{-2}^{0}x^3 2^x\,dx$ і $\int\limits_{0}^{2}x^3 2^x\,dx$;

в) $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin^{10}x\,dx$ і $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\cos^7 x\,dx$; г) $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin^5 x\,dx$ і $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 x\,dx$;

д) $\int\limits_{1}^{2}\frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$ і $\int\limits_{1}^{2}\frac{dx}{x}$; е) $\int\limits_{0}^{1}\sqrt{1+x^2}\,dx$ і $\int\limits_{0}^{1}x\,dx$.

✍**3.** *Оцінити інтеграли* [15*, с. 228*]*;*[2]*:*

а) $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1+\frac{1}{2}\sin^2 x}\,dx$; б) $\int\limits_{0}^{1}\frac{dx}{\sqrt{2+x-x^2}}$;

в) $\int\limits_0^1 \frac{x^9\,dx}{\sqrt{1+x}}$; г) $\int\limits_{100}^{200} \frac{x^3\,dx}{x^4+x+1}$;

д) $\int\limits_0^1 \frac{1+x^{20}}{1+x^{40}}\,dx$; е) $\int\limits_0^2 e^{x^2-x}\,dx$;

є) $\int\limits_{-1}^2 \frac{2^x\,dx}{\left(x^2+1\right)\left(x+2\right)}$; ж) $\int\limits_{10}^{100} \frac{\cos x^2}{x^{20}+1}\,dx$.

✍**4.** *Довести нерівності* [10, *с. 76*]*;* [17, *с.142*]*:*

а) $0{,}5 \le \int\limits_0^{0{,}5} \frac{dx}{\sqrt{1-x^{2n}}} \le \frac{\pi}{6};\ n \in N$; б) $0 < \int\limits_0^{\pi} \frac{\sin x\,dx}{\sqrt[5]{x^2+2}} \le \frac{\pi}{\sqrt[5]{2}}$;

в) $\frac{1}{\sqrt{3}} < \int\limits_{-1}^1 \frac{\cos x\,dx}{2+x^2} \le 1$; г) $10^{-6} < \int\limits_{-2}^2 2^{x^2-5x+4}\,dx \le 10^{-3}$;

д) $\frac{1}{100} < \int\limits_0^3 \left(\frac{1}{3}\right)^{\left|x^2-2|x|-3\right|} dx \le 3$; е) $0 < \int\limits_0^1 \sin\left(arctgx\right)dx \le \frac{\sqrt{2}}{2}$.

✍**5.** *Довести, що якщо функція* $f(x)$ *на відрізку* $\left[a;b\right]$ *строго опукла і зростає, то*

$$\left(b-a\right)\cdot\frac{f(a)-f(b)}{2} < \int\limits_a^b f(x)\,dx < \left(b-a\right)f(x).$$

Запишіть відповідну нерівність, якщо функція $f(x)$ *на* $\left[a;b\right]$ *строго вгнута.*

✍**6*.** *Знайти границю:*

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_0^1 \frac{x^n}{1+x}\,dx$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\,dx$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_n^{n+p} \frac{\sin x}{x}\,dx,\ \ p>0$; г) $\lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_0^1 e^{-nx}x^p\,dx,\ \ p>0$.

🕮 Практичне заняття №10.

Тема: Інтеграл зі змінною верхньою межею.
Формула Ньютона-Лейбніца.

✍**1.** *Знайти найменше і найбільше значення функції* [17, *с. 154*]*:*

а) $F(x)=\int\limits_0^x \left(t-1\right)\left(t-2\right)^2 dt,\ \left[0;\,2\right]$; б) $F(x)=\int\limits_0^{e^x} \frac{t^4-16}{t+1}\,dt,\ \left[0;\,\ln 3\right]$;

в) $F(x)=\int\limits_1^{x^2} t(\ln t-1)\,dt,\ \ [1;\,2];$ г) $F(x)=\int\limits_0^{\frac{x-1}{x+1}} t\,dt,\ \ [0;\,4].$

✍**2.** *Довести тотожності* [17, *с. 154*]:

а) $\int\limits_x^1 \frac{dt}{1+t^2}-\int\limits_1^{\frac{1}{x}} \frac{dt}{1+t^2}=0,\quad x>0;$

б) $\int\limits_0^{\sin^2 x} \arcsin\sqrt{t}\,dt+\int\limits_0^{\cos^2 x} \arccos\sqrt{t}\,dt=\frac{\pi}{4};$

в) $\int\limits_0^x \sin t\,dt+\int\limits_0^{\sin x} \arcsin t\,dt-x\sin x=0,\ \ [-1;\,1].$

✍**3.** *Обчислити інтеграли, користуючись формулою Ньютона-Лейбніца:*

а) $\int\limits_1^2 \left(x^2-2x+3\right)dx;$ б) $\int\limits_0^1 \left(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x^2}\right)dx;$

в) $\int\limits_0^1 \frac{x^2+3x}{(x+1)\left(x^2+1\right)}dx;$ г) $\int\limits_0^1 \frac{x^5}{x^{12}+1}dx;$

д) $\int\limits_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{x^7-2x^5+3x^3-x+1}{\cos^2 x}dx;$ е $\int\limits_1^2 |4x-1|\,dx;$

є) $\int\limits_1^4 \left(2\sqrt{x}-x\right)^2 dx;$ ж) $\int\limits_1^2 \frac{e^x-x^3}{x^3e^x}dx;$

з) $\int\limits_1^2 \frac{x^4+x^2-2}{x^2}dx;$ и) $\int\limits_{-2}^{-1} \frac{x^4-x^2+5}{x^2}dx.$

✍**4.** *Обчислити інтеграли, користуючись формулою інтегрування частинами:*

а) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} arctgx\,dx;$ б) $\int\limits_1^2 x^3\ln x\,dx;$

в) $\int\limits_0^1 \ln(1+x)\,dx;$ г) $\int\limits_0^1 e^x\cos x\,dx;$

д) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1+tgx)\,dx;$ е) $\int\limits_0^{\frac{1}{2}} \frac{x\arcsin x}{\left(1-x^2\right)^2}\,dx.$

✍**5.** *Обчислити інтеграли, користуючись правилом заміни змінної* [2, *с. 260*]*:*

а) $\int\limits_3^8 \frac{x\,dx}{\sqrt{1+x}};$ б) $\int\limits_1^2 \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}};$

в) $\int\limits_0^1 \frac{\sqrt{e^x}\,dx}{\sqrt{e^x+e^{-x}}};$ г) $\int\limits_3^{29} \frac{\sqrt[3]{(x-2)^2}\,dx}{3+\sqrt[3]{(x-2)^2}};$

д) $\int\limits_3^6 \frac{\sqrt{x^2-9}\,dx}{x^4};$ е) $\int\limits_0^a \frac{dx}{x+\sqrt{a^2-x^2}};$

є) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{2+\cos x};$ ж) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x\,dx}{6-5\sin x+\sin^2 x};$

з) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\left(1+tgx\right)dx;$ и) $\int\limits_0^3 \arcsin\sqrt{\frac{x}{x+1}}\,dx.$

✍**6.** *Пояснити, чому формальна заміна змінної приводить до неправильного результату:*

а) $\int\limits_{-1}^1 dx,\ \ t=x^{\frac{2}{3}};$ б) $\int\limits_{-1}^1 \frac{dx}{1+x^2},\ \ x=\frac{1}{t};$ в) $\int\limits_0^{2\pi} \frac{dx}{5-3\cos x},\ \ tg\frac{x}{2}=t.$

✍**7*.** *Довести, що якщо функція* $f(x)$ *неперервна на відрізку інтегрування, то* [18, *с. 542*]*:*

а) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)dx = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)dx;$

б) $\int\limits_0^{\pi} xf(\sin x)dx = \frac{\pi}{2}\int\limits_0^{\pi} f(\sin x)dx = \pi\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)dx;$

в) $\int\limits_0^1 f(x)dx = \int\limits_0^1 f(1-x)dx = \int\limits_0^1 f(1+x)dx;$

г) $\int\limits_0^1 x^3 f(x^2)dx = \frac{1}{2}\int\limits_0^1 x\, f(x)dx;$ д) $\int\limits_{-1}^1 \cos x\, f(x^2)dx = 2\int\limits_0^1 \cos x\, f(x^2)dx;$

е) $\int\limits_{-1}^1 \sin x\, f(\cos x)dx = 0.$

🕮 Практичне заняття №11.

Тема: Наближені методи обчислення визначених інтегралів. Застосування визначених інтегралів до обчислення площ плоских фігур і довжин плоских кривих.

✍**1.** *Обчислити наближено за формулою прямокутників з кроком* h *інтеграли та оцінити похибку* [10, *с. 199*]*:*

а) $\int\limits_0^2 x^4 dx,\ \ h = 0,2;$ б) $\int\limits_0^{\pi} \sin x\, dx,\ \ h = \frac{\pi}{6};$

в) $\int\limits_1^5 \frac{dx}{x},\ \ h = 0,4;$ г) $\int\limits_1^5 \frac{dx}{1+x^4},\ \ h = 0,5;$

д) $\int\limits_0^2 e^{x^2} dx,\ \ h = 0,2;$ е) $\int\limits_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x} dx,\ \ h = 0,2.$

✍**2.** *Обчислити наближено за формулою трапецій з кроком* h *інтеграли та оцінити похибку* [10, *с. 200*]*:*

а) $\int\limits_2^9 \frac{dx}{x-1},\ \ h = 1;$ б) $\int\limits_2^7 \frac{dx}{\sqrt{x+2}},\ \ h = 1;$

в) $\int\limits_0^2 \sqrt{1+x^4}\, dx,\ \ h = \frac{1}{8};$ г) $\int\limits_0^1 \frac{dx}{1+x^3},\ \ h = 0,1;$

д) $\int\limits_2^5 \ln^2 x\, dx,\ \ h = 0,5;$ е) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-0,25\sin^2 x}\, dx,\ \ h = \frac{\pi}{12}.$

✍**3.** *Обчислити наближено за формулою Сімпсона з кроком* h *інтеграли та оцінити похибку* [10, *с. 200*]*:*

а) $\int\limits_1^3 \sqrt{\frac{x+1}{x}}\, dx,\ \ h = 0,5;$ б) $\int\limits_0^1 \sqrt{1-x^3}\, dx,\ \ h = 0,1;$

в) $\int\limits_0^2 e^{-x^2} dx,\ \ h = 0,5;$ г) $\int\limits_0^2 e^{x^2} dx,\ \ h = 0,2.$

✍**4.** *Знайти площу фігури, обмеженої графіками функцій:*

а) $y = x^3,\ x = 1,\ x = 3$;

б) $y = x^2 + 4x,\ y = x + 4$;

в) $y = x^2,\ y = \frac{1}{2}x^2,\ y = 3x$;

г) $y = x^2 + 1,\ y = \frac{1}{2}x^2 + 1,\ x = 1,\ x = 2$;

д) $y = -x^2 - 4x, y = 1, x = -3, x = -1$;

е) $xy = 4,\ x + y - 5 = 0$;

є) $y = 4(x-2),\ \ y = (x-1)^2,\ y = 0$;

ж) $y = -x^2 + 2,\ \ y = x + 2$;

з) $y = 7x - 2x^2,\ \ y = \frac{7}{2} - x$;

и) $y = x^2 - 2x + 3,\ \ y = 4 - 2x$;

і) $y = x^2 - 4x + 5,\ \ y = x + 1$;

ї) $y = \sin x,\ y = x^2 - \pi x$;

к) $y = \ln(1+x),\ \ y = -xe^{-x},\ \ x = 1$;

л) $y = 6x^2 - 5x + 1,\ \ y = \cos \pi x,\ \ 0 \le x \le \frac{1}{2}$;

м) $y = \frac{6}{x+5},\ \ y = |x|,\ \ x \ge -2$;

н) $y = \sin 2x,\ \ y = \sin x,\ \ \frac{\pi}{3} \le x \le \pi$;

о) $y = \frac{x^2}{2},\ \ y = \frac{1}{1+x^2}$;

п) $y = \operatorname{arctg}\sqrt{x},\ \ y + x^2 = 0,\ \ x = 1$.

✍**5.** *Знайти площу фігури, обмеженої графіком функції:*

а) $y = 2x^2 - 8x$, дотичною до цього графіка в точці $(2; -8)$ і віссю ординат;

б) $y = x^2 - 2x + 2$, дотичною до цього графіка в точці $(0;\ 2)$ і прямою $x = 1$;

в) $y = e^{3x}$, дотичною до цього графіка в точці $(0; 1)$ і прямою $x = 3$;

г) $y = \arcsin x$ і прямими $y = 0,\ \ x = 0,\ \ x = \frac{1}{2}$;

д) $y = x^2 + 4x + 9$ і дотичними до цього графіка у точках з абсцисами $x_1 = -3,\ x_2 = 0$;

е) $y = 4x - x^2 + 1$ і дотичними до цього графіка у точках з абсцисами $x_1 = 0,\ x_2 = 3$.

✍**6.** *Обчислити площу фігури, заданої параметрично:*

а) $x = at - t^2,\ y = at^2 - t^3,\ a > 0$;

б) $x = t^2 - a^2,\ y = t^3 - a^2 t,\ a > 0$;

в) $x = \frac{c^2}{a}\cos^3 t,\ \ y = \frac{c^2}{b}\sin^3 t,\ \ c^2 = a^2 - b^2$ (еволюта еліпса);

г) $x = a\dfrac{1-t^2}{\left(1+t^2\right)^2}$, $y = \dfrac{2at}{\left(1+t^2\right)^2}$ (равлик);

д) $x = \dfrac{t\left(1-t^2\right)}{1+3t^2}$, $y = \dfrac{4t^2}{1+3t^2}$;

е) $x = r(n\cos t - \cos nt)$, $y = r(n\sin t - \sin nt)$, $n-1 \in N$ (епіциклоїда);

є) $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1-\cos t)$, $0 \le t \le 2\pi$ (циклоїда);

ж) $x = a\sin t$, $y = b\sin 2t$;

з) $x = a\sin t\cos^2 t$, $y = a\sin^2 t\cos t$, $0 \le t \le \dfrac{\pi}{2}$;

и) $x = \left(R+r\right)\cos t - r\cos\dfrac{R+r}{r}t$,

$y = \left(R+r\right)\cos t - r\cos\dfrac{R+r}{r}t$, $R = nr$, $n \in \mathbb{N}$;

✍**7.** *Обчислити площу фігури, заданої в полярних координатах:*

а) $\rho = a(1+\cos\varphi)$ (кардіоїда);

б) $\rho^2 = a^2\cos 2\varphi$ (лемніската Бернуллі);

в) $\rho = a\cos 3\varphi$, $\rho = \dfrac{a}{2}$;

г) $\rho = a\varphi$ (один виток архімедової спіралі);

д) $\rho = 2\sqrt{3}\cos\varphi$, $\rho = 2a\sin\varphi$;

е) $\rho = a\cos\varphi$, $\rho = a\cos\varphi + a\sin\varphi$.

✍**8.** *Обчислити площу фігури, перейшовши до полярних координат:*

а) $\left(x^2+y^2\right)^2 = 2a^2xy$; б) $\left(x^2+y^2\right)^3 = a^2x^4$;

в) $\left(x^2+y^2-ax\right)^2 = a^2\left(x^2+y^2\right)$; г) $x^4+y^4 = x^2+y^2$.

✍**9.** *Знайти довжину кривої* [10, *с. 120*]*:*

а) $y = 2x^{\frac{3}{2}}$, $0 \le x \le 2\sqrt{3}$; б) $y = \dfrac{4}{5}x^{\frac{5}{4}}$, $0 \le x \le 9$;

в) $y = x^2 - 2x + 2$, $-1 \le x \le 1$; г) $y = \ln\dfrac{e^x+1}{e^x-1}$, $1 \le x \le 2$;

д) $y = \ln(\cos x)$, $0 \le x < \dfrac{\pi}{3}$;

е) $y = \sqrt{x-x^2} + \arcsin x$, $-1 \le x \le 1$;

є) $y = x\sqrt{\frac{x}{1-x}},\ \ 0 \le x \le \frac{5}{6};$

ж) $y = 2a\ln\frac{\sqrt{a}+\sqrt{x}}{\sqrt{a}-\sqrt{x}} - 4\sqrt{ax},\ \ 0 \le x \le x_0 < a;$

з) $y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right),\ x = 0,\ x = a.$

✍**10.** *Обчислити довжину дуги кривої, заданої параметрично:*

а) $x = a(\cos t + t\sin t),\ \ y = a(\sin t - t\cos t),\ \ t \in [0;\ 2\pi];$

б) $x = t - \sin t,\ \ y = 1 - \cos t,\ \ t \in [0;\ 2\pi];$

в) $x = a(sht - t),\ \ y = a(cht - 1),\ \ t \in [0;1];$

г) $x = a\cos^3 t,\ \ y = b\sin^3 t,\ \ t \in \left[0;\ \frac{\pi}{2}\right];$

д) $x = \cos^4 t,\ \ y = \sin^4 t;$

е) $x = \cos^3 t,\ \ y = \sin^3 t;$

є) $x = t^2,\ \ y = t\left(\frac{1}{3} - t^2\right);$

ж) $x = 2t^3\left(1 - t^2\right),\ \ y = \sqrt{15}t^4.$

✍**11.** *Обчислити довжину дуги кривої, заданої в полярних координатах:*

а) $\rho = \varphi,\ \ 0 \le \varphi \le 2\pi;$

б) $\rho = 1 + \cos\varphi,\ \ 0 \le \varphi \le 2\pi;$

в) $\rho = a\sin^3\frac{\varphi}{3};$

г) $\rho = \frac{a}{1+\cos\varphi},\ \ -\frac{\pi}{2} \le \varphi \le \frac{\pi}{2}.$

🕮 Практичне заняття №12.

