Томусяк А.А.
Ковтонюк М.М.

МАТЕМАТИКА

НАВЧАЛЬНО-ДОСЛІДНА РОБОТА СТУДЕНТІВ

Методичні рекомендації для студентів
вищих навчальних закладів

Вінниця 2013

Рецензенти:
С.М. Бак, кандидат фізико-матем. наук, доцент
Л.А. Вотякова, кандидат фізико-матем.наук, ст. викладач

В пропонованих методичних рекомендаціях подається дидактичний матеріал, призначений для засвоєння чергового виду діяльності: наділення множини певною структурою і вивчення властивостей такої математичної структури. Як результат – студенти отримують інструментарій для розв'язування геометричних задач на площині – повноцінний координатний метод.

Їх можна використовувати при вивченні курсів "Основи наукових досліджень в математиці","Геометрії", при написанні математичних творів та курсових робіт, а також на заняттях математичного гуртка.

Вступні зауваження.

Ознакою математичної освіти є уміння в рамках певної математичної структури ставити задачі і їх розв'язувати, аналізувати отримані результати в плані постановки нових задач, інакше вести творчий пошук.

Автори методичних рекомендацій пропонують як об'єкт дослідження множину всіх функцій виду $f(x) = a + bx^{\alpha}$, де $a, b \in R$, $\alpha > 0$, визначених на відрізку $[0;1]$. В цій множині у стандартний спосіб означено додавання функцій та множення їх на число, а також скалярний добуток двох функцій, точніше множина наділяється структурою евклідового простору розмірності 2.

Вивчення геометричних властивостей такого простору дає можливість отримати змістовні результати, зв'язані з метричними співвідношеннями на координатній площині (система координат декартова).

Як засіб прогнозу використовується перенесення результатів, при формулюванні яких істотну роль відіграла прямокутність декартової системи координат.

§1. Базисна множина.

Нехай маємо множину

$\mathcal{P}_{2,\alpha} = \{a + bx^{\alpha}\}|a, b \in \mathbb{R}, \alpha > 0, 0 \leq x \leq 1\}$

Означимо операції:

1° $\forall\ a_1 + b_1 x^{\alpha}, a_2 + b_2 x^{\alpha} \in \mathcal{P}_{2,\alpha}$:

$$(a_1 + b_1 x^{\alpha}) + (a_2 + b_2 x^{\alpha}) := (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)\, x^{\alpha}, \tag{1.1}$$

2° $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall a + bx^{\alpha} \in \mathcal{P}_{2,\alpha}$:

$$\lambda\,(a + bx^{\alpha}) := \lambda a + \lambda b x^{\alpha}, \tag{1.2}$$

3° $\forall a_1 + b_1 x^{\alpha}, a_2 + b_2 x^{\alpha} \in \mathcal{P}_{2,\alpha}$

$$(a_1 + b_1 x^{\alpha}, a_2 + b_2 x^{\alpha}) := \int\limits_0^1 (a_1 + b_1 x^{\alpha})\,(a_2 + b_2 x^{\alpha})\, dx =$$
$$= a_1 a_2 + \frac{a_1 b_2 + a_2 b_1}{\alpha + 1} + \frac{b_1 b_2}{2\alpha + 1} \tag{1.3}$$

Неважко переконатися, що стосовно операції додавання (1.1) та операції множення на скаляр (1.2) множина $\mathcal{P}_{2,\alpha}$ є лінійним простором над полем дійсних чисел (Доведіть!).

Для операції (1.3) маємо

а) $\forall a_1 + b_1 x^{\alpha}, a_2 + b_2 x^{\alpha} \in \mathcal{P}_{2,\alpha}$:

$$(a_1 + b_1 x^{\alpha}, a_2 + b_2 x^{\alpha}) = \int\limits_0^1 (a_1 + b_1 x^{\alpha})\,(a_2 + b_2 x^{\alpha})\, dx =$$
$$= (a_2 + b_2 x^{\alpha}, a_1 + b_1 x^{\alpha})\,,$$

б) $\forall a_1+b_1x^\alpha, a_2+b_2x^\alpha, a_3+b_3x^\alpha \in \mathcal{P}_{2,\alpha}$

$$(((a_1+b_1x^\alpha)+(a_2+b_2x^\alpha)), a_3+b_3x^\alpha) = \int\limits_0^1 (a_1+b_1x^\alpha+a_2+b_2x^\alpha)\times$$

$$\times(a_3+b_3x^\alpha)\,dx = \int\limits_0^1 (a_1+b_1x^\alpha)(a_3+b_3x^\alpha)\,dx + \int\limits_0^1 (a_2+b_2x^\alpha)\times$$

$$\times(a_3+b_3x^\alpha)\,dx = (a_1+b_1x^\alpha, a_3+b_3x^\alpha)+(a_2+b_2x^\alpha, a_3+b_3x^\alpha);$$

в) $\forall\lambda\in\mathbb{R}, \forall a_1+b_1x^\alpha, a_2+b_2x^\alpha \in \mathcal{P}_{2,\alpha}:$

$$(\lambda(a_1+b_1x^\alpha), a_2+b_2x^\alpha) = \lambda(a_1+b_1x^\alpha, a_2+b_2x^\alpha);$$

г) $\forall a+bx^\alpha \in \mathcal{P}_{2,\alpha} \;:\; (a+bx^\alpha, a+bx^\alpha)\geq 0,$
причому $(a+bx^\alpha, a+bx^\alpha)=0 \Leftrightarrow a=b=0,$
бо $(a+bx^\alpha, a+bx) = a^2+\dfrac{2ab}{\alpha+1}+\dfrac{b^2}{2\alpha+1}$

Отже, $\mathcal{P}_{2,\alpha}$ є лінійним простором з скалярним добутком.

Скалярний добуток породжує в просторі $\mathcal{P}_{2,\alpha}$ норму (довжину) елемента [2]

$$||a+bx^\alpha|| = \sqrt{(a+bx^\alpha, a+bx^\alpha)} = \sqrt{a^2+\frac{2ab}{\alpha+1}+\frac{b^2}{2\alpha+1}} \quad (1.4)$$

яка, в свою чергу, породжує відстань між елементами простору $\mathcal{P}_{2,\alpha}$:

$$d(a_1+b_1x^\alpha, a_2+b_2x^\alpha) = ||a_1+b_1x^\alpha-a_2-b_2x^\alpha|| =$$

$$= \sqrt{(a_1-a_2)^2+\frac{2(a_1-a_2)(b_1-b_2)}{\alpha+1}+\frac{(b_1-b_2)^2}{2\alpha+1}} \quad (1.5)$$

Ми будемо вивчати алгебраїчні, топологічні та геометричні властивості простору $\mathcal{P}_{2,\alpha}$

Завдання для самостійного опрацювання

1.1. Перевірити, що операції (1.1) та (1.2) задовольняють аксіоми лінійного (векторного) простору:

1° $\forall p_1, p_2, p_3 \in \mathcal{P}_{2,\alpha}: \quad (p_1 + p_2) + p_3 = p_1 + (p_2 + p_3)\,;$

2° $\forall p_1, p_2 \in \mathcal{P}_{2,\alpha}: \quad p_1 + p_2 = p_2 + p_1;$

3° $\forall p \in \mathcal{P}_{2,\alpha}: \quad p + 0 = 0 + p = p$, де $0 = 0 + 0x^\alpha$;

4° $\forall p \in \mathcal{P}_{2,\alpha}: \quad p + (-p) = (-p) + p = 0$, де $-p = -a - bx^\alpha$, коли $p = a + bx^\alpha$;

5° $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall p_1, p_2 \in \mathcal{P}_{2,\alpha}: \quad \lambda\,(p_1 + p_2) = \lambda p_1 + \lambda p_2;$

6° $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R},\ \ \forall p \in \mathcal{P}_{2,\alpha}: \quad (\lambda + \mu)\,p = \lambda p + \mu p;$

7° $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R},\ \ \forall p \in \mathcal{P}_{2,\alpha}: \quad (\lambda\mu)\,p = \lambda\,(\mu p)\,;$

8° $\forall p \in \mathcal{P}_{2,\alpha}: \quad 1 \cdot p = p.$

1.2. Перевірити, що функція (1.4)(норма елемента), визначена в просторі $\mathcal{P}_{2,\alpha}$, задовольняє аксіоми нормованого простору:

1° $\forall p \in \mathcal{P}_{2,\alpha}: \quad ||p|| \geq 0, ||p|| = 0 \Leftrightarrow p = 0;$

2° $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \forall p \in \mathcal{P}_{2,\alpha}: \quad ||\lambda p|| = |\lambda| \cdot ||p||;$

3° $\forall p_1, p_2 \in \mathcal{P}_{2,\alpha}: \quad ||p_1 + p_2|| \leq ||p_1|| + ||p_2||.$

1.3. Перевірити, що функція (1.5)(відстань), визначена на $\mathcal{P}_{2,\alpha} \times \mathcal{P}_{2,\alpha}$, задовольняє аксіоми метричного простору:

1° $\forall p_1, p_2 \in \mathcal{P}_{2,\alpha}: \quad d\,(p_1, p_2) \geq 0,\ d\,(p_1, p_2) = 0 \Leftrightarrow p_1 = p_2;$

2° $\forall p_1, p_2 \in \mathcal{P}_{2,\alpha}: \quad d\,(p_1, p_2) = d\,(p_2, p_1)\,;$

3° $\forall p_1, p_2, p_3 \in \mathcal{P}_{2,\alpha}: \quad d\,(p_1, p_2) \leq d\,(p_1, p_3) + d\,(p_2, p_3)\,.$

1.4. Простір X називають квазіметричним з квазівідстанню $q\,(x, y)$, коли $q\,(x, y)$– функція, визначена на $X \times X$ із значенням в $\mathbb{R}$, яка задовольняє такі властивості (аксіоми):

1° $\forall x \in X: \quad q\,(x, x) = 0,$

2° $\forall x, y, z \in X: \quad g\,(x, y) \leq q\,(x, z) + q\,(y, z)\,.$

Довести, що кожен метричний простір є квазіметричним, але не кожний квазіметричний простір є метричним.

Вказівка. В нерівність трикутника покладено $z = x$, отримаємо $q\,(x, y) \leq q\,(y, x)$, а потім $z = y$, отримаємо $q\left(y,x\right) \leq q\left(x,y\right)$.

1.5. Нехай
$P_{a+b} := \lim\limits_{\alpha\to 0}\left(a+bx^{\alpha}\right)$ на $[0;1]$,
$P_{a+b} := \lim\limits_{\alpha\to +\infty}\left(a+bx^{\alpha}\right)$ на $[0;1]$,
$q_0\left(P_{a_1+b_1}, P_{a_2+b_2}\right) := \lim\limits_{\alpha\to 0} d\left(a_1+b_1x^{\alpha}, a_2+b_2x^{\alpha}\right) =$
$= \left|\,(a_1-a_2)+(b_1-b_2)\,\right|$,
$q_{\infty}\left(P_{a_1,b_1}, P_{a_2,b_2}\right) := \lim\limits_{\alpha\to +\infty} d\left(a_1+b_1x^{\alpha}, a_2+b_2x^{\alpha}\right) = |a_1-a_2|$.