Тема: Застосування визначених інтегралів до обчислення об'ємів тіл і площ поверхонь обертання. Рекурентні співвідношення.

✍**1.** *Знайти об'єм тіла, утвореного обертанням фігури, обмеженої кривими, навколо осі* l*:*

а) $y = 2x - x^2,\ \ y \ge 0,\ \ l : Ox;\ \ l : Oy;$

б) $y = x^2 + 1,\ x = 0,\ x = 1, y = 0;$

в) $y = 2x,\ y = x + 3,\ x = 0,\ x = -1;$

г) $y = b\left(\frac{x}{a}\right)^2,\ \ y = b\left|\frac{x}{a}\right|,\ \ l : Ox;\ \ l : Oy;$

д) $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1,\ \ l:Ox;\ \ l:Oy;$

е) $y=\arcsin x,\ \ y=0,\ \ x=1,\ \ l:Ox;\ \ l:Oy;$

є) $x^2+(y-b)^2=a^2,\ \ l:Ox;$

ж) $y=\dfrac{a^2}{a^2+x^2},\ \ y=0,\ \ x=0,\ \ x=a,\ \ l:Ox;\ \ l:Oy;$

з) $y=2^x+6,\ \ y=2^{2x},\ \ x=0,\ \ l:Ox;\ \ l:Oy;$

и) $y=e^{2x}\sin \pi x,\ \ n-1\le x\le n,\ \ y=0,\ \ n\in N,\ \ l:Ox.$

✍**2.** *Знайти об'єм тіла, утвореного обертанням фігури, обмеженої кривими, навколо осі* l*:*

а) $x=a(t-\sin t),\ \ y=a(1-\cos t)$, (циклоїда), $l:Ox;\ \ l:Oy;$

б) $x=a\sin t,\ \ y=b\sin 2t,\ \ l:Ox;$

в) $x=2t-t^2,\ \ y=4t-t^3,\ \ l:Ox.$

✍**3.** *Знайти об'єм тіла, утвореного обертанням фігури, обмеженої кривими, навколо осі* l*:*

а) $\rho=\sqrt[3]{\cos 3\varphi},\ \ \varphi\in\left[\dfrac{\pi}{2};\dfrac{5\pi}{6}\right],\ \ l:Oy;$

б) $\rho=2a\dfrac{\sin^2\varphi}{\cos\varphi},\ \ \varphi\in\left[0;\dfrac{\pi}{3}\right],\ \ l:Ox;$

в) $\rho=a(1-\cos\varphi),\ \ l:Ox,\ \ l:Oy;$

г) $\rho=\dfrac{a}{\cos\varphi\cos 2\varphi},\ \ \varphi\in\left[0;\dfrac{\pi}{6}\right],\ \ l:Ox.$

✍**4.** *Знайти об'єм тіла, обмеженого поверхнями [10, с. 140]:*

а) $x^2+y^2=R^2,\ \ y=0,\ \ z=0,\ \ \dfrac{x}{R}+\dfrac{z}{H}-1=0,\ \ \dfrac{x}{R}-\dfrac{z}{H}+1=0;$

б) $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=\dfrac{\left(z-H\right)^2}{H^2},\ \ z=0;$

в) $2\dfrac{z}{c}=\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2},\ \ z=H;$

г) $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1,\ \ \dfrac{y}{b}-\dfrac{z}{c}=0,\ \ \dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=0,\ \ z\ge 0.$

✍**5.** *Обчислити об'єм тіла, що відтинається від прямого кругового циліндра площиною, яка проходить через діаметр основи. [12, с. 115]*

✍**6.** *На всіх хордах круга радіуса R, які паралельні деякому напрямку, побудовані симетричні параболічні сегменти сталої висоти h. Площини сегментів перпендикулярні до площини круга. Знайти об'єм утвореного тіла.*

✍**7.** *1) Обчислити об'єм кульового сегмента, якщо його висота h, а радіус кулі R.*
2) Обчислити об'єм кульового шару, що відтинається від кулі радіуса R двома паралельними площинами, які знаходяться по одну сторону від центра на відстанях a і b від нього ($a < b$).

✍**8.** *Обчислити площу поверхні, утворену при обертанні навколо осі l кривої [17, с. 231]:*

а) $y = \frac{1}{4}x^3,\ [0; 2],\ l: Ox;$ б) $y = \cos\frac{\pi x}{2a},\ [-a; a],\ l: Ox;$

в) $x^2 + (y-b)^2 = r^2,\ r < b,\ l: Ox;$

г) $y = x^2,\ [0; 1],\ l: y = x;$

д) $y = \arcsin\sqrt{x} + \sqrt{x - x^2},\ [0; 1],\ l: Oy;$

е) $x = \sqrt{2}\sin t,\ \ y = \frac{1}{4}\sin 2t,\ 0 \le t \le \pi,\ l: Oy;$

є) $x = a\cos^3 t,\ \ y = a\sin^3 t,\ l: Ox;$

ж) $x = t^2,\ \ y = \frac{t^3}{3} - t,\ |t| \le \sqrt{6},\ l: x = 3;$ з) $\rho = 2a\sin\varphi,\ l: Ox;$

и) $\rho^2 = a^2\cos 2\varphi,\ l: Ox;$ і) $\rho = 4\sin\varphi,\ l: Ox.$

✍**9.** *За допомогою визначених інтегралів знайти границі числових послідовностей [2, с. 270]:*

а) $S_n = \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \ldots + \frac{2n-1}{n^2};$

б) $S_n = \frac{1}{n}\left(\sin\frac{\pi}{n} + \sin\frac{2\pi}{n} + \ldots + \sin\frac{n-1}{n}\pi\right);$

в) $S_n = \frac{\sqrt{n!}}{n};$

г) $S_n = \frac{1 + \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{3} + \ldots + \sqrt[3]{n}}{\sqrt[3]{n^4}};$

д) $S_n = \frac{1}{\sqrt{4n^2 - 1^2}} + \frac{1}{\sqrt{4n^2 - 2^2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{4n^2 - n^2}};$

е) $S_n = n\left(\frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \ldots + \frac{1}{(2n)^2}\right)$;

є) $S_n = \frac{1}{\sqrt{n}}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$;

ж) $S_n = \frac{1}{n}\left(1 + \frac{1}{\cos^2 \frac{\pi}{4n}} + \ldots + \frac{1}{\cos^2 \frac{\pi n}{4n}}\right)$.

✍**10.** *Довести рівність:*

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n}\right) = \ln 2$, *використовуючи інтеграл* $\int_1^2 \frac{dx}{x}$;

б) $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\frac{1}{n^2+1^2} + \frac{1}{n^2+2^2} + \ldots + \frac{1}{2n^2}\right) = \frac{\pi}{4}$, *використовуючи інтеграл* $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$.

🕮Практичне заняття №13
Тема: Фізичні застосування визначеного інтегралу.

Для обчислення деякої величини Q на відрізку $[a;b]$ за допомогою визначеного інтеграла керуються такою **загальною схемою (I)**:

1. Провести T-розбиття відрізка $[a;b]$ точками x_k, $k = \overline{0,n}$.
2. Для кожного відрізка $[x_k, x_{k+1}]$, $k = \overline{0,n-1}$ знайти частину ΔQ_k величини Q.
3. Подати наближене значення кожної величини ΔQ_k у вигляді добутку $\Delta Q_k \approx f(c_k)\Delta x_k$, де $\Delta x_k = x_{k+1} - x_k$, f - задана функція, $c_k \in [x_k, x_{k+1}]$, $k = \overline{0,n-1}$, і потім наближене значення Q у вигляді інтегральної суми $Q \approx \sum\limits_{k=0}^{n-1} f(c_k)\Delta x_k$ (1).
4. Якщо з умови задачі випливає, що при $\lambda(T) = \max\limits_{0\le k\le n-1} \Delta x_k \to 0\ (n\to\infty)$ похибка наближеної рівності (1) прямує

до нуля, то шукана величина Q буде чисельно дорівнювати $Q=\lim\limits_{\lambda(T)\to 0}\sum\limits_{k=0}^{n-1} f\left(c_k\right)\Delta x_k=\int\limits_a^b f(x)dx$.

Тут для знаходження наближеного значення малого елемента ΔQ_k використовують різні припущення. Наприклад,

Маємо:	Замінюємо:
Малі ділянки кривої лінії	Відрізками
Змінну силу на невеликих ділянках	сталою силою (за величиною і напрямом) протягом малого проміжку часу, яку тіло мало в початковій або кінцевій точці проміжку
Змінну швидкість на невеликих ділянках	сталою швидкістю (за величиною і напрямом) протягом малого проміжку часу, яку тіло мало в початковій або кінцевій точці проміжку
Змінну температуру тіла, що нагрівається чи охолоджується, протягом малого проміжку часу	сталою температурою протягом малого проміжку часу, яке тіло мало на початку або в кінці цього проміжку

Багато величин можна виразити через визначений інтеграл, користуючись іншою **схемою (II):**

1. Нехай деяка частина шуканої величини Q є невідома функція $f(x)$, де x- один з параметрів величини Q, який змінюється на відрізку $[a;b]$, що відомий з умови задачі.
2. Знайдемо диференціал df функції $f(x)$, тобто наближену величину (головну частину) її приросту Δf у вигляді добутку $df=f(x)dx$. При цьому тут також використовуються різні припущення, які, в цілому, зводяться до того, що при зміні аргументу x на малу величину dx зміна функції $f(x)$ вважається пропорційною dx.
3. Упевнившись, що диференціал df знайдено правильно, тобто, що при $dx\to 0$ нескінченно малі Δf і df будуть еквівалентні, знайдемо шукану величину Q, про інтегрувавши df в межах від $x=a$ до $x=b$:

$$Q = \int_a^b f(x)dx.$$

У процесі розв’язуванні фізичних задач потрібно навчитися добре відомі співвідношення виражати і формулювати мовою математичного аналізу, а потім вже розв’язувати ці задачі і одержувати нові результати. Найбільш складне в цьому процесі – саме **математичне** формулювання задачі у вигляді алгебраїчного рівняння, або інтеграла, або так званого диференціального рівняння (в якому шукана функція входить під знаком похідної), а не математичні викладки, які пізніше використовуватимуться в задачі. Саме на це потрібно звернути найбільшу увагу.

Розв’язування фізичних задач

I. Обчислення моментів і координат центра мас ([10]: с. 165, [2]: с. 303, [16]: с. 161).

✍**1.** *Знайти статичні моменти* M_x *та* M_y *однорідної кривої:*

а) $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1,\ x\ge 0,\ y\ge 0$;

б) $y^2=2x,\ 0\le x\le 2$;

в) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,\ y\ge 0,\ a>b$;

г) $x=a\sin^3 t,\ y=b\cos^3 t,\ 0\le t\le \frac{\pi}{2}$;

д) $x=a(t-\sin t),\ y=a(1-\cos t),\ 0\le t\le 2\pi$;

е) $\rho=2a\cos\varphi,\ 0\le\varphi\le\frac{\pi}{2}$;

є) $\rho=ae^{\varphi},\ 0\le\varphi\le 2\pi$.

✍**2.** *Знайти координати центра мас однорідної кривої:*

а) $x=R\cos\varphi,\ y=R\sin\varphi,\ |\varphi|\le\alpha\le\pi$;

б) $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}},\ x\ge 0,\ y\ge 0$;

в) $y=ach\left(\frac{x}{a}\right),\ |x|\le b$;

г) $x=\frac{1}{4}y^2-\frac{1}{2}\ln y,\ 1\le y\le 2$;

д) $x=a(t-\sin t),\ y=a(1-\cos t),\ 0\le t\le 2\pi$;

е) $\rho=a(1+\cos\varphi),\ 0\le\varphi\le\pi$;

є) $\rho = ae^{\varphi}, \ \frac{\pi}{2} \le \varphi \le 2\pi$;

ж) $y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right), \ x \in [-a; a]$.

✍**3.** *Знайти статичні моменти* M_x *та* M_y *однорідної фігури, обмеженої кривими:*

а) $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1, \ x = 0, \ y = 0, \ a > 0, \ b > 0$;

б) $y = \cos x, \ |x| \le \frac{\pi}{2}, \ y = 0$;

в) $y = x^2, \ y = \sqrt{x}$;

г) $x = \frac{2}{1+x^2}, \ y = x^2, \ x = 0, \ x \ge 0$;

д) $x = a(t - \sin t), \ y = a(1 - \cos t), \ 0 \le t \le 2\pi$;

е) $\rho = a(1 + \cos\varphi), \ |\varphi| \le \pi$;

є) $\rho = a\varphi, \ 0 \le \varphi \le \pi$.

✍**4.** *Однорідна пластина складена з прямокутника зі сторонами* $2b$ *і* h *і півкруга з діаметром* $2b$, *який стикується з стороною прямокутника такої ж довжини. Знайти центр мас пластини.*

✍**5.** *Знайти координати центра мас однорідної фігури, обмеженої кривими:*

а) $y = h\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right), y = 0, \ h > 0, \ a > 0$;

б) $y^2 = \frac{x^3}{a}, \ x = a, \ y = 0, \ a > 0, \ y \ge 0$;

в) $y = a \cdot ch\left(\frac{x}{a}\right), \ y = 0, \ |x| = b, \ a > 0$;

г) $y = \frac{2}{\pi}x, \ y = \sin x, \ y = 0$;

д) $x = a(t - \sin t), \ y = a(1 - \cos t), \ 0 \le t \le 2\pi$;

е) $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}, \ x \ge 0, \ y \ge 0$;

є) $x^2 + y^2 = a^2, \ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \ y \ge 0, \ x \ge 0$;

ж) $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}, \ x = 0, \ y = 0$;

з) $\rho = a\cos^3\varphi, \ a > 0$.

✍**6.** *Користуючись теоремами Гульдена, знайти площу поверхні, утвореної обертанням фігури, обмеженої першою аркою циклоїди і віссю абсцис, навколо дотичної до вершини циклоїди.*

✍**7.** *Користуючись теоремами Гульдена, знайти об'єм і бічну поверхню прямого конуса з висотою* H *і радіусом основи* r.

✍**8.** *Правильний шестикутник з стороною* a *обертається навколо однієї з сторін. Знайти об'єм утвореного тіла.*

✍**9.** *Знайти площу поверхні і об'єм тіла, утвореного обертанням правильного трикутника з стороною* a *навколо осі, яка знаходиться від його центра на відстані* $d > \dfrac{a}{\sqrt{3}}$.

✍**10.** *Квадрат з стороною* a *обертається навколо прямої, яка проходить через його вершину і складає кут* φ *з діагоналлю квадрата,* $\dfrac{\pi}{4} \le \varphi \le \dfrac{\pi}{2}$. *Знайти площу поверхні і об'єм утвореного тіла.*

II. Обчислення роботи змінної сили

✍**11.** ([10]: с. 165, [2]: с. 303, [16]: с. 161).
Обчислити роботу, яку потрібно затратити, щоб розтягнути пружину на 10 см, якщо відомо, що для подовження її на 1 см необхідно прикласти силу в 1 кН.

✍**12.** *Котел, що має форму еліптичного параболоїда* $z = \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9}$ *висотою* $H = 4$*м, заповнений рідиною густиною* $\rho = 0{,}8$*т/м*^{3}. *Обчислити роботу, яку потрібно затратити на перекачування рідини через край котла.*

✍**13.** *Обчислити роботу, яку потрібно виконати, щоб викачати воду із наповненого доверху котла, який має форму параболоїда обертання (з вершиною донизу). Глибина котла 2 м, радіус основи 1 м. Густина води* 10^3 *кг/м*^{3}*, прискорення відбного падіння 9,81 м/с*^{2}.