Довести, що простори $(\mathcal{P}_{2,0}, q_0)$ та $(\mathcal{P}_{2,\infty,q_{\infty}})$, де

$$\mathcal{P}_{2,0} = \{P_{a+b} | a,b\in\mathbb{R}\},$$

$$\mathcal{P}_{2,\infty} = \{P_{a+b} | a,b\in\mathbb{R}\},$$

є екваміметричні, але не є метричними.

§2. Повнота простору $\mathcal{P}_{2,\alpha}$

Будемо в подальшому елементи з $\mathcal{P}_{2,\alpha}$ позначати $p\left(x\right) = a+bx$, зокрема послідовність $\left(p_n\left(x\right)\right)$ є послідовність таких елементів $p_1\left(x\right) = a_1+b_1x,\ \ p_2\left(x\right) = a_2+b_2x, ..., p_n\left(x\right) = a_n+b_nx, \ldots$.

Разом з послідовністю $\left(p_n\left(x\right)\right)$ будемо розглядати дві числові послідовності (a_n) та (b_n).

Зв'яжемо збіжність та фундаментальність послідовності $\left(p_n\left(x\right)\right)$ із збіжністю та фундаментальністю послідовностей (a_n) і (b_n).

Нагадаємо, що послідовність $\left(p_n\left(x\right)\right)$ елементів з $\mathcal{P}_{2,\alpha}$ є збіжною до елемента $p\left(x\right)$, якщо $\forall\varepsilon>0$ можна вказати n_0 такий, що $\forall n>n_0$ виконується нерівність

$$d\left(p_n\left(x\right), p\left(x\right)\right) < \varepsilon,$$

або

$$||p_n(x) - p(x)|| < \varepsilon.$$

Послідовність $(p_n(x))$ є фундаментальною, якщо $\forall \varepsilon > 0$ можна вказати n_0 таке, що $\forall n > n_0$ і $\forall p \in N$ виконується нерівність

$$d(p_n(x), p_{n+p}(x)) < \varepsilon,$$

або

$$||p_n(x) - p_{n+p}(x)|| < \varepsilon.$$

Теорема 2.1. *Для того, щоб послідовність $(p_n(x))$ була збіжною, необхідно і достатньо, щоб послідовності (a_n) і (b_n) були збіжними.*

Доведення. **Необхідність.** Нехай послідовність $(p_n(x))$ збігається до елемента $p(x) = a + bx^\alpha$, тобто $\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists n_0$ такий, що $\forall n > n_0$:

$$||p_n(x) - p(x)|| = \sqrt{(a_n - a)^2 + \frac{2(a_n - a)(b_n - b)}{\alpha + 1} + \frac{(b_n - b)^2}{2\alpha + 1}} =$$
$$= \sqrt{\left(a_n + \frac{b_n}{\alpha + 1} - a - \frac{b}{\alpha + 1}\right)^2 + \frac{\alpha^2 (b_n - b)^2}{(\alpha + 1)^2 (2\alpha + 1)}} < \varepsilon.$$

Тоді $\forall n > n_0$ виконуються нерівності

$$\frac{\alpha |b_n - b|}{(\alpha + 1)\sqrt{2\alpha + 1}} < \varepsilon,$$

$$\left| a_n + \frac{b_n}{\alpha + 1} - a - \frac{b}{\alpha + 1} \right| < \varepsilon.$$

Звідки дістаємо, що

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\alpha b_n}{(\alpha+1)\sqrt{2\alpha+1}}=\frac{\alpha b}{(\alpha+1)\sqrt{2\alpha+1}},$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(a_n+\frac{b_n}{\alpha+1}\right)=a+\frac{b}{\alpha+1}.$$

Отже, із збіжності послідовності $(p_n(x))$ випливає збіжність послідовностей (a_n) і (b_n), причому, коли

$$\lim_{n\to\infty}(a_n+b_nx^\alpha)=a+bx^\alpha,$$

то

$$\lim_{n\to\infty}a_n=a,\ \lim_{n\to\infty}b_n=b.$$

Достатність. Нехай

$$\lim_{n\to\infty}a_n=a,\ \lim_{n\to\infty}b_n=b,$$

тоді очевидно, що

$$\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{\alpha+1}=\frac{b}{\alpha+1},\ \lim_{n\to\infty}\left(a_n+\frac{b_n}{\alpha+1}\right)=a+\frac{b}{\alpha+1}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\alpha b_n}{(\alpha+1)\sqrt{2\alpha+1}}=\frac{\alpha b}{(\alpha+1)\sqrt{2\alpha+1}},$$

і $\forall\varepsilon>0$, зокрема $\dfrac{\varepsilon}{2}$, можна вказати такий номер n_1, що $\forall n>n_1$ виконується нерівність

$$\left|a_n+\frac{b_n}{\alpha+1}-a-\frac{b}{\alpha+1}\right|<\frac{\varepsilon}{2},$$

і такий номер n_2, що $\forall n>n_2$ виконується нерівність

$$\left|\frac{\alpha b_n}{(\alpha+1)(2\alpha+1)}-\frac{\alpha b}{(\alpha+1)(2\alpha+1)}\right|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

Нехай $n_0=\max(n_1,n_2)$, тоді $\forall n>n_0$ маємо

$$\|p_n(x)-p(x)\|=\sqrt{\left(a_n+\frac{b_n}{\alpha+1}-a-\frac{b}{\alpha+1}\right)^2+\frac{\alpha^2(b_n-b)^2}{(\alpha+1)^2(2\alpha+1)}}\leq$$

$$\leq\sqrt{\left|a_n+\frac{b_n}{\alpha+1}-a-\frac{b}{\alpha+1}\right|^2+2\left|a_n+\frac{b_n}{\alpha+1}-a-\frac{b}{\alpha+1}\right|\times}$$

$$\overline{\times\frac{\alpha|b_n-b|}{(\alpha+1)\sqrt{2\alpha+1}}+\frac{\alpha^2(b_n-b)^2}{(\alpha+1)^2\sqrt{2\alpha+1}}}=$$

$$=\left|a_n+\frac{b_n}{\alpha+1}-a-\frac{b}{\alpha+1}\right|+\frac{\alpha|b_n-b|}{(\alpha+1)\sqrt{2\alpha+1}}<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

Отже, із збіжності послідовностей (a_n) і b_n випливає збіжність послідовності $(p_n(x))$, причому, коли

$$\lim_{n\to\infty}a_n=a,\ \lim_{n\to\infty}b_n=b,$$

то

$$\lim_{n\to\infty}p_n(x)=\lim_{n\to\infty}(a_n+b_nx^\alpha)=a+bx^\alpha.$$

Теорема 2.2. *Для того, щоб послідовність $(p_n(x))$ була фундаментальною, необхідно і достатньо, щоб послідовності (a_n) і (b_n) були фундаментальними.*

Доведення. **Необхідність.** Нехай послідовність $(p_n(x))$ є фундаментальною, тобто $\forall\varepsilon>0$ можна вказати такий номер

n_0, що $\forall n > n_0$ і $\forall p \in \mathbb{N}$ виконується нерівність

$$\|p_n(x) - p_{n+p}(x)\| =$$
$$= \sqrt{\left(a_n + \frac{b_n}{\alpha+1} - a_{n+p} - \frac{b_{n+p}}{\alpha+1}\right)^2 + \frac{\alpha^2 (b_n - b_{n+p})^2}{(\alpha+1)^2 (2\alpha+1)}} < \varepsilon.$$

Тоді з нерівностей

$$\frac{\alpha |b_n - b_{n+p}|}{(\alpha+1)\sqrt{2\alpha+1}} \leq \sqrt{\left(a_n + \frac{b_n}{\alpha+1} - a_{n+p} - \frac{b_{n+p}}{\alpha+1}\right)^2 + \frac{\alpha^2 (b_n - b_{n+p})^2}{(\alpha+1)\, 2\alpha+1}},$$

$$\left|a_n + \frac{b_n}{\alpha+1} - a_{n+p} - \frac{b_{n+p}}{\alpha+1}\right| \leq$$
$$\leq \sqrt{\left(a_n + \frac{b_n}{\alpha+1} - a_{n+p} - \frac{b_{n+p}}{(\alpha+1)}\right)^2 + \frac{\alpha^2 (b_n - b_{n+p})^2}{(\alpha+1)\sqrt{2\alpha+1}}}$$

випливає, що $\forall n > n_0$ і $\forall p \in \mathbb{N}$ виконуються нерівності

$$\frac{\alpha |b_n - b_{n+p}|}{(\alpha+1)\sqrt{2\alpha+1}} < \varepsilon,$$

$$\left|a_n + \frac{b_n}{\alpha+1} - a_{n+p} - \frac{b_{n+p}}{(\alpha+1)}\right| < \varepsilon.$$

Звідки маємо, що послідовності

$$\left(\frac{\alpha b_n}{(\alpha+1)\sqrt{2\alpha+1}}\right), \left(a_n + \frac{b_n}{\alpha+1}\right)$$

фундаментальні. За критерієм Коші ці послідовності є збіжними. З останнього випливає збіжність, а отже, і фундаментальність послідовностей (a_n) і (b_n).

Достатність. Нехай послідовності (a_n) і (b_n) фундаментальні. Скориставшись критерієм Коші, дістаємо, що послідовності

$$\left(\frac{\alpha b_n}{(\alpha+1)\sqrt{2\alpha+1}}\right), \left(a_n + \frac{b_n}{\alpha+1}\right)$$

фундаментальні. Звідки маємо, що $\forall \varepsilon > 0$, зокрема для $\dfrac{\varepsilon}{2}$, можна вказати такий номер n_1, що $\forall n > n_1$ і $\forall p \in \mathbb{N}$ виконується нерівність

$$\left|\frac{\alpha b_n}{(\alpha+1)\sqrt{2\alpha+1}} - \frac{\alpha b_{n+p}}{(\alpha+1)\sqrt{2\alpha+1}}\right| < \frac{\varepsilon}{2},$$