✍**14.** *Обчислити роботу, яка здійснюється при стисканні пружини на 20 см, якщо відомо (закон Гука), що сила пропорційна стиску пружини і що для стиску на 1 см необхідна сила в 2 кГ.*

✍**15.** *Обчислити роботу, яка потрібна для того, щоб викачати воду із напівсферичної посудини (котла) радіуса* R *м.*

III. Обчислення сили тиску рідини на пластинку

✍**16.** ([10]: с. 165, [2]: с. 303, [16]: с. 161). *Трикутна пластинка з основою* $a = 3$*м і висотою* $H = 2$*м занурена вертикально вершиною вниз в рідину так, що основа паралельна поверхні рідини і* *знаходиться на відстані* $d = 1$ *м від поверхні. Густина рідини* $\rho = 0{,}9\,т/м^3$ *Обчислити силу тиску рідини на кожну з сторін пластинки.*

✍**17.** [10, с.178] *В рідину густини* ρ *занурена вертикально прямокутна пластина зсторонами* a *і* b *так, що сторона* a, *яка ближча до поверхні, знаходиться на глибині* h *Знайти силу тиску на пластину.*

✍**18.** [10, с.178] *В рідину густини* ρ *занурена вертикально пластина, яка має форму трапеції з основами* a *і* b, $a > b$ *і висотою* h. *Більша основа трапеції знаходиться на поверхні рідини. Знайти: 1) силу тиску на пластину; 2) глибину точки прикладання рівнодійної тиску..*

✍**19.** [10, с.178] *Пластина, яка має форму еліпса з півосями* a *і* b, $a > b$, *занурена в рідину густини* ρ *так, що мала вісь еліпса знаходиться на поверхні рідини. Знайти силу тиску на занурену частину пластини.*

IV. Розв'язування задач з використанням наближених методів обчислення визначеного інтеграла

✍**20.** *Обчислити силу тиску води на вертикальну площадку, що має форму прямокутника з основою 4 м і висотою 2 м (основа прямокутника міститься на поверхні води).*

✍**21.** *Ширина річки 33 м. Вимірювання її глибини (в метрах) в поперечному перетині через кожні 3 м задані таблицею:*

x	0	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30	33
h	0,7	1,1	1,3	1,6	1,8	1,7	1,6	1,4	1,3	1,1	0,9	0,6

Знаючи середню швидкість течії річки $(v = 1{,}6\,м/с)$, *визначити за формулою прямокутників (трапецій) секундну витрату води* Q. *Зробити малюнок.*

✍**22.** *Обчислити силу тиску води на вертикальну площадку, що має форму трикутника з основою 2 м і висотою 3 м. Вершина трикутника міститься на поверхні води, а основа паралельна поверхні води.*

✍**23.** *Для обчислення площі ділянки землі, яка прилягає до огорожі довжиною 100 м, виміряні відстані від огорожі до кінця ділянки через кожні 10 м. Результати вимірювання (в метрах) виявились такими:*

3,28	4,04	4,66	5,26	4,98	2,66	3,82	4,68	5,28	3,82	3,24

Знайти площу ділянки, користуючись формулами прямокутників і трапецій. Зробити малюнок.

✍**24.** *Обчислити силу тиску води на вертикальну площадку, що має форму півкруга з діаметром 4 м (півкруг дотикається поверхні води по діаметру).*

✍**25.** *Ширина річки 22 м. Вимірювання її глибини (в метрах) в поперечному перетині через кожні 2 м задані таблицею:*

x	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22
h	1,5	1,8	2,0	2,2	2,1	2,5	2,4	2,2	1,9	1,4	0,9	0,5

Знаючи середню швидкість течії річки $(v = 2{,}4\, м/с)$*, визначити за формулою прямокутників (трапецій) секундну витрату води* Q*. Зробити малюнок.*

🕮 Практичне заняття №14.

Тема: Невласні інтеграли.

✍**1.** *Обчислити інтеграли на нескінченному проміжку або довести їх розбіжність:*

а) $\int\limits_1^{\infty} \frac{dx}{x+x^3}$; б) $\int\limits_1^{\infty} \frac{1}{x^2} e^{-\frac{1}{x}} dx$;

в) $\int\limits_1^{+\infty} \sin 3x\, dx$; г) $\int\limits_{-\infty}^{0} \frac{x+1}{x^2+1} dx$;

д) $\int\limits_3^{+\infty} \frac{2x+5}{x^2+3x-10} dx$; е) $\int\limits_2^{+\infty} \frac{dx}{x \ln x}$;

є) $\int\limits_0^{\infty} x^{2n-1} e^{x^2} dx$; ж) $\int\limits_0^{\infty} \frac{arctg\, x}{\left(1+x^2\right)^{\frac{3}{2}}} dx$;

з) $\int\limits_a^{\infty} e^{-ax} \sin bx\, dx, \quad a>0$; и) $\int\limits_0^{+\infty} x^n e^{-x} dx, \quad n \in \mathbb{N}$.

✍**2.** *Довести нерівності* [10, *с. 243*]*:*

а) $0 < \int\limits_{10}^{\infty} \frac{x^2 dx}{x^4+x+1} < 0{,}1$; б) $\left| \int\limits_0^{+\infty} \frac{\cos 4x\, dx}{x^2+4} \right| \le \frac{\pi}{4}$;

в) $0{,}25 < \int\limits_1^{+\infty} \frac{x^6+1}{x^{11}+1} dx < 0{,}35$; г) $0 < \int\limits_{10}^{+\infty} e^{-x^2} dx < \frac{1}{5 \cdot 2^{102}}$.

✍**3.** *Дослідити на збіжність інтеграли, використовуючи ознаки збіжності* [10, *с. 245*]*:*

а) $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{\sin^3 3x}{\sqrt[3]{x^4+1}}dx;$ б) $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{xdx}{x^3+\sin x};$

в) $\int\limits_{1}^{\infty} \frac{1+\arcsin\frac{1}{x}}{1+x\sqrt{x}}dx;$ г) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^2\left(arctg\,\frac{x^3}{1+x^2}\right)^3 dx.$

✍**4.** *Знайти, при яких значеннях параметрів α і β збіжні інтеграли* [10, *с. 249*]*:*

а) $\int\limits_{e}^{+\infty} \frac{\ln^{\alpha} x\,dx}{\left(e^{\frac{1}{x^2}}-1\right)^{\beta}};$ б) $\int\limits_{2}^{+\infty} \frac{dx}{x^{\alpha}\ln^{\beta} x};$

в) $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{x^{\alpha}dx}{x^{\beta}+1};$ г) $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{e^{\alpha x}dx}{\left(\sqrt[3]{x+1}-1\right)^{\beta}\sin^{\beta}\frac{x}{x+1}}.$

✍**5.** *Обчислити інтеграли або встановити їх розбіжність:*

а) $\int\limits_{0}^{4} \frac{dx}{x+\sqrt{x}};$ б) $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x+\cos x}{\sqrt[3]{\sin x-\cos x}}dx;$ в) $\int\limits_{0}^{1} \frac{dx}{(2-x)\sqrt{1-x}};$

г) $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{ctg\,x}\,dx;$ д) $\int\limits_{-1}^{1} x^3\ln\frac{1+x}{1-x}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}};$

е) $\int\limits_{0}^{1} x^{\alpha}\ln^{n} x\,dx,\ \ \alpha>-1,\ \ n\in\mathbb{N};$ ж) $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos x)dx.$

✍**6.** *Обчислити площі криволінійних трапецій* [10, *с. 224*]*:*

а) $y=\frac{1}{\sqrt{2-5x}},\ \ x\in[0;\,0{,}4);$ б) $y=\frac{x}{\sqrt{(x-a)(b-x)}},\ \ x\in(a;\,b);$

в) $y=\frac{1}{x\sqrt{\ln x}},\ \ x\in(1;\,e];$ г) $y=\frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}},\ \ x\in[0;\,1).$

✍**7.** *Дослідити на збіжність невласні інтеграли:*

а) $\int\limits_{0}^{\pi} \frac{\sin x}{x^2}dx;$ б) $\int\limits_{1}^{2} \frac{dx}{\ln x};$

в) $\int\limits_0^1 \frac{dx}{e^x - \cos x}$; г) $\int\limits_0^1 x^p \ln^q \frac{1}{x} dx$;

д) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{x\sqrt{x}} dx$; е) $\int\limits_1^2 \frac{dx}{x \ln^p x} dx$.

⌛ Контрольна робота №1.

✍1. Обчислити площу фігури, обмеженої кривими:

1. $y = 2 - x^2, y = x$**;**	**16.** $y = x^2, y = 3x, x = 1, x = 2$**;**
2. $y = x^2, y = 2 - x^2$**;**	**17.** $xy = 16, x + y - 7 = 0$**;**
3. $y = x^2, x + y = 2$**;**	**18.** $y = \sqrt{x}, y = x^2, x = 0, x = 1$**;**
4. $y = 2x - x^2, x + y = 2$**;**	**19.** $y = x^2, y = e^x,\ x = 0, x = 1$**;**
5. $y = 2x - x^2, y = -x$**;**	**20.** $y = \sin x,\ y = x, x = \frac{\pi}{2}$**;**
6. $y = x^2 + 4x, y = x + 4$**;**	**21.** $y^2 = 2x + 1, x - y - 1 = 0$**;**
7. $y = 6x - x^2, y = 0$**;**	**22.** $y^2 = 9x, y = 3x$**;**
8. $y = x^3, y = x^2$**;**	**23.** $y = x^3, y = 2x$**;**
9. $y = \frac{x^2 - 3x}{4}, x = 5, y = 0$**;**	**24.** $4y = x^2, y^2 = 4x$**;**
10. $y = x^2 + 2x, y = x + 2$**;**	**25.** $y^2 = 2x + 1, x - y - 1 = 0$**;**
11. $y = x^2 - 2x + 4, x = 1, y - 4 = x$**;**	**26.** $y = x^3, y = 2x$ **;**
12. $y = x^2 - 3x, y + 3x - 4 = 0$**;**	**27.** $y = x^2 - x, y^2 = 2x$**;**
13. $y = 4 - x^2, y = 0$**;**	**28.** $y^2 = 2x + 4, x = 0$**;**
14. $y = 3 - 2x - x^2, y = 0$**;**	**29.** $y = \frac{x^2}{4a}, y = b, b > 0$**;**
15. $y^2 = x^3, y = 8, x = 0$**;**	**30.** $ax = y^2, ay = x^2$**.**

✍2. Обчислити площу фігури, обмеженої лініями, заданими рівняннями в полярних координатах:

1. $r = 4\cos 3\varphi,\ \ r = 2\ \ (r \ge 2)$; **2.** $r = \cos 2\varphi$; **3.** $r = \sqrt{3}\cos\varphi,\ \ r = \sin\varphi\ (0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2})$; **4.** $r = 4\sin 3\varphi,\ \ r = 2\ \ (r \ge 2)$;	**14.** $r = \sqrt{2}\cos\left(\varphi - \frac{\pi}{4}\right)$, $r = \sqrt{2}\sin\left(\varphi - \frac{\pi}{4}\right)$

5. $r=2\cos\varphi,\ \ r=2\sqrt{3}\sin\varphi$ $(0\le\varphi\le\frac{\pi}{2})$; **6.** $r=\sin 3\varphi$; **7.** $r=6\sin 3\varphi,\ \ r=3\ \ (r\ge 3)$; **8.** $r=\cos 3\varphi$; **9.** $r=\cos\varphi,\ \ r=\sqrt{2}\cos\left(\varphi-\frac{\pi}{4}\right)$ $\left(-\frac{\pi}{4}\le\varphi\le\frac{\pi}{2}\right)$; **10.** $r=\sin\varphi,\ \ r=\sqrt{2}\cos\left(\varphi-\frac{\pi}{4}\right)$ $\left(0\le\varphi\le\frac{3\pi}{4}\right)$; **11.** $r=6\cos 3\varphi,\ \ r=3\ \ (r\ge 3)$; **12.** $r=\frac{1}{2}+\sin\varphi$; **13.** $r=\cos\varphi,\ \ r=\sin\varphi\ \ \ (0\le\varphi\le\frac{\pi}{2})$;	$\left(\frac{\pi}{4}\le\varphi\le\frac{3\pi}{4}\right)$; **15.** $r=\cos\varphi,\ \ r=2\cos\varphi$; **16.** $r=\sin\varphi,\ \ r=2\sin\varphi$; **17.** $r=1+\sqrt{2}\cos\varphi$; **18.** $r=\frac{1}{2}+\cos\varphi$; **19.** $r=1+\sqrt{2}\sin\varphi$; **20.** $r=\frac{5}{2}\sin\varphi,\ \ r=\frac{3}{2}\sin\varphi$; **21.** $r=\frac{3}{2}\cos\varphi,\ \ r=\frac{5}{2}\cos\varphi$; **22.** $r=4\cos 4\varphi$; **23.** $r=\sin 6\varphi$; **24.** $r=3\cos\varphi,\ \ r=2\cos\varphi$; **25.** $r=\cos\varphi+\sin\varphi$; **26.** $r=2\sin 4\varphi$; **27.** $r=2\cos 6\varphi$; **28.** $r=\cos\varphi-\sin\varphi$; **29.** $r=3\sin\varphi,\ \ r=5\sin\varphi$; **30.** $r=2\sin\varphi,\ \ r=4\sin\varphi$.

✍***3. Обчислити довжину дуги кривої, заданої параметричними рівняннями:***

1. $\begin{cases} x=5(t-\sin t), \\ y=5(1-\cos t), \end{cases}$ $0\le t\le\pi$; **2.** $\begin{cases} x=3(2\cos t-\cos 2t), \\ y=3(2\sin t-\sin 2t), \end{cases}$ $0\le t\le 2\pi$;	**16.** $\begin{cases} x=\left(t^2-2\right)\sin t+2t\cos t, \\ y=\left(2-t^2\right)\cos t+2t\sin t, \end{cases}$ $0\le t\le\frac{\pi}{2}$; **17.** $\begin{cases} x=8\cos^3 t, \\ y=8\sin^3 t, \end{cases}\ \ 0\le t\le\frac{\pi}{6}$;

3. $\begin{cases} x = 4(\cos t + t\sin t), \\ y = 4(\sin t - t\cos t), \end{cases}$ $0 \le t \le 2\pi;$	**18.** $\begin{cases} x = e^t(\cos t + \sin t), \\ y = e^t(\cos t - \sin t), \end{cases}$ $0 \le t \le 2\pi;$
4. $\begin{cases} x = \left(t^2 - 2\right)\sin t + 2t\cos t, \\ y = \left(2 - t^2\right)\cos t + 2t\sin t, \end{cases}$ $0 \le t \le \pi;$	**19.** $\begin{cases} x = 4(t - \sin t), \\ y = 4(1 - \cos t), \end{cases}$ $\dfrac{\pi}{2} \le t \le \dfrac{2\pi}{3};$
5. $\begin{cases} x = 10\cos^3 t, \\ y = 10\sin^3 t, \end{cases}$ $0 \le t \le \dfrac{\pi}{2};$	**20.** $\begin{cases} x = 2(2\cos t - \cos 2t), \\ y = 2(2\sin t - \sin 2t), \end{cases}$ $0 \le t \le \dfrac{\pi}{3};$
6. $\begin{cases} x = e^t\left(\cos t + \sin t\right), \\ y = e^t\left(\cos t - \sin t\right), \end{cases}$ $0 \le t \le \pi;$	**21.** $\begin{cases} x = 8(\cos t + t\sin t), \\ y = 8(\sin t - t\cos t), \end{cases}$ $0 \le t \le \dfrac{\pi}{4};$
7. $\begin{cases} x = 3(t - \sin t), \\ y = 3(1 - \cos t), \end{cases}$ $\pi \le t \le 2\pi;$	**22.** $\begin{cases} x = \left(t^2 - 2\right)\sin t + 2t\cos t, \\ y = \left(2 - t^2\right)\cos t + 2t\sin t, \end{cases}$ $0 \le t \le 2\pi;$
8. $\begin{cases} x = \dfrac{1}{2}\cos t - \dfrac{1}{4}\cos 2t, \\ y = \dfrac{1}{2}\sin t - \dfrac{1}{4}\sin 2t, \end{cases}$ $\dfrac{\pi}{2} \le t \le \dfrac{2\pi}{3};$	**23.** $\begin{cases} x = 4\cos^3 t, \\ y = 4\sin^3 t, \end{cases}$ $\dfrac{\pi}{6} \le t \le \dfrac{\pi}{4};$
9. $\begin{cases} x = 3(\cos t + t\sin t), \\ y = 3(\sin t - t\cos t), \end{cases}$ $0 \le t \le \dfrac{\pi}{3};$	**24.** $\begin{cases} x = e^t(\cos t + \sin t), \\ y = e^t(\cos t - \sin t), \end{cases}$ $0 \le t \le \dfrac{3\pi}{2};$
10. $\begin{cases} x = \left(t^2 - 2\right)\sin t + 2t\cos t, \\ y = \left(2 - t^2\right)\cos t + 2t\sin t, \end{cases}$ $0 \le t \le \dfrac{\pi}{3};$	**25.** $\begin{cases} x = 2(t - \sin t), \\ y = 2(1 - \cos t), \end{cases}$ $0 \le t \le \dfrac{\pi}{2};$
11. $\begin{cases} x = 6\cos^3 t, \\ y = 6\sin^3 t, \end{cases}$ $0 \le t \le \dfrac{\pi}{3};$	

12. $\begin{cases} x = e^t(\cos t + \sin t), \\ y = e^t(\cos t - \sin t), \end{cases}$ $\frac{\pi}{2} \le t \le \pi;$	**26.** $\begin{cases} x = 4(2\cos t - \cos 2t), \\ y = 4(2\sin t - \sin 2t), \end{cases}$ $0 \le t \le \pi;$
13. $\begin{cases} x = 2,5(t - \sin t), \\ y = 2,5(1 - \cos t), \end{cases}$ $\frac{\pi}{2} \le t \le \pi;$	**27.** $\begin{cases} x = 2(\cos t + t\sin t), \\ y = 2(\sin t - t\cos t), \end{cases}$ $0 \le t \le \frac{\pi}{2};$
14. $\begin{cases} x = 3,5(2\cos t - \cos 2t), \\ y = 3,5(2\sin t - \sin 2t), \end{cases}$ $0 \le t \le \frac{\pi}{2};$	**28.** $\begin{cases} x = \left(t^2 - 2\right)\sin t + 2t\cos t, \\ y = \left(2 - t^2\right)\cos t + 2t\sin t, \end{cases}$ $0 \le t \le 2\pi;$
15. $\begin{cases} x = 6(\cos t + t\sin t), \\ y = 6(\sin t - t\cos t), \end{cases}$ $0 \le t \le \pi;$	**29.** $\begin{cases} x = 2\cos^3 t, \\ y = 2\sin^3 t, \end{cases}$ $0 \le t \le \frac{\pi}{4};$
	30. $\begin{cases} x = e^t(\cos t + \sin t), \\ y = e^t(\cos t - \sin t), \end{cases}$ $\frac{\pi}{6} \le t \le \frac{\pi}{4}.$

✍***4. Обчислити об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі*** *Ox* ***фігури, обмеженої лініями:***

1. $y = 2x - x^2, y = 0;$	**14.** $y = -x^2 + 3, y = x^2 + 1$**;**
2. $y = b\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}}, 0 \le x \le a$ **;**	**15.** $y = \sin x, y = \frac{2}{\pi}x$**;**
3. $y = \sin x, y = 0, 0 \le x \le \pi$ **;**	**16.** $y = 2^x, 4y - 3x - 5 = 0$ **;**
4. $y = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, y = 0, x = -1, x = 1$**;**	**17.** $2y = x^2, 2x + 2y - 3 = 0$ **;**
5. $y = \frac{x^4}{10}, x = 2$**;**	**18.** $y = x^2, y = \sqrt{x}$ **;**
6. $x = \sqrt{y - 2}, x = 2, x = 3$**;**	**19.** $x^2 + \left(y - 5\right)^2 = 9$**;**
7. $y = \frac{x^2 - x}{2}$**;**	**20.** $y^2 = 4x, y = x$**;**
	21. $y = x^{\frac{3}{4}}, y = x$**;**
	22. $y = xe^x, y = 0, x = 1$**;**

8. $xy=4, x=1, x=4$;	**23.** $y=x^2, y^2=x$;
9. $y=\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}, x=3$;	**24.** $y=1-x^2, y=0, x=0$;
10. $y=\dfrac{4x-x^2}{3}, y=\dfrac{x}{3}$;	**25.** $x=1-y^2, y=0, x=0$;
11. $(x-2)^2+y^2=9$;	**26.** $y=2x-x^2, y=0$;
12. $(x-2)^2+y^2=4$;	**27.** $y=x^2+1, y=3x-1$;
13. $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{16}=1$;	**28.** $y=x^2-2x+4, y=4+x$;
	29. $x^2+xy+y^2=3$;
	30. $x^2+y^2=1, y^2=\dfrac{3}{2}x$.

✍5. Обчислити (з точністю до двох знаків після коми) площу поверхні, утвореної обертанням дуги кривої L навколо вказаної осі:

1. $L:\ y=\dfrac{x^3}{3}\ \left(-\dfrac{1}{2}\le x\le\dfrac{1}{2}\right),\ Ox$;	**15.** $L:\ \rho=\sqrt{\cos 2\varphi}$, *полярна вісь;*
2. $L:\ \rho=2\cos\varphi$, *полярна вісь;*	**16.** $L:\ y^2=4+x$, *що відсікається прямою* $x=2,\ Ox$;
3. $L:\ \begin{cases} x=10(t-\sin t), \\ y=10(1-\cos t), \end{cases}$ $0\le t\le 2\pi,\ Ox$;	**17.** $L:\ y^2=2x$, *що відсікається прямою* $2x=3,\ Ox$;
4. $L:\ y=\dfrac{x^2}{2}$, *що відсікається прямою* $y=\dfrac{3}{2},\ Oy$;	**18.** $L:\ y=\dfrac{x^3}{3}\ (0\le x\le 1),\ Ox$;
5. $L:\ 3y=x^2\ (0\le x\le 2),\ Ox$;	**19.** $L:\ \rho^2=4\cos 2\varphi$, *полярна вісь;*
6. $L:\ y=\sqrt{x}$, *що відсікається прямою* $y=x,\ Ox$;	**20.** $L:\ \rho=6\sin\varphi$, *полярна вісь*;
7. $L:\ \begin{cases} x=2(t-\sin t), \\ y=2(1-\cos t), \end{cases}$ $0\le t\le 2\pi,\ Ox$;	**21.** $L:\ \begin{cases} x=t-\sin t, \\ y=1-\cos t, \end{cases}$ $0\le t\le 2\pi,\ Ox$;
8. $L:\ \begin{cases} x=\cos t, \\ y=3+\sin t, \end{cases}$ $0\le t\le 2\pi,\ Ox$;	**22.** $L:\ \rho=2\sin\varphi$, *полярна вісь*;
9. $L:\ 3x=y^3\ (0\le y\le 2),\ Oy$;	**23.** $L:\ \rho=\dfrac{2}{3}\cos\varphi$, *полярна вісь*;
	24. $L:\ \begin{cases} x=3\cos^3 t, \\ y=3\sin^3 t, \end{cases}$ $0\le t\le 2\pi,\ Ox$;

10. $L:\ y=\dfrac{x^3}{3}\ \left(-1\le x\le 1\right),\ Ox;$ **11.** $L:\ \begin{cases} x=\cos t, \\ y=1+\sin t, \end{cases}$ $0\le t\le 2\pi,\ Ox;$ **12.** $L:\ x^2=4+y$, *що відсікається прямою* $y=2,\ Oy;$ **13.** $L:\ \begin{cases} x=3(t-\sin t), \\ y=3(1-\cos t), \end{cases}$ $0\le t\le 2\pi,\ Ox;$ **14.** $L:\ \begin{cases} x=\cos^3 t, \\ y=\sin^3 t, \end{cases}\ 0\le t\le 2\pi,\ Ox;$	**25.** $L:\ \begin{cases} x=2\cos t, \\ y=3+2\sin t, \end{cases}$ $0\le t\le 2\pi,\ Ox;$ **26.** $L:\ \rho^2=9\cos 2\varphi$, *полярна вісь*; **27.** $L:\ y=x^3$ *між прямими* $x=\pm\dfrac{2}{3},\ Ox;$ **28.** $L:\ \begin{cases} x=2\cos^3 t, \\ y=2\sin^3 t, \end{cases}$ $0\le t\le 2\pi,\ Ox;$ **29.** $L:\ \begin{cases} x=\cos t, \\ y=2+\sin t, \end{cases}\ 0\le t\le 2\pi,\ Ox;$ **30.** $L:\ \rho=4\sin\varphi$, *полярна вісь.*

✍6. Знайти координати центра мас однорідної плоскої кривої L:

1. L: *півколо* $x^2+y^2=R^2$, *розміщене над віссю Ox.*
2. L: *перша арка циклоїди* $x=a(t-\sin t),\ \ y=a(1-\cos t),\ \ 0\le t\le 2\pi.$
3. L: *дуга астроїди* $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$, *розміщена в третьому квадранті.*
4. L: *дуга кола радіуса* R, *яка стягує центральний кут* α.
5. L: *дуга ланцюгової лінії* $y=a\,ch(x-a)\ \left(-a\le x\le a\right).$
6. L: *дуга кардіоїди* $\rho=a(1+\cos\varphi)\ \left(0\le\varphi\le\pi\right).$
7. L: *дуга логарифмічної спіралі* $\rho=a e^{\varphi}\ \left(\dfrac{\pi}{2}\le\varphi\le\pi\right).$
8. L: *одна арка циклоїди* $x=3(t-\sin t),\ \ y=3(1-\cos t).$
9. L: *дуга астроїди* $x=2\cos^3\dfrac{t}{4},\ \ y=\sin^3\dfrac{t}{4}$, *розміщена в першому квадранті.*
10. L: *дуга кривої* $x=e^t\sin t,\ \ y=e^t\cos t\ \left(0\le t\le\dfrac{\pi}{2}\right).$
11. L: *кардіоїда* $\rho=2(1+\cos\varphi).$
12. L: *крива* $\rho=2\sin\varphi$ *від точки* $(0;\,0)$ *до точки* $\left(\sqrt{2};\ \dfrac{\pi}{4}\right).$

13. L: *дуга розгортки кола* $x=a(\cos t+t\sin t),\ \ y=a(\sin t-t\cos t)$ $(0\le t\le\pi)$.
14. L: *крива* $\rho=2\sqrt{3}\cos\varphi$, *обмежена променями* $\varphi=0$ *та* $\varphi=\dfrac{\pi}{4}$.
15. L: *крива* $x=\sqrt{3}t^2,\ \ y=t-t^3\ \ (0\le t\le 1)$.

Знайти координати центра мас плоскої однорідної фігури Φ***, обмеженої даними лініями:***

16. Φ – *трикутник, сторони якого лежать на прямих* $x+y=a$, $x=0$ *та* $y=0$.
17. Φ *обмежена еліпсом* $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ *та осями координат* $x\ge 0,\ y\ge 0$.
18. Φ *обмежена першою аркою циклоїди* $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$ *та віссю Ох.*
19. Φ *обмежена кривими* $y=x^2,\ \ y=\sqrt{x}$.
20. Φ *обмежена дугою синусоїди* $y=\sin x$ *та відрізком осі Ох* $0\le x\le\pi$.
21. Φ *обмежена півколом* $y=\sqrt{r^2-x^2}$ *та віссю Ох.*
22. Φ *обмежена дугою параболи* $y=b\sqrt{\dfrac{x}{a}}\ \ (a>0,\ b>0)$, *віссю Ох та прямою* $x=b$.
23. Φ *обмежена дугою параболи* $y=b\sqrt{\dfrac{x}{a}}\ \ (a>0,\ b>0)$, *віссю Оу та прямою* $y=b$.
24. Φ *обмежена замкненою лінією* $y^2=ax^3-x^4$.
25. Φ *обмежена осями координат та дугою астроїди* $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$, *розміщеної в першому квадранті.*
26. Φ – *сектор круга радіуса* R *із центральним кутом, рівним* 2α.
27. Φ *обмежена кардіоїдою* $\rho=a(1+\cos\varphi)$.
28. Φ *обмежена першою петлею лемніскати Бернуллі* $\rho^2=a^2\cos 2\varphi$.
29. Φ *обмежена осями координат та параболою* $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{a}$.
30. Φ *обмежена напівкубічною параболою* $ay^2=x^3$ *та прямою* $x=a\ \ (a>0)$.

МОДУЛЬ 2.

🕮 Практичне заняття №15.

Тема: Числові ряди, їх збіжність.

✍**1.** *Записати п'ять перших членів ряду за відомою формулою загального члена* u_n [2, *с. 6*]:

а) $u_n = \dfrac{3n+2}{n^2+4}$;   б) $u_n = \dfrac{(-1)^n(n-1)}{2^{n+3}}$;

в) $u_n = \dfrac{2+(-1)^n}{n^2+4}$;   г) $u_n = \begin{cases} \dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)}, & n = 2k-1; \\ \dfrac{1}{n^2}, & n = 2k. \end{cases}$

✍**2.** *За даними першими членами знайти один з можливих виразів* n*-го члена таких рядів:*

а) $1+\dfrac{1}{5}+\dfrac{1}{9}+\dfrac{1}{13}+\ldots$;

б) $\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{6}+\dfrac{1}{12}-\dfrac{1}{20}+\ldots$;

в) $1-\dfrac{1\cdot3}{1\cdot4}+\dfrac{1\cdot3\cdot5}{1\cdot4\cdot7}-\dfrac{1\cdot3\cdot5\cdot7}{1\cdot4\cdot7\cdot10}+\dfrac{1\cdot3\cdot5\cdot7\cdot9}{1\cdot4\cdot7\cdot10\cdot13}-\ldots$;

г) $\ln\dfrac{1}{4}+\ln\dfrac{2\cdot4}{1\cdot7}+\ln\dfrac{3\cdot7}{2\cdot10}+\ln\dfrac{4\cdot10}{3\cdot13}+\ldots$.

✍**3.** *Знайти* n*-у частинну суму* S_n *ряду і суму* S *ряду* [10, *с.270*]:

а) $\dfrac{2}{5}+\dfrac{2}{25}+\ldots+\dfrac{2}{5^n}+\ldots$;

б) $\left(\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{5}\right)+\left(\dfrac{1}{3^2}+\dfrac{1}{5^2}\right)+\ldots+\left(\dfrac{1}{3^n}+\dfrac{1}{5^n}\right)+\ldots$;

в) $\dfrac{1}{3\cdot4}+\dfrac{1}{4\cdot5}+\ldots+\dfrac{1}{(n+2)(n+3)}+\ldots$;

г) $\dfrac{1}{1\cdot4}+\dfrac{1}{4\cdot7}+\ldots+\dfrac{1}{(3n-2)(3n+1)}+\ldots$;

д) $\dfrac{1}{1\cdot2\cdot3}+\dfrac{1}{2\cdot3\cdot4}+\ldots+\dfrac{1}{n(n+1)(n+2)}+\ldots$;

е) $\dfrac{1}{3\cdot5\cdot7}+\dfrac{1}{5\cdot7\cdot9}+\ldots+\dfrac{1}{(2n+1)(2n+3)(2n+5)}+\ldots$;

є) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{16n^2-8n-3}$; ж) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{36n^2-24n-5}$;

з) $\sum_{n=2}^{\infty}\ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$; и) $\sum_{n=1}^{\infty}\ln\frac{n(2n+1)}{(n+1)(2n-1)}$;

і) $\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{1}{2^n}\cos\frac{3}{2^n}$; к) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!(n+2)}$.

✍**4.** *Довести розбіжність ряду, використовуючи необхідну умову збіжності* [15]*:*

а) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt[n]{0,001}$;

в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2n-1}$; г) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}$;

д) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3+n^2+1}{n+2}\arcsin\frac{1}{n^2+2n+3}$; е) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt[3]{n}}{\ln^2(n+1)}$.

✍**5.** *Користуючись критерієм Коші, довести збіжність ряду* $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$, *якщо* [10]*:*

а) $u_n=\frac{\cos nx}{2^n}$; б) $u_n=\frac{\sin n\alpha}{n(n+1)}$;

в) $u_n=\frac{\cos\alpha^n}{n^2}$; г) $u_n=\frac{\cos nx-\cos(n+1)x}{n}$.

✍**6.** *Користуючись критерієм Коші, довести розбіжність ряду* $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$, *якщо* [10]*:*

а) $u_n=\frac{1}{2n}$; б) $u_n=\frac{n-2}{n^2+2}$;

в) $u_n=\frac{1}{\sqrt{n(n+2)}}$; г) $u_n=\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$.

🕮 Практичне заняття №16.

Тема: Числові ряди з невід’ємними членами: ознаки порівняння рядів, Даламбера, Коші, інтегральна ознака Коші.

✍**1.** *Скориставшись ознакою порівняння, дослідити на збіжність ряди:*

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\cdot 2^n}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}2^{-\frac{n^2}{n+1}}$;

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin\frac{\pi}{4^n}$; г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-\cos\frac{\pi}{n}\right)$;

д) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln\frac{n^2+5}{n^2+4}$; е) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n+\cos n}{3^n+\sin n}$;

є) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\frac{2\pi}{n+1}}{\sqrt{n}}$; ж) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n^3+n+1}$;

з) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\operatorname{arctg}\frac{1+(-1)^n}{2}}{n^3+2}$; и) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\operatorname{arctg}\left(2+(-1)^n\right)}{\ln(1+n)}$.

✍**2.** *Скориставшись ознакою Даламбера, дослідити на збіжність ряди:*

а) $2+\frac{2\cdot 5}{1\cdot 5}+\frac{2\cdot 5\cdot 8}{1\cdot 5\cdot 9}+\ldots+\frac{2\cdot 5\cdot 8\cdot\ldots\cdot(3n-1)}{1\cdot 5\cdot 9\cdot\ldots\cdot(4n-3)}+\ldots$;

б) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{n+1}{2^n(n-1)!}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}$;

г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(2n+1)!!}{1\cdot 4\cdot\ldots\cdot(3n+1)}$; д) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2\cdot 5\cdot\ldots\cdot(3n+2)}{2^n(n+1)!}$;

е) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(2n)!!}{n!}\operatorname{arctg}\frac{1}{3^n}$; є) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(3n)!}{(n!)^3 4^{3n}}$.

✍**3.** *Скориставшись ознакою Коші, дослідити на збіжність ряди:*

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{-n^2}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\ln^n(1+n)}$;

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\sqrt{n}+2}{\sqrt{n}+3}\right)^{n^{\frac{3}{2}}}$; г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{6n+1}{5n-3}\right)^{\frac{n}{2}}\left(\frac{5}{6}\right)^{\frac{2n}{3}}$;

д) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n^2}{2n+1}\right)^n \arcsin^n \frac{1}{n}$; е) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{2n}\operatorname{arctg}^n \frac{1}{n}}{\left(3n^2+2n+1\right)^{\frac{n+3}{2}}}$;

є) $\sqrt{2}+\sqrt{2-\sqrt{2}}+\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}+\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}+\ldots$

$\left(\sqrt{2}=2\cos\frac{\pi}{4}\right)$;

ж) $\sqrt{2}+\sqrt{2-\sqrt{3}}+\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{3}}}+\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}+\ldots$.

✍**4.** *Встановивши збіжність ряду, довести, що:*

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n!}{n^n}=0$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^n}{(2n)!}=0$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^5}{(2n)!}=0$; г) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^3}{4^{n^2}}=0$.