і такий номер n_2, що $\forall n > n_2$ і $\forall p \in \mathbb{N}$ виконується нерівність

$$\left|a_n + \frac{b_n}{\alpha+1} - a_{n+p} - \frac{b_{n+p}}{\alpha+1}\right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Нехай $n_0 = \max(n_1, n_2)$. Тоді $\forall n > n_0$ і $\forall p \in \mathbb{N}$ маємо

$$\|p_n(x) - p_{n+p}(x)\| \leq$$
$$\leq \sqrt{\left|a_n + \frac{b_n}{\alpha+1} - a_{n+p} - \frac{b_{n+p}}{\alpha+1}\right|^2 + 2\left|a_n + \frac{b_n}{\alpha+1} - a_{n+p} - \frac{b_{n+p}}{\alpha+1}\right| \times}$$
$$\overline{\times \frac{\alpha|b_n - b_{n+p}|}{(\alpha+1)\sqrt{2\alpha+1}} + \frac{\alpha^2(b_n - b_{n+p})}{(\alpha+1)^2\sqrt{2\alpha+1}}} = \left|a_n + \frac{b_n}{\alpha+1} - a_{n+p} - \frac{b_{n+p}}{\alpha+1}\right| +$$
$$+ \frac{\alpha|b_n - b_{n+p}|}{(\alpha+1)\sqrt{(2\alpha+1)}} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

тобто послідовність $(p_n(x))$– фундаментальна.

Теореми 2.1., 2.2. і критерій Коші дають можливість зробити висновок, що простір $\mathcal{P}_{2,\alpha}$ повний. Повний нормований простір, норма якого породжена скалярним добутком, називається гільбертовим простором. Отже, простір $\mathcal{P}_{2,\alpha}$ – гільбертів простір.

Завдання для самостійного опрацювання

2.1. Довести, що у будь-якої послідовності $(p_n(x))$ не може бути більше однієї границі.

2.2. Множину $\{p(x) \mid \|p(x) - p_0(x)\| \le r\}$ називають замкненою кулею з центром у точці $p_0(x)$ радіуса r. Довести, що коли всі члени збіжної послідовності $(p_n(x))$ належать замкненій кулі, то і границя належить цій кулі.

2.3. Множину $\{p(x)\}$ будемо називати обмеженою, якщо існує така куля, якій належать всі елементи цієї множини, зокрема послідовність $(p_n(x))$ називається обмеженою, якщо існує куля, яка містить всі члени послідовності. Довести, що кожна збіжна послідовність є обмеженою.

2.4. Довести, що коли послідовність $(p_n(x))$ збіжна до точки $p_0(x)$, то будь-яка куля з центром в точці $p_0(x)$ містить всі члени послідовності, крім, можливо, скінченного їх числа.

2.5. Знайти границі послідовностей

1° $\left(\dfrac{n}{3n+2} + \dfrac{(2n+1)^2}{(n+1)^3 - n^3}\, x^\alpha\right)$;

2° $\left(\dfrac{2^n}{3^n+5^n} + \dfrac{3+0,5^n}{0,3^n + 2\cdot 0,5^n}\, x^\alpha\right)$;

3° $\left(\dfrac{(n+5)^3 - n(n+7)^2}{n^2} + \dfrac{2\sqrt{n} + n\sqrt[3]{n} + 5\sqrt[3]{n}}{\sqrt{3n-2} + n\sqrt[3]{8n+1}}\, x^\alpha\right)$;

4° $\left(\sqrt{n^2+n} - n + \left(\sqrt[3]{n^3+2n^2} - n\right)\, x^\alpha\right)$;

5° $\left(\sqrt[n]{10} + \sqrt[n]{0,1}\, x^\alpha\right)$;

6° $\left(\sqrt{2+\dfrac{1}{n}} + \sqrt{21+\dfrac{1}{n}}\, x^\alpha\right)$;

7°. $\left(\dfrac{\sqrt[n]{100}-2}{1+\sqrt[n]{0,001}}+\sqrt[n]{3^n+2^n}\; x^\alpha\right)$;

8°. $\left(4^{\frac{n+2}{n+1}}+(1+11^n)^{\frac{1}{n+2}}\;\; x^\alpha\right)$;

9°. $\left(\left(1+\dfrac{2}{n}\right)^n+\left(1+\dfrac{1}{2n}\right)^n\; x^\alpha\right)$;

10°. $\left(\left(\dfrac{n^2}{n^2+1}\right)^{\frac{n-1}{n+2}}+\sqrt[n]{n}\; x^\alpha\right)$.

§3 Ортогональність в просторі $\mathcal{P}_{2,\alpha}$

В гільбертовому просторі вводиться кут між двома елементами $p_1(x)=a_1+b_1x$ і $p_2(x)=a_2+b_2x$, який визначається з формули

$$\cos\varphi := \frac{(p_1(x), p_2(x))}{\|p_1(x)\|\cdot\|p_2(x)\|} =$$
$$= \frac{a_1a_2+\dfrac{a_1b_2+a_2b_1}{\alpha+1}+\dfrac{b_1b_2}{2\alpha+1}}{\sqrt{a_1^2+\dfrac{2a_1b_1}{\alpha+1}+\dfrac{b_1^2}{2\alpha+1}}\cdot\sqrt{a_2^2+\dfrac{2a_2b_2}{\alpha+1}+\dfrac{b_2^2}{2\alpha+1}}}. \qquad (3.1)$$

Зрозуміло, що ні $p_1(x)$, ні $p_2(x)$ не є нулевими елементами.

В тому випадку, коли $\cos\varphi=0$, елементи $p_1(x)$ і $p_2(x)$ називаються ортогональними і записують $p_1(x)\perp p_2(x)$. Слід зауважити, що ортогональність розуміють дещо ширше, а саме елементи $p_1(x)$ і $p_2(x)$ називають ортогональними, коли $(p_1(x), p_2(x))=0$. Звідси випливає, що нулевий елемент ортогональний будь-якому елементу з $\mathcal{P}_{2,\alpha}$.