✍**5.** *Скориставшись інтегральною ознакою Коші, дослідити на збіжність ряди:*

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)\ln^2(n+1)}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)\ln(n+1)\ln\left(\ln(n+1)\right)}$;

в) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1+n^2}{1+n^3}\right)^2$; г) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\ln\frac{n+1}{n-1}$;

д) $\sum_{n=4}^{\infty}\frac{n}{\left(5n^2-9\right)\ln(n-2)}$.

🕮 Практичне заняття №17.

Тема: Абсолютна та умовна збіжність рядів. Знакозмінні ряди. Теорема Лейбніца.

✍**1.** *Довести абсолютну збіжність рядів* [17],[10]*:*

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}n^3}{2^n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\left(2n+\frac{\pi}{4}\right)}{n\sqrt[3]{n+2}}$;

в) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{n}{2n+1}\right)^n$; г) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\operatorname{arctg}(-n)^n}{\sqrt[4]{2n^6+3n+1}}$;

д) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt[5]{n}}\arcsin\frac{\pi}{4n}$; е) $\sum_{n=1}^{\infty}\cos^3 n\cdot\mathrm{arctg}\frac{n+1}{n^3+2}$;

є) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\ln^2 n}{2^n}$; ж) $\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{\frac{n^2+2}{n^3+4n}}\cdot\ln\left(1+\frac{(-1)^n}{n+1}\right)$.

✍**2.** *Довести, що задані ряди є умовно збіжними* [17, *с. 336*]*:*

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}\ln^5 n}{n}$;

в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n-\ln(n+1)}$; г) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}\mathrm{arctg}\frac{1}{\sqrt{n}}$;

д) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}}{\sqrt{n+2}}$; е) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{n}$.

✍**3.** *Дослідити на абсолютну і умовну збіжність ряди* [10, *с. 299*]*:*

а) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\sqrt[3]{n+1}}{\sqrt{n}+2}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n^2\cdot 2^n}{3^n+2}$;

в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n\ln(n+1)}$; г) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)\sin 2n}{n^2-\ln n}$;

д) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n}{(n+1)\sqrt{n+2}}tg\frac{1}{\sqrt{n}}$; е) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n\ln(n+1)\ln\left(\ln(n+2)\right)}$;

є) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n\cos\frac{1}{n}}{\sqrt[4]{n}}$; ж) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\left(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right)^n$ (скористатись ознакою Раабе, [17, *329*]).

✍**4.** *Користуючись тим, що сума ряду* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}=\ln 2$, *знайти суми рядів, отриманих з даного перестановкою його членів:*

а) $1+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}-\frac{1}{6}+\ldots$;

б) $1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\frac{1}{5}-\ldots$;

в) $1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\frac{1}{3}-\frac{1}{10}-\frac{1}{12}-\frac{1}{14}-\frac{1}{16}+\frac{1}{5}-\ldots$.

✍**5.** *Знаючи, що* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}=\frac{\pi^2}{12}$, *знайти суми рядів:*

а) $1+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}-\frac{1}{4^2}+\frac{1}{9^2}+\frac{1}{11^2}-\frac{1}{6^2}+\dots$;

б) $1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}-\frac{1}{4^2}+\frac{1}{9^2}+\frac{1}{11^2}-\frac{1}{6^2}+\dots$.

✍**6.** *Скільки членів ряду треба взяти, щоб обчислити його суму з точністю до ε, якщо:*

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n},\ \varepsilon=10^{-3}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2},\ \varepsilon=10^{-3}$;

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^3},\ \varepsilon=10^{-3}$; г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n}}{n!},\ \varepsilon=10^{-3}$;

д) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n^2+2}},\ \varepsilon=10^{-6}$; е) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n}}{n!(2n+1)},\ \varepsilon=10^{-3}$.

⌛Контрольна робота №2 (частина).

✍***1. Знайти суму ряду:***

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{6}{9n^2+12n-5}$;	**11.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{6}{36n^2-24n-5}$;	**21.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{7}{49n^2-35n-6}$;
2. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{24}{9n^2-12n-5}$;	**12.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{14}{49n^2-84n-5}$;	**22.** $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^2+n-2}$;
3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{6}{9n^2+6n-8}$;	**13.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{4}{4n^2+4n-3}$;	**23.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{12}{36n^2+12n-35}$;
4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{6}{9n^2+21n-8}$;	**14.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{7}{49n^2+35n-6}$;	**24.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{7}{49n^2+21n-10}$;
5. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{2}{4n^2+8n+3}$;	**15.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{9}{9n^2+3n-20}$;	**25.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3}{9n^2-3n-2}$;
6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{14}{49n^2-28n-45}$;	**16.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{14}{49n^2-42n-40}$;	**26.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{5}{25n^2-5n-6}$;
7. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3}{9n^2+3n-2}$;	**17.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{8}{16n^2-8n-15}$;	**27.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{8}{16n^2+8n-15}$;
8. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{7}{49n^2-7n-12}$;	**18.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{7}{49n^2-21n-10}$;	**28.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{14}{49n^2-56n-33}$;
9. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^2+n-2}$;	**19.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{5}{25n^2+5n-6}$;	**29.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{12}{36n^2-12n-35}$;

10. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{14}{49n^2-14n-48}$;	**20.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{6}{4n^2-9}$;	**30.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{7}{49n^2+7n-12}$.

✍2. Скориставшись ознакою порівняння, дослідити на збіжність ряди:

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n^3+2}}$;	**11.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3n-1}{n^2+1}$;	**21.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n+2}{n\sqrt[3]{n}}$;
2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n^5}+1}$;	**12.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\ln(n+3)}$;	**22.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin\frac{\pi}{2n-1}$;
3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{5n+2}$;	**13.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{3n^2+5}$;	**23.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{n^3+2}$;
4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n^3+3n}}$;	**14.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3n^2-n+1}$;	**24.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin\frac{\pi}{4n}$;
5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$;	**15.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin\frac{\pi}{2^{n-1}}$;	**25.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^3+1}$;
6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\ln(n+2)}$;	**16.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n+2}{n(n+4)}$;	**26.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n^2+5}$;
7. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n}-2}$;	**17.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin\frac{2\pi}{3^n}$;	**27.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+4}$;
8. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3n-1}$;	**18.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)(n+3)}$;	**28.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{n^2+4}$;
9. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}tg\,\frac{\pi}{3^n}$;	**19.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\cdot 3^{2n}}$;	**29.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{5n^2+3}$;
10. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n+3}{n(n+1)}$;	**20.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)\cdot 3^n}$;	**30.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)(n+6)}$.

✍3. Скориставшись ознакою Даламбера, дослідити на збіжність ряди:

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{2^n(n-1)!}$;	**11.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{(n+2)!}$;	**21.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n n!}{(2n)!}$;
2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{2^{n^2}}$;	**12.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{(n!)^2}$;	**22.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{5^n(n+1)!}{(2n)!}$;
3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n+1}(n^3+1)}{(n+1)!}$;	**13.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{7^{2n}}{(2n-1)!}$;	**23.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{(n+2)!4^n}$;

4. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{10^n 2n!}{(2n)!}$;	**14.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{(3n)!}$;	**24.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n+1)!!}{(3n-1)!!}$;
5. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n+2)!}{(3n+5)\cdot 2^n}$;	**15.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{3^n(n+1)!}$;	**25.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(3n-2)!!}{(2n+5)!!}$;
6. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+5}{n!}\sin\frac{2}{3^n}$;	**16.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^{n-1}}$;	**26.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n!}{\sqrt{2^n+3}}$;
7. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\operatorname{arctg}\frac{5}{n}}{n!}$;	**17.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(3^n+1)(2n)!}$;	**27.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(3n+2)!}{10^n n^2}$;
8. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{3^n n!}$;	**18.** $\sum_{n=1}^{\infty}n!\sin\frac{\pi}{2^n}$;	**28.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^{n-1}\sqrt{n^2+5}}{(n-1)!}$;
9. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{(2n)!}tg\frac{1}{5^n}$;	**19.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)!}{n^n}$;	**29.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!\sqrt[3]{n}}{3^n+2}$;
10. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{6^n(n^2-1)}{n!}$;	**20.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n\sqrt[3]{n^2}}{(n+1)!}$;	**30.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!(2n+1)!}{(3n)!}$.

✍**4. *Скориставшись ознакою Коші, дослідити на збіжність ряди:***

1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{-n^2}$;	**11.** $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n-1}{n}\right)^n\frac{n}{5^n}$;	**21.** $\sum_{n=1}^{\infty}n^3\operatorname{arctg}^n\frac{\pi}{3n}$;
2. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}\frac{1}{4^n}$;	**12.** $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n+3}{n+1}\right)^{n^2}$;	**22.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^5 3^n}{(2n+1)^n}$;
3. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n^2+1}{n^2+1}\right)^{n^2}$;	**13.** $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n+2}{4n-1}\right)^n(n-1)^2$;	**23.** $\sum_{n=1}^{\infty}2^{n-1}e^{-n}$;
4. $\sum_{n=1}^{\infty}n^4\left(\frac{2n}{3n+5}\right)^n$;	**14.** $\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{n+1}{2n-3}\right)^{n^2}$;	**24.** $\sum_{n=1}^{\infty}n\left(\frac{3n-1}{4n+2}\right)^{2n}$;
5. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n+1}{3n-2}\right)^{n^2}$;	**15.** $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{3n+1}\right)^{2n+1}$;	**25.** $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n}{4n+3}\right)^{n^2}$;
6. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n+2}{3n+1}\right)^n(n+1)^3$;	**16.** $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n-1}{3n+1}\right)^{\frac{n}{2}}$;	**26.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{n+2}}{(2n^2+1)^{\frac{n}{2}}}$;
7. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4n-3}{5n+1}\right)^{n^3}$;	**17.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n+1}}{n^n}$;	**27.** $\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{n}\left(\frac{n}{3n-1}\right)^{2n}$;

8. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{10n+5}\right)^{n^2}$; **9.** $\sum_{n=1}^{\infty} n\arcsin^n \frac{\pi}{4n}$; **10.** $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+2}{3n-1}\right)^{n^2}$;	**18.** $\sum_{n=1}^{\infty} n^2\sin^n \frac{\pi}{2n}$; **19.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{(\ln n)^n}$; **20.** $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{3n-1}\right)^{n^3}$;	**28.** $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}\cdot\frac{1}{2^n}$; **29.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\cdot 3^{n+2}}{5^n}$; **30.** $\sum_{n=2}^{\infty}\sqrt[3]{n}\left(\frac{n-2}{2n+1}\right)^{3n}$.

✍**5.** ***Скориставшись інтегральною ознакою Коші, дослідити на збіжність ряди:***

1. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln^2(3n+1)}$; **2.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\ln^2(2n+1)}$; **3.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+3)\ln^2(2n+1)}$; **4.** $\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{(3n-5)\ln^2(4n-7)}$; **5.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(3n+4)\ln^2(5n+2)}$; **6.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)\ln^2(n\sqrt{5}+2)}$; **7.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\left(n\sqrt{2}+1\right)\ln^2\left(n\sqrt{3}+1\right)}$; **8.** $\sum_{n=5}^{\infty}\frac{1}{(n-2)\ln(n-3)}$; **9.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)\ln(2n)}$; **10.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)\ln(2n)}$; **11.** $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(3n-1)\ln n}$;	**16.** $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(2n+3)\ln^2(n+1)}$; **17.** $\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n\ln(n-1)}$; **18.** $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{2n\sqrt{\ln(3n-1)}}$; **19.** $\sum_{n=5}^{\infty}\frac{1}{(n-2)\sqrt{\ln(n-3)}}$; **20.** $\sum_{n=4}^{\infty}\frac{1}{(3n-1)\sqrt{\ln(n-2)}}$; **21.** $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n+5)\ln^2(n+1)}$; **22.** $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\frac{n}{3}\ln^2(n+7)}$; **23.** $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n^2}{\left(n^3+1\right)\ln n}$; **24.** $\sum_{n=3}^{\infty}\frac{n}{\left(n^2-3\right)\ln^2 n}$; **25.** $\sum_{n=4}^{\infty}\frac{1}{\left(\frac{n}{3}-1\right)\ln^2\left(\frac{n}{2}\right)}$;

12. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)\ln(n+1)}$;	**26.** $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n}{\left(n^2+5\right)\ln n}$;
13. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(2n-3)\ln(3n+1)}$;	**27.** $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{3n}{\left(2n^2+3\right)\ln n}$;
14. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n+2)\ln^2 n}$;	**28.** $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n+1}{\left(5n^2-9\right)\ln(n-2)}$;
15. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n+3)\ln^2(2n)}$;	**30.** $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n}{(n^2-1)\ln n}$.
29. $\sum_{n=3}^{\infty}\frac{2n+1}{\left(\frac{3n^2}{2}+2\right)\ln\frac{n}{2}}$;	

🕮 Практичне заняття №18.

Тема: Функціональні послідовності і ряди. Збіжність і рівномірна збіжність ФП і ФР. Ознака Вейєрштрасса.

✍**1.** *Знайти граничну функцію* $f(x)$ *послідовності* $\left(f_n(x)\right)$ *на множині* E [10, *с.316, 322*]*:*

а) $\left(x^n-3x^{n+2}+2x^{n+3}\right)$, $E=[0;1]$;

б) $\left(x^4\cos\frac{1}{nx}\right)$, $E=(0;+\infty)$;

в) $\left(\frac{nx^2}{x+3n+2}\right)$, $E=[0;+\infty)$;

г) $\left((x-1)\operatorname{arctg}x^n\right)$, $E=(0;+\infty)$;

д) $\left(n^3x^2e^{-nx}\right)$, $E=[0;+\infty)$;

е) $n\left(\sqrt{x^2+\frac{1}{n}}-x\right)$, $E=(0;+\infty)$;

є) $n\left(x^{\frac{1}{n}}-1\right)$, $E=[1;3]$;

ж) $\left(n\left(x^{\frac{1}{n}}-x^{\frac{1}{2n}}\right)\right)$, $E=(0;+\infty)$;

з) $\left(n\,\mathrm{arctg}\,nx^2\right),\ \ E=(0;+\infty).$

✍**2.** *Знайти область збіжності (абсолютної і умовної) функціонального ряду* [2]*:*

а) $\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}+\ldots+\frac{n}{x^n}+\ldots;$

б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n+1}\left(\frac{x}{2x+1}\right)^n;$

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{1-x^n};$

г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2\cdot 4\cdot\ldots\cdot 2n}\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)^n;$

д) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x(x+n)}{n}\right)^n;$

е) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n}}{1+x^{2n+1}};$

є) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{(1+x)(1+x^2)\cdot\ldots\cdot(1+x^n)};$

ж) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{(1+x)(1+x^2)(1+x^4)\cdot\ldots\cdot(1+x^{2(n-1)})};$

з) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n\sin^n x}{n^2};$

и) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}2^{n-1}\sin\frac{x}{3^{n-1}}.$

✍**3.** *Довести, що якщо додатна числова послідовність* (α_n) *– нескінченно мала і* $\forall n\ge n_0$ *і* $\forall x\in E:\left|f_n(x)-f(x)\right|\le\alpha_n$*, то функціональна послідовність* $\left(f_n(x)\right)$ *збігається рівномірно до функції* $f(x)$ *на множині* E.

✍**4.** *Довести, що задана послідовність рівномірно збігається на вказаній множині [17]:*

а) $\left(\sin\left(ne^{-nx}\right)\right),\ \ [1;+\infty);$

б) $\left(tg\left(\frac{n-1}{n}x\right)\right),\ \ \left(0;\frac{\pi}{4}\right);$

в) $\left(\frac{nx^2}{n+2x}\right),\ \ [1;2];$

г) $\left(\frac{nx}{n^2x^2+1}\right),\ \ [1;+\infty);$

д) $\left(\frac{\ln(nx)}{nx^2}\right),\ \ [1;+\infty);$

е) $\left(e^{-nx}\ln n\right),\ \ (0;+\infty);$

є) $\left(\frac{\mathrm{arctg}\,nx}{\sqrt{n+x}}\right),\ \ [0;+\infty);$

ж) $\left(\ln\left(1+\frac{\cos nx}{\sqrt{n+x}}\right)\right),\ \ [1;+\infty).$

✍**5.** *Користуючись ознакою Вейєрштрасса, довести рівномірну збіжність функціонального ряду* [2],[10]*:*

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x}{1+n^4x^2},\ [0;+\infty);$ б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{1-x^{2n}}}{2^n},\ [-1;1];$

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{\sqrt{n!}}\left(x^n-x^{-n}\right),\ \left[\frac{1}{2};2\right];$ г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}x^2e^{-nx},\ [0;+\infty);$

д) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}e^{-n\left(x^2+\sin x\right)},\ [1;+\infty);$ е) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\operatorname{arctg}\left(n^2x\right)\cos(\pi nx)}{n\sqrt{n}},\ R.$

✍**6.** *Дослідити на неперервність і диференційовність функцію* $f(x)$:

а) $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^3};$ б) $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^x},\ x>1;$

в) $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}e^{-\pi n^2x},\ x>0;$ г) $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n x}{n+x};$

д) $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{10^n};$

е) $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\left(2^{n^2}x\right)}{a^{n^2}},\ a\in(1;2),\ a\in\left(\frac{3}{2};\frac{5}{2}\right).$

✍**7.** *Знайти суму ряду* [17, *с. 397*]:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n},\ \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n};$

б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n(n+1)},\ \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)},\ \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n(n+1)};$

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n(n+2)},\ \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+2)},\ \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n(n+2)};$

г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{(2n-1)(2n+1)},\ \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}.$

✍**8.** *Перевірити, чи виконується рівність* $\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty}f_n(x)\right)'=\sum\limits_{n=1}^{\infty}f_n'(x)$ *на множині* E, *якщо* [15]:

а) $f_n(x)=arctg\,\frac{x}{n^2},\ E=R;$ б) $f_n(x)=\frac{\sin 2^n\pi x}{2^n},\ E=R;$

в) $f_n(x)=\sin^2\dfrac{n}{x},\ \ E=[0;\,2];$ г) $f_n(x)=\dfrac{1}{n^2+x^2},\ \ E=R;$

д) $f_n(x)=\dfrac{\cos nx}{1+n^2},\ \ E=\left(\dfrac{\pi}{6};\,\dfrac{5\pi}{6}\right);$ е) $f_n(x)=(-1)^{n+1}\ln\left(1+\dfrac{x}{n}\right),\ \ E=R^{+}.$

✍**9.** *Перевірити, чи виконується рівність* $\int\limits_a^x\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty}f_n(t)\right)dt=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\int\limits_a^x f_n(t)dt$ *на множині* $E=[a;\,b]$*, якщо* [15, *с. 408*]*:*

а) $f_n(x)=\dfrac{1}{x^{2n+1}}-\dfrac{1}{x^{2n-1}},\ \ E=(0;\,1];$ б) $f_n(x)=ne^{-nx},\ \ E=[\ln 2;\,\ln 5];$

в) $f_n(x)=\dfrac{\cos^2 nx}{n(n+1)},\ \ E=[0;\,2\pi];$ г) $f_n(x)=x^{2(n+1)}-x^{2n},\ \ E=[-1;\,1];$

д) $f_n(x)=(n+1)x^n,\ \ E=[-1;\,1];$

е) $f_n(x)=\dfrac{x}{(nx+1)((n-1)x+1)},\ \ E=[0;\,2].$

🕮 Практичне заняття №19.

Тема: Степеневі ряди. Область збіжності.

✍**1.** *Знайти радіус збіжності* R*, інтервал і область збіжності степеневого ряду* [2],[10]*:*

а) $\dfrac{x}{1\cdot 3}+\dfrac{x^2}{2\cdot 4}+\ldots+\dfrac{x^n}{n(n+2)}+\ldots;$

б) $\dfrac{\ln 2}{1}x^2+\dfrac{\ln 3}{2}x^3+\ldots+\dfrac{\ln(n+1)}{n}x^{n+1}+\ldots;$

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{x^{2n-1}}{3^{n-1}n\sqrt{n}};$ г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(n-1)(x+3)^n}{3^{n+1}};$

д) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{n(x-5)^{n+1}}{(n+1)!};$ е) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{(x-2)^{2n}}{n\cdot 4^n};$

є) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(x+1)^{3n-2}}{2^{3n}(n+1)\ln(n+1)};$ ж) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n^2}x^n;$

з) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{2n-1}{3n+2}\right)^n(x+2)^n;$ и) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sqrt{\dfrac{n^4+3}{n^3+4n}}(x+2)^n;$

і) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a^n}{n}+\frac{b^n}{n^2}\right)x^n,\ \ a>0,\ \ b>0;$ ї) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{a^n+b^n},\ \ a>0,\ \ b>0.$

✍**2.** *Знайти радіус збіжності і суму степеневого ряду* [17, *с.417*]*:*

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!};$ б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!};$

в) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(4x)^n;$ г) $\sum_{n=1}^{\infty}3n\,x^{3n-1};$

д) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{4n-3}}{4n-3};$ е) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n(n+1)}x^{n+1};$

є) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+1)^n}{n\cdot 2^{n-1}};$ ж) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(x-4)^{2n-1}}{2n-1};$

з) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2x+1)^{3n-2}}{3n-2};$ и) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(3x-1)^n}{n(n+3)}.$

✍**3.** *Знайти суму числового ряду* [17, *с. 418*], [15, *с. 417*]*:*

а) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^2+3n+1}{n!};$ б) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n(n+1)}{n!};$

в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{3^n};$ г) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2(n+1)^2};$

д) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n(n+1)};$ е) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(2n+1)};$

є) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2+n-2};$ ж) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+1)(2n+1)};$

з) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n+1)(2n+1)};$ и) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n(3n+1)}.$

✍**4.** *Самостійно побудувати рівномірно збіжний функціональний ряд, з допомогою диференціювання або інтегрування його записати числовий ряд при конкретних значеннях* x*:*

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n!};$ б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!};$

в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n)!};$ г) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1};$ д) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}.$

🕮 Практичне заняття №20.

Тема: Розклад функцій в степеневі ряди.

✍**1.** *Розкласти функцію* $f(x)$ *в ряд Тейлора в околі точки* x_0 [2,*с. 48*]*:*

а) $f(x) = x^3 + 2x + 2,\ \ x_0 = -1;$

б) $f(x) = x^4 + 2x^3 - 8x^2 + 4x + 4,\ \ x_0 = -1;$

в) $f(x) = x^6,\ \ x_0 = -2;$ г) $f(x) = \sqrt{x},\ \ x_0 = 2,\ \ n = 4;$

д) $f(x) = \sin\dfrac{\pi x}{4},\ \ x_0 = 2;$ е) $f(x) = \cos x,\ \ x_0 = \dfrac{\pi}{4};$

є) $f(x) = \ln\dfrac{2+x}{2-x},\ \ x_0 = 0;$ ж) $f(x) = arctg\, x,\ \ x_0 = 0;\ \ x_0 = 1.$

✍**2.** *Використовуючи відомі розклади функцій в степеневий ряд, розкласти функцію в ряд Маклорена:*

а) $\dfrac{x^{10}}{1-x};$ б) $\dfrac{x^2}{(1+x)^2};$ в) $\dfrac{1}{(1-x^3)^2};$

г) $\left(1-x^2\right)^{-\frac{3}{2}};$ д) $\dfrac{5x-4}{x+2};$ е) $\dfrac{5-2x}{x^2-5x+6};$

є) $\dfrac{1}{1+x+x^2};$ ж) $\dfrac{1}{1-x-x^2};$ з) $\dfrac{1}{x^3+x^2+3x+3};$

и) $\ln\dfrac{2x+1}{x^2-4x+4};$ і) $(x^2+5)\ln\dfrac{9-x^2}{4-x^2};$ ї) $\ln\left(12-x-x^2\right);$

к) $\cos^2 x;$ л) $\sin 3x \sin 5x;$ м) $\sin^3 x.$

✍**3.** *Використовуючи відомі розклади функцій в степеневий ряд, довести, що:*

а) $\dfrac{1}{a+bx} = \sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n b^n}{a^{n+1}}x^n,\ \ |x| < \left|\dfrac{a}{b}\right|,\ \ ab \neq 0;$

б) $\dfrac{1}{x^2+a^2} = \sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{a^{2(n+1)}}x^{2n},\ \ |x| < |a|,\ \ a \neq 0;$

в) $\dfrac{1}{\sqrt{a^2-x^2}} = \dfrac{1}{a} + \sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(2n-1)!!}{a^{2n+1}(2n)!!}x^{2n},\ \ |x| < a,\ \ a > 0;$

г) $\sqrt{a^2+x^2} = a + \dfrac{x^2}{2a} + \sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}(2n-3)!!}{a^{2n-1}(2n)!!}x^{2n},\ \ |x| < a,\ \ a > 0;$

д) $\ln(a+bx) = \ln a + \sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\left(\dfrac{b}{a}\right)^n\dfrac{x^n}{n},\ \ |x| < \dfrac{a}{|b|},\ \ a > 0,\ \ b \neq 0.$

✍**4.** *Розкласти у ряд Маклорена функцію* $f(x)$, *скориставшись рядом Маклорена для її похідної, і знайти радіус збіжності цього ряду* [17, *с. 430*]:

а) $f(x) = arctg\, x$; б) $f(x) = \arcsin x$;

в) $f(x) = (1+x)\ln(1+x)$; г) $f(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$;

д) $f(x) = arctg\, \dfrac{2-x}{1+2x}$; е) $f(x) = arctg\, \sqrt{\dfrac{1-2x}{1+2x}}$;

є) $f(x) = \arcsin \dfrac{2x}{1+x^2}$; ж) $f(x) = \arcsin \dfrac{x^2}{\sqrt{16+x^4}}$.

✍**5.** *Розкласти у ряд Маклорена функцію і знайти радіус збіжності ряду:*

а) $x\ln\left(x+\sqrt{x^2+2}\right)$; б) $x\ln\left(x^2+\sqrt{9+x^4}\right)$;

в) $\left(x^2-1\right)\arcsin 2x^2$; г) $x^2 \arccos 2x$;

д) $x\arcsin x + \sqrt{1-x^2}$; е) $x\arccos x - \sqrt{1-x^2}$;

є) $\ln\left(\pi\sqrt{\dfrac{2+x}{2-x}}\right) + \operatorname{arctg}\dfrac{x}{2}$; ж) $\dfrac{1}{4}\ln\dfrac{1+x}{1-x} + \dfrac{1}{2}\operatorname{arctg} x$.

✍**6.** *Розкласти функцію в ряд Тейлора в околі точки* x_0 *і знайти його радіус збіжності:*

а) $\dfrac{1}{x^2-5x+6}$, $x_0 = 1$; б) $\dfrac{1}{\left(x^2-6x+18\right)^2}$, $x_0 = 3$;

в) $\dfrac{1}{\sqrt{x^2-12x+40}}$, $x_0 = 6$; г) $(x+1)\cos^2 x$, $x_0 = -1$;

д) $\cos^4 x$, $x_0 = -\dfrac{\pi}{2}$; е) $\ln\left(x^2+2x+2\right)$, $x_0 = -1$;

є) $\ln\left(x^2-9x+20\right)$, $x_0 = 3$.

✍**7.** *Використовуючи інтегрування, знайти суму ряду:*

а) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$; б) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n}}{n}$;

в) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^{n-1}$; г) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n+1)x^{2n}}{n!}$.

🕮 Практичне заняття №21.
Тема: Застосування степеневих рядів.

✍**1.** *Обчислити із заданою точністю* $\varepsilon = 10^{-4}$*:*

а) $\cos 1^0$; б) $\cos 10^0$; в) $\sin 10^0$; г) $\sin 1^0$;

д) $\sqrt[3]{130}$; е) $\sqrt[3]{500}$; є) $\sqrt[3]{68}$; ж) $\sqrt[7]{129}$;

з) $\ln 1,2$; и) $\ln 1,3$; і) $\ln 0,98$; ї) $\sqrt[10]{1000}$;

к) $\sqrt{e}$; л) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{e}}$; м) $\arcsin\dfrac{1}{3}$; н) $arctg\dfrac{\pi}{10}$.

✍**2.** *Обчислити інтеграли із заданою точністю* $\varepsilon = 10^{-4}$*:*

а) $\int\limits_0^1 \dfrac{\sin x}{x}dx$; б) $\int\limits_0^1 \sin x^2 dx$; в) $\int\limits_0^{0,8} x^{10}\sin x\,dx$;

г) $\int\limits_0^{0,5} x\ln\left(1+x^2\right)dx$; д) $\int\limits_2^4 e^{\frac{1}{x}}dx$; е) $\int\limits_0^{\frac{1}{4}} e^{-x^2}dx$;

є) $\int\limits_0^{\frac{1}{2}} \dfrac{arctg\,x}{x}dx$; ж) $\int\limits_0^{0,5} \dfrac{dx}{1+x^4}$; з) $\int\limits_0^{\frac{1}{3}} \dfrac{dx}{\sqrt[3]{1-x^2}}$.

✍**3.** *Знайти похідну* k*-го порядку функції* $f(x)$ *у точці* x_0 [17]*:*

а) $f(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$, $k = 7$, $x_0 = 0$;

б) $f(x) = x^6 e^x$, $k = 10$, $x_0 = 0$;

в) $f(x) = x^2\ln\left(4+x^2\right)$, $k = 11$, $x_0 = 0$;

г) $f(x) = \dfrac{1}{\left(x^2-6x+18\right)^2}$, $k = 6$, $x_0 = 3$;

д) $f(x) = \ln\dfrac{2+x^2}{\sqrt{1-2x^2}}$, $k = 4$, $x_0 = 0$;

е) $f(x) = \ln\dfrac{x^2-2x+3}{2-x}$, $k = 7$, $x_0 = 1$.

✍**4.** *Знайти границі* [17]*:*

а) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin^2 x}{x^2}\right)^{(n)}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{x+\ln(1-x)}{x^2}\right)^{(n)}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\left(\dfrac{arctgx}{x}\right)^2\right)^{(n)}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\left(arctg\,x\cdot\ln\left(1+x^2\right)\right)^{(n)}$;

д) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{2x\left(1-x^2\right)}\ln\dfrac{1+x}{1-x}\right)^{(n)}$; е) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)}{\sqrt{1+x^2}}\right)^{(n)}$.

✍**5.** *Обчислити похибку наближеної рівності*

$$\ln(n+1)\approx\ln n+2\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(2k-1)(2k+1)^{2k-1}}$$

і обчислити $\ln 2,\ \ln 3,\ \ln 4,\ \ln 5,\ \ln 10$ *з точністю до* 10^{-4}.

Творче завдання.

Тема: Застосування степеневих рядів до наближених обчислень.

Мета: Систематизувати наближені методи обчислень за допомогою степеневих рядів, зрозуміти їх практичне застосування. Проаналізувати методи, визначити та порівняти похибки при даних обчисленнях. Набути практичних вмінь та навичок при користуванні програмним забезпеченням (Microsoft Office 2003).

Обладнання: ПК з відповідним програмним забезпеченням, навчальні посібники з математичного аналізу, «Робочий зошит студента з математичного аналізу».

Хід заняття

1. Опрацювати лекційний матеріал посібника: Ковтонюк М.М. Лекції з математичного аналізу (Інтегральне числення функції однієї змінної. Ряди). – Вінниця 2009. – 272 с., Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления, том II – М. 1970 г. – 800 с.

2. Пригадати принцип роботи з офісним пакетом Microsoft Office 2003, зокрема Microsoft Word 2003 та Microsoft Excel 2003.

3. Виконати завдання.

1°. Обчислити число $l\cdot e^a$ з точністю до $\Delta_1=10^{-3},\ \Delta_2=10^{-5}$.

$2°$. Обчислити $\cos\beta^0$ з точністю до $\Delta_1 = 10^{-5}$, $\Delta_2 = 10^{-10}$.

Обчислити $\sin\beta^0$ з точністю до $\Delta_1 = 10^{-5}$, $\Delta_2 = 10^{-10}$.

$3°$. Обчислити $\sqrt[b_1]{m_1}$ та $\sqrt[b_2]{m_2}$ з точністю до $\Delta_1 = 10^{-5}$, $\Delta_2 = 10^{-10}$.

$4°$. Обчислити з точністю до $\Delta_1 = 10^{-4}$, $\Delta_2 = 10^{-8}$ визначений інтеграл $\int_0^p \sqrt[q]{1+x^r}\,dx$, де *l*, ***β***, ***m₁***, ***m₂***, ***p***, ***q***, ***r***, ***a***, ***f***, ***c*** – відповідні параметри.

Схема дій

$1°$. Обчислити число $l \cdot e^a$ з точністю до $\Delta_1 = 10^{-3}$, $\Delta_2 = 10^{-5}$.

Приклад: *l=1, a=1.* $l \cdot e^a = 1 \cdot e^1 = e$.

Розв'язання.

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots; \qquad e^x \approx 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!};$$

$$R_n(x) \le \frac{n+2}{(n+1)!(n+1)} < \Delta.$$

Microsoft Excel - e.xls

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	*n*	*n i*	*l*	*a*	**Rn**	**Δ**	**Rn<Δ**	*ai*	$l \cdot e^a$
2	8	1	1	1	0,000003061924	0,00001	ИСТИНА	1,0	2,718055555556
3		2						0,5	
4		3						0,166666666667	
5		4						0,041666666667	
6		5						0,008333333333	
7		6						0,001388888889	
8		7						0,000198412698	
9		8						0,000024801587	

Відповідь. $e \approx 2{,}7180556$.

2°. Обчислити $\cos\beta^0$ з точністю до $\Delta_1 = 10^{-5}$, $\Delta_2 = 10^{-10}$.

$\frac{\pi}{180^o}\cdot\gamma$, де γ – *градусна міра кута,* – формула для переводу градусної міри кута в радіани.

Степеневі ряди:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots + \frac{(-1)^{n+1}x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \ldots ;$$

$$\cos x = x - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots + \frac{(-1)^{n-1}x^{2n-2}}{(2n-2)!} + \ldots .$$

Приклад:

	A	B	C	D	E	F	G	
1	град.→ рад.	n	β	|Rn(x)|	Δ	|Rn(x)|<Δ	n	
2	0,55850536	6	0,55850536	0,00000000000019230527039352	0,0000000001	ИСТИНА	1	-0,155
3							2	0,004
4							3	-0,000
5							4	0,000
6							5	-0,000

	F	G	H	I	J
1	|Rn(x)|<Δ	n	*a i*	cos β	cos β
2	ИСТИНА	1	-0,15596411893079500000	0,848048096154506	0,848048096156426
3		2	0,00405413439897652000		
4		3	-0,00004215329997089330		
5		4	0,00000023480008178521		
6		5	-0,00000000081378639734		

🕮 Практичне заняття №22.