Теорема 3.1. *(Теорема Піфагора). Для того, щоб елементи $p_1(x)$ і $p_2(x)$ з $\mathcal{P}_{2,\alpha}$ були ортогональними необхідно і до-*

статньо, щоб

$$\|p_1(x)\|^2 + \|p_2(x)\|^2 = \|p_1(x) + p_2(x)\|^2 .$$

Доведення. **Необхідність.** Нехай $p_1(x) \perp p_2(x)$, тобто $(p_1(x), p_2(x)) = 0$. Тоді

$$\begin{aligned}
&\|p_1(x) + p_2(x)\|^2 = \\
&= (p_1(x) + p_2(x), p_1(x) + p_2(x)) = (p_1(x), p_1(x)) + \\
&+ 2(p_1(x), p_2(x)) + (p_2(x), p_2(x)) = \|p_1(x)\|^2 + \|p_2(x)\|^2 .
\end{aligned}$$

Достатність. Нехай для елементів $p_1(x)$ і $p_2(x)$ з $\mathcal{P}_{2,\alpha}$ має місце рівність

$$\|p_1(x)\|^2 + \|p_2(x)\|^2 = \|p_1(x) + p_2(x)\|^2$$

Звідси випливає, що $2(p_1(x), p_2(x)) = 0$. А це й означає, що $p_1(x) \perp p_2(x)$.

Позначимо через $\Pi_{p_o(x)}$ множину всіх елементів $p(x) \in \mathcal{P}_{2,\alpha}$, які ортогональні з $p_0(x)$. Очевидно, що коли $p_1(x), p_2(x) \in \Pi_{p_o(x)}$ і $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, то $\lambda p_1(x) + \mu p_2(x) \in \Pi_{p_o(x)}$, тобто $\Pi p_o(x)$ лінійний підпростір простору $\mathcal{P}_{2,\alpha}$. Виясним, яку структуру має підпростір $\Pi_{p_o(x)}$ в залежності від $p_o(x)$.

Теорема 3.2. *Якщо в* $p_o(x) = a_0 + b_0 x^\alpha$

а) $a_0 = b_0 = 0$, то $\Pi_{p0(x)} = \mathcal{P}_{2,\alpha}$;

б) $a_0 \neq 0, b_0 = 0$, то $\Pi_{p_o(x)} = \{a - a(\alpha+1)x^\alpha | a \in \mathbb{R}\}$, причому всі криві $y = a + bx^\alpha$ проходять через точку $M_0\left(\dfrac{1}{(\alpha+1)^{\frac{1}{\alpha}}}; 0\right)$;

в) $a_0 = 0, b_0 \neq 0$, то $\Pi_{p0(x)} = \left\{-\dfrac{\alpha+1}{2\alpha+1}b + bx^\alpha | b \in \mathbb{R}\right\}$, причому всі криві $y = a + bx^\alpha$ проходять через точку

$M_0\left(\left(\frac{\alpha+1}{2\alpha+1}\right)^{\frac{1}{\alpha}};0\right)$;

г) $a_0+\frac{b_0}{\alpha+1}=0$ і $\frac{a_0}{\alpha+1}+\frac{b_0}{2\alpha+1}\neq 0$, то $\Pi_{p_0(x)}=\{a|a\in\mathbb{R}\}$;

д) $a_0+\frac{b_0}{\alpha+1}\neq 0$ і $\frac{a_0}{\alpha+1}+\frac{b_0}{2\alpha+1}=0$, то $\Pi_{p_o(x)}=\{bx^{\alpha}|b\in\mathbb{R}\}$;

е) $a_0+\frac{b_0}{\alpha+1}\neq 0$ і $\frac{a_0}{\alpha+1}+\frac{b_0}{2\alpha+1}\neq 0$, то $\Pi_{p_o(x)}=$ $=\left\{a-\frac{(a_0(\alpha+1)+b_0)(2\alpha+1)}{a_0(2\alpha+1)+b_0(\alpha+1)}\cdot ax^{\alpha}|a\in\mathbb{R}\right\}$; причому всі криві $y=a+bx^{\alpha}$ проходять через точку $M_0\left(\left(\frac{a_0(2\alpha+1)+b_0(\alpha+1)}{(a_0(\alpha+1)+b_0)(2\alpha+1)}\right)^{\frac{1}{\alpha}};0\right)$.

Доведення. Випадок а) очевидний. Для обґрунтування випадків б) – е) досить записати, що
$(p_0(x),p(x))=(a_0+b_0x^{\alpha},a+bx^{\alpha})=a_0a+\frac{a_0b+b_0a}{\alpha+1}+\frac{b_0b}{2\alpha+1}$.
і проаналізувати рівність

$$a_0\left(a_0+\frac{b_0}{\alpha+1}\right)+b\left(\frac{a_0}{\alpha+1}+\frac{b_0}{2\alpha+1}\right)=0.$$

Очевидно, що елементи $l_1(x)=1$ і $l_2(x)=x^{\alpha}$ лінійно незалежні і кожен елемент з $\mathcal{P}_{2,\alpha}$ подається у вигляді $p(x)=ae_1(x)+be_2(x)$, тобто елементи $e_1(x)$ і $e_2(x)$ утворюють базис, а простір $\mathcal{P}_{2,\alpha}$ є двомірним лінійним простором (причина появи двійки в позначенні).