Тема: Тригонометричний ряд Фур'є. Визначення коефіцієнтів ряду методом Ейлера-Фур'є.

✍**1.** *Розкласти в ряд Фур'є функції:*

а) $\sin^2 x$; б) $\cos^3 x$; в) $\sin^4 x$;

г) $\arcsin(\cos x)$; д) $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x)$; е) $\arccos(\cos x)$;

є) $\arcsin(\sin x)$; ж) $\operatorname{sign}(\cos x)$; з) $|\cos x|$;

и) $\left|\cos\frac{x}{2}\right|$; і) $y=\arccos\left(\cos\frac{x}{2}\right)$; ї) $y=\arccos(\sin x)$;

к) $y=\arccos(\cos 3x)$; л) $y=\arcsin\left(\sin\frac{x}{3}\right)$; м) $y=\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x)$.

✍**2.** *Розкласти в ряд Фур'є функцію* $f(x)$*, вказати проміжки, в яких сума ряду Фур'є дорівнює* $f(x)$ *і знайти суму ряду у вказаній точці* x_0*:*

а) $f(x)=x,\ [-\pi;\pi],\ x_0=\pi$;

б) $f(x)=\begin{cases}1, & 0\le x\le\pi,\\ 0, & -\pi\le x<0,\end{cases}\quad x_0=0$;

в) $f(x)=\begin{cases}\frac{\pi}{4}, & 0\le x\le\pi,\\ -\frac{\pi}{4}, & -\pi\le x<0,\end{cases}\quad x_0=0$;

г) $f(x)=|x|,\ [-\pi;\pi],\ x_0=\pi$;

д) $f(x)=\begin{cases}x, & 0\le x\le\pi,\\ 0, & -\pi\le x<0,\end{cases}\quad x_0=-\pi$;

е) $f(x)=\begin{cases}3x, & 0<x\le\pi,\\ -2x, & -\pi<x\le 0,\end{cases}\quad x_0=\pi$.

✍**3.** *Розкласти в ряд Фур'є функцію* $f(x)$ *на вказаному проміжку, довжина проміжку є періодом:*

а) $f(x)=\begin{cases}A, & 0<x<l,\\ \frac{A}{2}, & x=l,\\ 0, & l<x<2l,\end{cases}\qquad x\in(0;\,2l)$;

б) $f(x)=\begin{cases} a, & -\dfrac{\pi}{2}<x<\dfrac{\pi}{2}, \\ b, & \dfrac{\pi}{2}\le x<\dfrac{3\pi}{2}, \end{cases} \quad x\in\left(-\dfrac{\pi}{2};\ \dfrac{3\pi}{2}\right);$

в) $f(x)=x^3,\ \ x\in(-2;\ 2);$ г) $f(x)=e^{ax},\ \ a\ne 0,\ \ x\in(-1;\ 1).$

✍**4.** *Розкласти в ряд Фур'є за косинусами функцію* $f(x)$*:*

а) $f(x)=\begin{cases} 1, & 0\le x\le a, \\ 0, & a<x\le\pi; \end{cases}$ б) $f(x)=\begin{cases} 1-\dfrac{x}{2a}, & 0\le x\le 2a, \\ 0, & 2a<x\le\pi; \end{cases}$

в) $f(x)=\sin x,\ \ x\in[0;\ \pi];$ г) $f(x)=x\cos x,\ \ [0;\ \pi];$

д) $f(x)=\begin{cases} 0, & 0\le x\le\dfrac{l}{2}, \\ 2x-l, & \dfrac{l}{2}<x\le l; \end{cases}$ е) $f(x)=ch\,ax,\ \ x\in[0;\ \pi];$

є) $y=[x-2],\ (0;2);$ ж) $y=|2x-1|,\ (0;1).$

✍**5.** *Розкласти в ряд Фур'є за синусами функцію* $f(x)$*:*

а) $f(x)=\begin{cases} x, & 0\le x<1, \\ 2-x, & 1\le x<2; \end{cases}$ б) $f(x)=\begin{cases} 1, & 0<x<\dfrac{\pi}{2}, \\ 0, & \dfrac{\pi}{2}<x<\pi; \end{cases}$

в) $f(x)=x-\dfrac{x^2}{2},\ \ x\in[0;\ 1];$ г) $f(x)=\cos x,\ \ x\in[0;\ \pi];$

д) $f(x)=x\sin x,\ \ x\in[0;\ \pi];$ е) $f(x)=\operatorname{sh} ax,\ \ x\in[0;\ \pi];$

є) $y=|x-1|,\ (0;1).$

✍**6.** *Розкласти в ряд Фур'є функцію* $f(x)=x^2$ [10]*:*

а) *за косинусами на* $[-\pi;\ \pi];$ б) *за синусами на* $(0;\ \pi).$

Користуючись даними розкладами, знайти суми рядів:

$$S_1=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2},\qquad S_2=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2},\qquad S_3=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}.$$

✍**7.** *Розкласти в ряд Фур'є функцію* $f(x)=\dfrac{\pi-x}{2}$ *на* $(0;\ 2\pi)$*, довести рівності:*

а) $\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{x}{2}=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{\sin 2kx}{2k},\ 0<x<\pi;$ б) $\dfrac{\pi}{4}=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{\sin(2k-1)x}{2k-1},\ 0<x<\pi.$

Знайти суму числового ряду:

$1-\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{5}-\dfrac{1}{7}+\ldots;$ $1+\dfrac{1}{5}-\dfrac{1}{7}-\dfrac{1}{11}+\dfrac{1}{13}+\dfrac{1}{17}-\ldots;$ $1-\dfrac{1}{5}+\dfrac{1}{7}-\dfrac{1}{11}+\dfrac{1}{13}-\ldots.$

🕮 Практичне заняття №23.

Тема: Властивості рядів Фур'є. Інтеграл Фур'є.

✍**1.** *Записати рівність Парсеваля для функції*

$$f(x)=\begin{cases}1, & |x|<\alpha,\\ 0, & \alpha<|x|<\pi\end{cases}$$

і, використовуючи цю рівність знайти суму ряду [1, *с. 674*]*:*

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin^2 n\alpha}{n^2},$ $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos^2 n\alpha}{n^2}.$

✍**2.** *Виходячи із розкладу* $x=2\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{\sin nx}{n},\ |x|<\pi,$ *почленним інтегруванням отримати розклад в тригонометричний ряд Фур'є на* $(-\pi;\pi)$ *функцій* [1 , *с. 674*]*:*

а) $x^2+2x;$ б) $x^3+x^2;$ в) $x^4.$

✍**3.** *Довести формули* [1, *с. 676*]*:*

а) $$\cos x-\frac{\cos 5x}{5}+\frac{\cos 7x}{7}-\frac{\cos 11x}{11}+\ldots=\begin{cases}\dfrac{\pi}{2\sqrt{3}}, & 0\le x<\dfrac{\pi}{3},\\ \dfrac{\pi}{4\sqrt{3}}, & x=\dfrac{\pi}{3},\\ 0, & \dfrac{\pi}{3}<x<\dfrac{2\pi}{3},\\ -\dfrac{\pi}{4\sqrt{3}}, & x=\dfrac{2\pi}{3},\\ -\dfrac{\pi}{2\sqrt{3}}, & \dfrac{2\pi}{3}<x\le\pi.\end{cases}$$

б) $\sin x-\dfrac{\sin 5x}{5^2}+\dfrac{\sin 7x}{7^2}-\dfrac{\sin 11x}{11^2}+...=\begin{cases}\dfrac{\pi}{2\sqrt{3}}x, & 0\le x\le\dfrac{\pi}{3},\\ \dfrac{\pi^2}{6\sqrt{3}}, & \dfrac{\pi}{3}<x<\dfrac{2\pi}{3},\\ \dfrac{\pi}{2\sqrt{3}}(\pi-x), & \dfrac{2\pi}{3}\le x\le\pi.\end{cases}$

✍**4.** [1, *с. 678*] *Обчислити* $\int\limits_a^b f(x)dx$, *розклавши функцію* $f(x)$ *в ряд Фур'є. Використати розклади:*

$$\frac{1-a\cos bx}{1-2a\cos bx+a^2}=1+\sum_{n=1}^{\infty}a^n\cos nbx,\ \ |a|<1;$$

$$\frac{a\sin bx}{1-2a\cos bx+a^2}=\sum_{n=1}^{\infty}a^n\sin nbx,\ \ |a|<1;$$

$$\frac{1-a^2}{1-2a\cos bx+a^2}=1+2\sum_{n=1}^{\infty}a^n\cos nbx,\ \ |a|<1.$$

а) $\int\limits_0^{\pi}\ln\left(1-2a\cos x+a^2\right)dx$ (**Вказівка:** продиференціювати по a, $|a|<1$);

б) $\int\limits_0^{\pi}\cos nx\ln\left(1-2a\cos x+a^2\right)dx,\ \ n\in\mathbb{N}$ (**Вказівка:** продиференціювати по a);

в) $\int\limits_0^{\pi}\dfrac{\ln(\sin x)dx}{1-2a\cos x+a^2}$ (**Вказівка:** розкласти функцію $\dfrac{1}{1-2a\cos x+a^2}$ в ряд, проінтегрувати частинами);

г) $\int\limits_0^{2\pi}\dfrac{\sin mx\,dx}{1-2a\cos x+a^2},\ \ m\in\mathbb{N}$;

д) $\int\limits_{-\pi}^{\pi}\dfrac{1-a^2}{1-2a\cos x+a^2}dx$;

е) $\int\limits_0^{\pi}\dfrac{1-a\cos x}{1-2a\cos x+a^2}dx$;

є) $\int\limits_0^{\pi}\dfrac{xdx}{1-2a\cos 2x+a^2}$;

ж) $\int\limits_0^{\pi}\dfrac{\ln(\sin x)dx}{1-a\cos x},\ \ |a|<1$ (**Вказівка:** покласти $a=\sin\alpha$, привести знаменник до вигляду $1-2\lambda\cos x+\lambda^2,\ \ \lambda=tg\dfrac{\alpha}{2}$);

з) $\displaystyle\int_0^{\pi}\frac{\cos mx\,dx}{1-a\cos x},\ \ m\in\mathbb{N},\ \ |a|<1;$ и) $\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{\sin mx\,dx}{1-a\cos x},\ \ ,\ \ m\in\mathbb{N},\ \ |a|<1.$

✍**5.** [1, *с.681*] *Знайти інтеграл Фур'є* $F(x)$ *функції* $f(x)$. *Побудувати графік функції* $F(x)$:

а) $f(x)=\begin{cases}1, & |x|\le 1,\\ 0, & |x|>1;\end{cases}$ б) $f(x)=\begin{cases}\operatorname{sign}x, & |x|\le 1,\\ 0, & |x|>1;\end{cases}$

в) $f(x)=\begin{cases}e^{-\beta x}, & x\ge 0,\\ 0, & x<0;\end{cases}$ г) $f(x)=\dfrac{1}{a^2+x^2},\ \ a>0;$

д) $f(x)=\dfrac{x}{a^2+x^2},\ \ a>0;$ е) $f(x)=\begin{cases}\sin x, & |x|\le\pi,\\ 0, & |x|>\pi;\end{cases}$

є) $f(x)=\begin{cases}\cos x, & |x|\le\dfrac{\pi}{2},\\ 0, & |x|>\dfrac{\pi}{2};\end{cases}$ ж) $f(x)=e^{-\alpha|x|},\ \ \alpha>0;$

з) $f(x)=e^{-\alpha|x|}\cos\beta x,\ \ \alpha>0;$ и) $f(x)=e^{-\alpha|x|}\sin\beta x,\ \ \alpha>0;$

і) $f(x)=e^{-x^2};$ ї) $f(x)=xe^{-x^2}.$

🕮 Практичне заняття №24.
Тема: Перетворення Фур'є. Застосування рядів Фур'є.

✍**1.** *Знайти перетворення Фур'є функції* $f(x)$ [1 , *с. 681*]:

а) $f(x)=\begin{cases}1, & |x|\le 1,\\ 0, & |x|>1;\end{cases}$ б) $f(x)=\begin{cases}x, & |x|\le 1,\\ 0, & |x|>1;\end{cases}$

в) $f(x)=\begin{cases}x^2, & |x|\le 1,\\ 1, & 1<|x|\le 2,\\ 0, & |x|>2;\end{cases}$ г) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{2}, & |x|\le 1,\\ \dfrac{1}{2}, & 1<|x|\le 2,\\ 0, & |x|>2;\end{cases}$

д) $f(x)=e^{-\alpha^2x^2};$ е) $f(x)=xe^{-x^2};$

є) $f(x)=e^{-|x|}\cos\omega x;$ ж) $f(x)=e^{-|x|}\sin\omega x;$

з) $f(x)=\dfrac{x}{\left(1+x^2\right)^2}$; и) $f(x)=\dfrac{\sin x}{1+x^4}$.

✍**2.** *Знайти синус-перетворення Фур'є функції* $f(x)$ [1, *с. 682*]*:*

а) $f(x)=\begin{cases}4x-1, & 0\le x\le \dfrac{1}{4},\\ 0, & x>\dfrac{1}{4};\end{cases}$ б) $f(x)=\begin{cases}1, & 0\le x\le a,\\ \dfrac{1}{2}, & x=a,\\ 0, & x>a;\end{cases}$

в) $f(x)=5^{-x}$; г) $f(x)=x^{-\alpha},\ 0<\alpha<1$;

д) $f(x)=\dfrac{e^{-x}}{x}$; е) $f(x)=xe^{-\frac{x^2}{2}}$.

✍**3.** *Знайти косинус-перетворення Фур'є функції* $f(x)$ [1, *с. 683*]*:*

а) $f(x)=\begin{cases}2x-3, & 0\le x\le \dfrac{3}{2},\\ 0, & x>\dfrac{3}{2};\end{cases}$ б) $f(x)=\begin{cases}\cos x, & 0\le x\le \pi,\\ 0, & x>\pi;\end{cases}$

в) $f(x)=\begin{cases}\sin x, & 0\le x\le \pi,\\ 0, & x>\pi;\end{cases}$ г) $f(x)=2^{-x}$;

д) $f(x)=\dfrac{1-e^{-\beta x}}{x},\ \beta\ge 0$; е) $f(x)=e^{-x^2}$;

є) $f(x)=e^{-\frac{x^2}{2}}$; ж) $f(x)=\dfrac{1}{1+x^4}$.

⌛ Контрольна робота №2.

✍***1. Знайти область збіжності функціональних рядів:***

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln^n x$**;**	**16.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sqrt{\dfrac{n+2}{2n}}\left(\dfrac{x^2-5x+6}{x^2+5x+6}\right)^n$ **;**
2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^{n+1}}{\left(1-x^n\right)\left(1-x^{n+1}\right)}$**;**	**17.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\left(\dfrac{2x}{1+x^2}\right)^n$**;**
3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(x-2)^{2n-1}$**;**	**18.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{x^{2n-2}}{(2n-1)!}$**;**
4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{(2x)^{2n}}{(2n)!}$**;**	

5. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+x^2}$**;**	**19.** $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(2x)^n}{n}$ **;**
6. $\sum_{n=1}^{\infty}x^n tg\,\frac{x}{2^n}$**;**	**20.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{x^{2n}+2}$**;**
7. $\sum_{n=1}^{\infty}10^{nx}$ **;**	**21.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{1-x^n}$**;**
8. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{(1+2x)(1+3x)...(1+nx)}$**;**	**22.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2x-1)^{2n}}$**;**
9. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(3x+1)^n}{2^n\sqrt{n}}$**;**	**23.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\sin n^2}{n+\sqrt{x}}$ **;**
10. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x(x+n)}{n}\right)^n$ **;**	**24.** $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{nx}{1+x}\right)^n$ **;**
11. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x}{2^n}$**;**	**25.** $\sum_{n=1}^{\infty}e^{-nx}$ **;**
12. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x}{(1+(n-1)x)(1+nx)}$**;**	**26.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2n+1}\ln^n\left(x^2+2x\right)$**;**
13. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(x+n-1)(x+n)}$**;**	**27.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{x^2+\sqrt{n}}$**;**
14. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{\lvert x\rvert}{x}\right)^n$ **;**	**28.** $\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{n\pi x}{3}$**;**
15. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-x)^{n-1}}{n!}$**;**	**29.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{2n-1}}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^n$ **;**
	30. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{2}\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)\right)^n$ **.**

✍2. Знайти радіус й інтервал збіжності степеневого ряду:

1. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(x-4)^{2n-1}}{2n-1}$**;**	**16.** $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!}$**;**
2. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^{-\sqrt{n}}}{\sqrt{n^2+n+1}}(x-1)^n$**;**	**17.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{4n-3}}{4n-3}$**;**
3. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+1)^n}{n\cdot 2^{n-1}}$**;**	**18.** $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+arctg\,\frac{n+1}{n^2}\right)^{n^2}(x+2)^n$**;**