Легко перевірити, що

$$\|e_1(x)\|=1,\quad \|e_2(x)\|=\frac{1}{\sqrt{2\alpha+1}}, \tag{3.2}$$

$$\cos\varphi = \cos\left(\widehat{l_1(x)\,,\ l_2}\,(x)\right) = \frac{\sqrt{2\alpha+1}}{\alpha+1} \qquad (3.3).$$

Якщо $e_2(x)$ домножити на $\sqrt{2\alpha+1}$, то норма такого елемента буде рівна 1. Тому надалі основним базисом будемо вважати пару елементів $e_1(x) = 1$, $e_2(x) = \sqrt{2\alpha+1}x^{\alpha}$, і коли $p(x)$ подано у вигляді $ae_1(x)+be_2(x)$, то пару чисел $(a;b)$ будемо називати координатами елемента (точки, вектора) $p(x)$ в системі координат $e_1(x), e_2(x)$.

Для елемента $e_1(x)$ множина ортогональних елементів має вигляд $\Pi_{p_o(x)} = \{a - a(\alpha+1)x^{\alpha} | a \in \mathbb{R}\}$

Тоді з рівняння

$$\|a - a(\alpha+1)x^{\alpha}\| = 1,$$

або

$$a^2 - \frac{2a^2(\alpha+1)}{\alpha+1} + \frac{a^2(\alpha+1)^2}{2\alpha+1} = 1$$

маємо, що

$$a = \pm\frac{\sqrt{2\alpha+1}}{\alpha}.$$

Таким чином пара елементів

$$i(x) = 1, \quad j(x) = \frac{\sqrt{2\alpha+1}}{\alpha} - \frac{\sqrt{2\alpha+1}\,(\alpha+1)}{\alpha}\ \ x^{\alpha}$$

утворюють ортогональний базис.

Очевидно, що коли

$$p_1(x) = a_1 i(x) + b_1 j(x) \text{ і } p_2(x) = a_2 i(x) + b_2 j(x),$$

то

$$(p_1(x), p_2(x)) = a_1 a_2 + b_1 b_2$$

Як уже зазначалось, множина елементів, ортогональних до $i\left(x\right)$, має вигляд

$$\Pi_{i(x)} = \left\{\lambda - \lambda\left(\alpha+1\right)x^{\alpha}|\lambda \in \mathbb{R}\right\}$$

Підпростір $\Pi_{i_0(x)}^{\perp} = \left\{\lambda|\lambda \in R\right\}$, ортогональний підпростору $\Pi_{i(x)}$. Тоді проекції довільного елемента $p\left(x\right) = a + bx^{\alpha}$ на підпростори $\Pi_{i(x)}^{\perp}$ і $\Pi_{i(x)}$ будуть рівні відповідно.

$$\text{пр}_{\Pi_{i(x)}^{\perp}} p\left(x\right) = \left(p\left(x\right), i\left(x\right)\right) i\left(x\right) = a + \frac{b}{\alpha+1},$$

$$\text{пр}_{\Pi_{i(x)}} p\left(x\right) = \left(p\left(x\right), j\left(x\right)\right) j\left(x\right) = -\frac{b\sqrt{2\alpha+1}\alpha}{\left(\alpha+1\right)\left(2\alpha+1\right)} j\left(x\right) =$$

$$= -\frac{b}{\alpha+1} + bx^{\alpha},$$

Очевидно, що

$$\text{пр}_{\Pi_{i(x)}^{\perp}} p\left(x\right) + \text{пр}_{\Pi_{i(x)}} p\left(x\right) = p\left(x\right).$$

Завдання для самостійного опрацювання

3.1. Довести, що коли $p_0\left(x\right) \neq 0,\ p_1\left(x\right) \perp p_0\left(x\right),$ $p_2\left(x\right) \perp p_0\left(x\right)$ і $p_1\left(x\right) \neq p_2\left(x\right)$, то для $\forall p\left(x\right) \in \Pi_{p_0(x)}\ \ \exists \lambda$, що $p\left(x\right) = \lambda p_1\left(x\right) + \left(1-\lambda\right) p_2\left(x\right).$

3.2. Нехай на множині $\mathbb{R}^2 = \left\{\left(a,b\right)|a,b \in \mathbb{R}\right\}$ задано в природний спосіб операція додавання пар (поелементно) і множення пари на число. Легко переконатись, що $\mathbb{R}^2$ має структуру лінійного простору. Довести, що лінійні простори $\mathcal{P}_{2,\alpha}$ і $\mathbb{R}^2$ ізоморфні. Переконатись, що білінійна форма $\vec{x}A\vec{y}^{\top}$, де $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}$,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \dfrac{1}{\alpha+1} \\ \dfrac{1}{\alpha+1} & \dfrac{1}{2\alpha+1} \end{pmatrix}$$

задає скалярний добуток на $\mathbb{R}^2$. Довести, що простори $\mathcal{P}_{2,\alpha}$ і $\mathbb{R}^2$ ізометричні відносно відстаней, породжених своїми скалярними добутками.

3.3. Нехай $p_1(x), p_2(x)$ і $g_1(x), g_2(x)$ – дві системи лінійно незалежних векторів. Побудувати матрицю переходу від одного базису до другого і навпаки. Зокрема побудувати матрицю переходу від основного базису $l_1(x), l_2(x)$ до ортонормованого $i(x), j(x)$.

3.4. Знайти

$$d\left(p_0(x), \Pi_{p_0(x)}\right) = \inf_{p(x)\in\Pi_{p_0(x)}} \|p(x) - p_0(x)\|$$

3.5. Знайти визначник Грама елементів $p_1(x) = a_1 + b_1x^\alpha$, $p_2(x) = a_2 + b_2x^\alpha$, тобто визначник

$$\triangle = \begin{vmatrix} (p_1(x), p_1(x)) & (p_1(x), p_2(x)) \\ (p_2(x), p_1(x)) & (p_2(x), p_2(x)) \end{vmatrix}.$$

§4. Прямі в просторі $\mathcal{P}_{2,\alpha}$.