4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n x^n}{n^2}$**;**	**19.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(2x+1)^n}{3n-2}$**;**
5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n(n+1)}x^{n+1}$**;**	**20.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(x-2)^{2n}}{n\cdot 4^n}$**;**
6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(2x+1)^{3n-2}}{3n-2}$**;**	**21.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}$**;**
7. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)^n}{2^{n-1}n^n}(x+1)^n$**;**	**22.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n\sqrt{n}}$**;**
8. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(\frac{nx}{e}\right)^n$**;**	**23.** $\sum\limits_{n=0}^{\infty}2^n(n^2+2)(x-2)^n$**;**
9. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}3^n(x+1)^n$**;**	**24.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(3x-1)^n}{n(n+3)}$**;**
10. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n}{n^2}x^{4n}$**;**	**25.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}3nx^{3n-1}$**;**
11. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^{3n-2}}{2^{3n}(n+1)\ln(n+1)}$**;**	**26.** $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n(4x)^n$**;**
12. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{2^{\sqrt{n}}}$**;**	**27.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{\sqrt{n}+1}$**;**
13. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n!}\left(\frac{n}{e}\right)^n(x-1)^n$**;**	**28.** $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(n+1)^2}{3^n}x^{5n}$**;**
14. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^{\sqrt{n}}}{\sqrt{n^2+1}}x^n$**;**	**29.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\ln\cos\frac{1}{3^n}\right)x^n$**;**
15. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\frac{n^2+3}{n^2+5}\right)^{n^3}(x-1)^n$**;**	**30.** $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\sqrt{n+1}(x+2)^n$**.**

✍3. Розвинути функцію у ряд Маклорена:

1. $f(x)=\frac{1}{4}\ln\frac{1+x}{1-x}+\frac{1}{2}\mathrm{arctg}\,x$**;**	**16.** $f(x)=-\ln\cos x$**;**
	17. $f(x)=\ln(10+x)$**;**
2. $f(x)=\ln(12-x-x^2)$**;**	**18.** $f(x)=(1+x)^x$**;**
3. $f(x)=e^{-x^2}$**;**	**19.** $f(x)=\sin 3x\sin 5x$**;**
4. $f(x)=(1+x)e^{-x}$**;**	**20.** $f(x)=(1+x^2)\mathrm{arctg}\,x$**;**

5. $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt[3]{1+x^3}}$;	**21.** $f(x)=\ln\dfrac{2x+1}{x^2-4x+4}$;
6. $f(x)=x^2\arccos 2x$;	**22.** $f(x)=\dfrac{x}{x+4}$;
7. $f(x)=\ln\left((2+x)^{2+x}\right)+\ln\left((2-x)^{2-x}\right)$;	**23.** $f(x)=e^{\cos x}$;
8. $f(x)=\sqrt[3]{8-x^3}$;	**24.** $f(x)=x^2\ln\left(4+x^2\right)$;
9. $f(x)=\dfrac{1}{2x^2+5x-3}$;	**25.** $f(x)=\sqrt[3]{8-x^3}$;
10. $f(x)=x\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)-\sqrt{1+x^2}$;	**26.** $f(x)=\ln\left(x^3+\sqrt{64+x^6}\right)$;
11. $f(x)=x\ln(1+x)$;	**27.** $f(x)=x\ln\left(x^2+\sqrt{9+x^4}\right)$;
12. $f(x)=(x-tg\,x)\cos x$;	**28.** $f(x)=\dfrac{1}{x^3+x^2-4x-4}$;
13. $f(x)=(1+x)^x$;	**29.** $f(x)=\dfrac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}$;
14. $f(x)=\dfrac{x}{2x^4+5x^2+2}$;	**30.** $f(x)=x\arccos x-\sqrt{1-x^2}$.
15. $f(x)=x\cos^3 2x$;	

✍ ***4. Розвинути функцію в ряд Фур'є:***

1. $f(x)=\begin{cases}0, & -\pi\le x<0,\\ x-1, & 0\le x\le\pi;\end{cases}$	**16.** $f(x)=\begin{cases}3x+2, & -\pi\le x\le 0,\\ 0, & 0<x\le\pi;\end{cases}$
2. $f(x)=\begin{cases}2x-1, & -\pi\le x\le 0,\\ 0, & 0<x\le\pi;\end{cases}$	**17.** $f(x)=\begin{cases}0, & -\pi\le x<0,\\ 4-2x, & 0\le x\le\pi;\end{cases}$
3. $f(x)=\begin{cases}0, & -\pi\le x<0,\\ x+2, & 0\le x\le\pi;\end{cases}$	**18.** $f(x)=\begin{cases}x+\pi/2, & -\pi\le x\le 0,\\ 0, & 0<x\le\pi;\end{cases}$
4. $f(x)=\begin{cases}-x+\frac{1}{2}, & -\pi\le x\le 0,\\ 0, & 0<x\le\pi;\end{cases}$	**19.** $f(x)=\begin{cases}0, & -\pi\le x<0,\\ 6x-5, & 0\le x\le\pi;\end{cases}$
5. $f(x)=\begin{cases}0, & -\pi\le x<0,\\ x/2+1, & 0\le x\le\pi;\end{cases}$	**20.** $f(x)=\begin{cases}7-3x, & -\pi\le x\le 0,\\ 0, & 0<x\le\pi;\end{cases}$
6. $f(x)=\begin{cases}2x+3, & -\pi\le x\le 0,\\ 0, & 0<x\le\pi;\end{cases}$	**21.** $f(x)=\begin{cases}0, & -\pi\le x<0,\\ \dfrac{\pi}{4}-\dfrac{x}{2}, & 0\le x\le\pi;\end{cases}$
7. $f(x)=\begin{cases}0, & -\pi\le x<0,\\ 3-x, & 0\le x\le\pi;\end{cases}$	**22.** $f(x)=\begin{cases}6x-2, & -\pi\le x\le 0,\\ 0, & 0<x\le\pi;\end{cases}$

8. $f(x)=\begin{cases} x-2, & -\pi\le x\le 0,\\ 0, & 0<x\le\pi; \end{cases}$	**23.** $f(x)=\begin{cases} 0, & -\pi\le x<0,\\ 4x-9, & 0\le x\le\pi; \end{cases}$
9. $f(x)=\begin{cases} 0, & -\pi\le x<0,\\ 4x-3, & 0\le x\le\pi; \end{cases}$	**24.** $f(x)=\begin{cases} x/3-3, & -\pi\le x\le 0,\\ 0, & 0<x\le\pi; \end{cases}$
10. $f(x)=\begin{cases} 5-x, & -\pi\le x\le 0,\\ 0, & 0<x\le\pi; \end{cases}$	**25.** $f(x)=\begin{cases} 0, & -\pi\le x<0,\\ 10x-3, & 0\le x\le\pi; \end{cases}$
11. $f(x)=\begin{cases} 0, & -\pi\le x<0,\\ 3x-1, & 0\le x\le\pi; \end{cases}$	**26.** $f(x)=\begin{cases} 1-x/4, & -\pi\le x\le 0,\\ 0, & 0<x\le\pi; \end{cases}$
12. $f(x)=\begin{cases} 3-2x, & -\pi\le x\le 0,\\ 0, & 0<x\le\pi; \end{cases}$	**27.** $f(x)=\begin{cases} 0, & -\pi\le x<0,\\ x/5-2, & 0\le x\le\pi; \end{cases}$
13. $f(x)=\begin{cases} 0, & -\pi\le x<0,\\ (\pi-x)/2, & 0\le x\le\pi; \end{cases}$	**28.** $f(x)=\begin{cases} 2x-11, & -\pi\le x\le 0,\\ 0, & 0<x\le\pi; \end{cases}$
14. $f(x)=\begin{cases} 5x+1, & -\pi\le x\le 0,\\ 0, & 0<x\le\pi; \end{cases}$	**29.** $f(x)=\begin{cases} 0, & -\pi\le x<0,\\ 3-8x, & 0\le x\le\pi; \end{cases}$
15. $f(x)=\begin{cases} 0, & -\pi\le x<0,\\ 1-4x, & 0\le x\le\pi; \end{cases}$	**30.** $f(x)=\begin{cases} 7x-1, & -\pi\le x\le 0,\\ 0, & 0<x\le\pi. \end{cases}$

✍**5.** ***Розвинути в ряд Фур'є функцію $f(x)$, задану в інтервалі $(0;\pi)$, доповнивши її парним і непарним виглядом. Побудувати графіки для кожного продовження:***

1. $f(x)=e^x$;	**11.** $f(x)=4^{x/3}$;	**21.** $f(x)=e^{-3x}$;
2. $f(x)=x^2$;	**12.** $f(x)=ch\dfrac{x}{2}$;	**22.** $f(x)=x^2+1$;
3. $f(x)=2^x$;	**13.** $f(x)=e^{4x}$;	**23.** $f(x)=7^{-x/7}$;
4. $f(x)=chx$;	**14.** $f(x)=(x+1)^2$;	**24.** $f(x)=sh\dfrac{x}{5}$;
5. $f(x)=e^{-x}$;	**15.** $f(x)=5^{-x}$;	**25.** $f(x)=e^{-2x/3}$;
6. $f(x)=(x-1)^2$;	**16.** $f(x)=sh3x$;	**26.** $f(x)=(x-\pi)^2$;
7. $f(x)=3^{-x/2}$;	**17.** $f(x)=e^{-x/4}$;	**27.** $f(x)=10^{-x}$;
8. $f(x)=shx$;	**18.** $f(x)=(2x-1)^2$;	**28.** $f(x)=ch\dfrac{x}{\pi}$;
9. $f(x)=e^{2x}$;	**19.** $f(x)=6^{x/4}$;	**29.** $f(x)=e^{4x/3}$;
10. $f(x)=(x-2)^2$;	**20.** $f(x)=ch4x$;	**30.** $f(x)=(x-5)^2$.

✍**6. *Розвинути в ряд Фур'є на вказаному інтервалі періодичну функцію* $f\left(x\right)$ *з періодом* $2l$:**

1. $f\left(x\right)=\lvert x\rvert$, $-1<x<1$, $l=1$.	**18.** $f\left(x\right)=3-\lvert x\rvert$, $-5<x<5$, $l=5$.
2. $f\left(x\right)=2x$, $-1<x<1$, $l=1$.	**19.** $f\left(x\right)=\begin{cases}-x, & -4<x<0\\ 1, & x=0\\ 2, & 0<x<4\end{cases}$, $l=4$.
3. $f\left(x\right)=e^{x}$, $-2<x<2$, $l=2$.	
4. $f\left(x\right)=\lvert x\rvert-5$, $-2<x<2$.	**20.** $f\left(x\right)=1+x$, $-1<x<1$, $l=1$.
5. $f\left(x\right)=\begin{cases}1, & -1\le x<0\\ x, & 0<x\le 1\end{cases}$, $l=1$.	**21.** $f\left(x\right)=\begin{cases}-1, & -2<x<0,\\ -1/2, & x=0,\\ x/2, & 0<x<2,\end{cases}$, $l=2$.
6. $f\left(x\right)=x$, $1<x<3$, $l=1$.	
7. $f\left(x\right)=\begin{cases}0, & -2\le x<0\\ x, & 0<x\le 1\\ 2-x & 1\le x\le 2\end{cases}$, $l=2$.	**22.** $f\left(x\right)=2x+2$, $-1<x<3$, $l=2$.
8. $f\left(x\right)=10-x$, $5<x<15$, $l=5$.	**23.** $f\left(x\right)=\begin{cases}3, & -3<x<0\\ 3/2, & x=0\\ -x, & 0<x<3\end{cases}$, $l=3$.
9. $f\left(x\right)=\begin{cases}1, & -1\le x<0\\ 1/2, & x=0\\ x, & 0<x\le 1\end{cases}$, $l=1$.	**24.** $f\left(x\right)=1-\lvert x\rvert$, $-3<x<3$, $l=3$.
10. $f\left(x\right)=5x-1$, $-5<x<5$, $l=5$.	**25.** $f\left(x\right)=\begin{cases}-2, & -4<x<0\\ -1/2, & x=0\\ 1+x, & 0<x<4\end{cases}$, $l=4$.
11. $f\left(x\right)=\begin{cases}0, & -3<x\le 0\\ x, & 0<x<3\end{cases}$, $l=3$.	
12. $f\left(x\right)=3-x$, $-2<x<2$, $l=2$.	**26.** $f\left(x\right)=4x-3$, $-5<x<5$, $l=5$.
13. $f\left(x\right)=\begin{cases}1, & 0<x<1\\ -1, & 1<x<2\end{cases}$, $l=1$.	**27.** $f\left(x\right)=\begin{cases}x+2, & -2<x<-1,\\ 1, & -1\le x\le 1,\\ 2-x, & 1<x<2,\end{cases}$ $l=2$
14. $f\left(x\right)=\begin{cases}0, & -2<x<0\\ 2, & 0<x<2\end{cases}$, $l=2$	**28.** $f\left(x\right)=\begin{cases}-1/2, & -6<x<0,\\ 1, & 0<x<6,\end{cases}$ $l=6$.
15. $f\left(x\right)=\begin{cases}x, & 0\le x\le 1\\ 1 & 1<x<2\\ 3-x, & 2\le x\le 3\end{cases}$, $l=3$.	**29.** $f\left(x\right)=\begin{cases}-2x, & -2<x<0\\ 2, & x=0\\ 4, & 0<x<2\end{cases}$, $l=2$.

16. $f(x)=2x-3$, $-3<x<3, l=3$. **17.** $f(x)=\begin{cases}1, & 0<x<3/2\\ -1, & 3/2<x<3\end{cases}$, $l=3$.	**30.** $f(x)=\lvert x\rvert-3$, $-4<x<4$, $l=4$.

Список рекомендованої літератури

1. Виноградова И.А., Олехник С.Н., Садовничий В.А. Задачи и упражнения по математическому анализу. Кн.2. – М.:Высшая школа, 2002. – 712 с.

2. Виленкин Н.Я., Бохан К.А., Марон И.А. и др. Задачник по курсу математического анализа. Ч.1. – М.: Просвещение.

3. Виленкин Н.Я., Бохан К.А., Марон И.А. и др. Задачник по курсу математического анализа. Ч.2 – М.: Просвещение, 1971.

4. Дороговцев А.Я. Математический анализ. Сборник задач. – К.:Вища школа, 1987.

5. Запорожец Г.И. Руководство к решению задач по математическому анализу. – М.: Высшая школа, 1966. – 460 с.

6. Зорич В.А. Математический анализ. Ч.1. – М.: Наука, 1981.

7. Зорич В.А. Математический анализ. Ч.2 – М.: Наука, 1984.

8. Ковтонюк М.М. Лекції з математичного аналізу. Інтегральне числення функції однієї змінної. Ряди. Посібник для студентів фізико-математичних факультетів педагогічних університетів. – Вінниця: ТОВ «Фірма «Планер», 2013. – 289 с. (Гриф МОНМС України, лист №1/11–15245 від 01.10.2012 р.)

9. Ковтонюк М.М. Практикум з інтегрального числення функції однієї змінної. Посібник для студентів фізико-математичних факультетів педагогічних ВНЗ /М.М.Ковтонюк, В.А.Войтовик. – Вінниця: ТОВ «Фірма «Планер», 2015. – 277 с.

10. Кудрявцев Л.Д. Курс математического анализа. Т.1. – М.: Высшая школа, 1988.

11. Кудрявцев Л.Д. Курс математического анализа. Т.2. – М.: Высшая школа, 1989.

12. Кудрявцев Л.Д., Кутасов А.Д., Чехлов А.И., Шабунин М.И. Сборник задач по математическому анализу. Интегралы, ряды. – М.: Наука, 1986. – 528 с.

13. Кузнецов Л.А. Сборник заданий по высшей математике (типовые расчеты). – М.: Высшая школа, 1983. – 175 с.

14. Лащенов К.В. Задачник–практикум по математическому аналізу. –М.: Просвещение, 1963. – 159 с.

15. Ляшко И.И., Боярчук А.К., Гай Я.Г., Головач Г.П. Справочное пособие по математическому анализу. Ч.1. – К.: Высшая школа.

16. Ляшко И.И., Боярчук А.К., Гай Я.Г., Головач Г.П. Справочное пособие по математическому анализу. Ч.2. – К.: Высшая школа, 1979.

17. Ляшко И.И., Боярчук А.К., Александрович И.Н., Молодцов А.И., Рублев Б.В. Сборник задач и упражнений по математическому анализу. Ч.1. – М.: Изд.дом «Вильямс», 2001. –432 с.

18. Рябушко А.П., Бархатов В.В., Державец В.В., Юруть И.Е. Сборник индивидуальных заданий по высшей математике. Часть 2. – Минск: Вышейшая школа, 1990. – 360 с.

19. Шунда Н.М., Томусяк А.А. Практикум з математичного аналізу. Вступ до аналізу. Інтегральне числення. Ряди. – К.: Вища школа, 1995.

20. Вавилов В.В., Мельников И.И., Олейник С.Н, Паниченко П.И. Задачи по математике. Начала анализа. – М.:Наука, 1990. – 608 с.

Навчальне видання

Ковтонюк Мар'яна Михайлівна
Бак Сергій Миколайович

Комп'ютерна верстка та набір Бака С.М., Ковтонюк М.М.

РОБОЧИЙ ЗОШИТ СТУДЕНТА
з математичного аналізу, ІІІ семестр (інтегральне числення функції однієї змінної. Ряди)

21000 м.Вінниця, вул. Острозького, 32.