Нехай $p_1(x)$ і $p_2(x)$ $\quad (p_1(x) \neq p_2(x))$ дві точки простору $\mathcal{P}_{2,\alpha}$.

Множину точок

$$\{\lambda p_1(x) + (1-\lambda)p_2(x) \,|\lambda \in \mathbb{R}\} \tag{4.1}$$

яка проходить через точки $p_1(x)$ і $p_2(x)$, називають прямою в просторі $\mathcal{P}_{2,\alpha}$, а множини

$$\{\lambda p_1(x) + (1-\lambda)p_2(x) \,|0 \le \lambda \le 1\} \tag{4.2}$$

$$\{\lambda p_1(x) + (1-\lambda)p_2(x) \,|0 < \lambda < 1\} \tag{4.3}$$

відповідно відрізком і інтервалом з кінцями в точках $p_1(x)$ і $p_2(x)$.

Рівняння $f(a, b, a_1, a_2, b_1, b_2) = 0$ будемо називати рівнянням прямої (1), коли точка $p(x) = a + bx\alpha$ належить множині (1) тоді і тільки тоді, коли пара $(a; b)$ – розв'язок цього рівняння.

Теорема 4.1. *Рівняння прямої, яка проходить через точки $p_1(x) = a_1 + b_1 x^\alpha$, $p_2(x) = a_2 + b_2 x^\alpha$, має вигляд:*

$$\text{а)}\ \frac{a - a_1}{a_2 - a_1} = \frac{b - b_1}{b_2 - b_1},\ \text{коли } a_1 \neq a_2 \text{ і } b_1 \neq b_2; \tag{4.4}$$

$$\text{б)} a = a_1,\ \text{коли } a_1 = a_2 \text{ і } b_1 \neq b_2; \tag{4.5}$$

$$\text{в)} b = b_1,\ \text{коли } a_1 \neq a_2 \text{ і } b_1 = b_2. \tag{4.6}$$

Доведення. Нехай $a + bx^\alpha$ довільний елемент з множини (4.1). Тоді знайдеться таке число λ, що $a = \lambda a_1 + (1 - \lambda) a_2$, $b = \lambda b_1 + (1 - \lambda) b_2$, і очевидно, що пара $(a; b)$ є розв'язком рівняння.

Нехай тепер пара $(a_0; b_0)$ – розв'язок рівняння (4.4). Тоді пару $(a_0; b_0)$ запишемо у вигляді

$$\left(a_0; \frac{b_2 - b_1}{a_2 - a_1}(a_0 - a_1) + b_1\right) \text{ і візьмемо } \lambda = \frac{a_2 - a_0}{a_2 - a_1}.$$

Після цього отримуємо

$$\begin{aligned}
\lambda p_1(x) + (1 - \lambda) p_2(x) &= \frac{a_2 - a_0}{a_2 - a_1} \cdot a_1 + \frac{a_0 - a_1}{a_2 - a_1} \cdot a_2 + \\
&+ \left(\frac{a_2 - a_0}{a_2 - a_1} \cdot b_1 + \frac{a_0 - a_1}{a_2 - a_1} \cdot b_2\right) x^\alpha = \\
&= a_0 + \left(b_1 + \frac{a_0 - a_1}{a_2 - a_1}(b_2 - b_1)\right) x^\alpha = a_0 + b_0 x^\alpha.
\end{aligned}$$

У випадку б) візьмемо пару $(a_1; b)$, де b – довільне, але фіксоване число. За λ візьмемо число $\lambda = \dfrac{b_2 - b}{b_2 - b_1}$

Після цього отримуємо

$$\lambda p_1(x) + (1-\lambda)\, p_2(x) = \frac{b_2 - b}{b_2 - b_1} \cdot a_1 + \frac{b - b_1}{b_2 - b_1} \cdot a_1 +$$
$$+ \left(\frac{b_2 - b}{b_2 - b_1} \cdot b_1 + \frac{b - b_1}{b_2 - b_1} \cdot b_2 \right) x^\alpha = a_1 + b x^\alpha.$$

Наслідок *Будь-яке рівняння виду* $Aa+Bb+C=0$, *де* $A^2+B^2 \neq 0$, *є рівнянням прямої в просторі* $\mathcal{P}_{2,\alpha}$. *Пряма з рівнянням* $Aa+Bb+C=0$ *є множина*

$$\{a + b x^\alpha | Aa + Bb + C = 0\} \tag{4.7}$$

Дві прямі, які не мають спільних точок, будемо називати паралельними прямими. Нехай маємо дві прямі

$$\{a + b x^\alpha | A_1 a + B_1 b + C_1 = 0\}$$

і

$$\{a + b x^\alpha | A_2 a + B_2 b + C_2 = 0\}$$

За означенням перетин таких двох множин порожній, а, отже, система двох рівнянь

$$\begin{cases} A_1 a + B_1 b + C_1 = 0, \\ A_2 a + B_2 b + C_2 = 0 \end{cases}$$

не має розв'язків. Таким чином, умовою паралельності двох прямих є такі:

а) $\dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} \quad C_1 \neq C_2,$ коли $A_2 \neq 0$ і $B_2 \neq 0$;

б) $A_1 = A_2 = 0, \quad \dfrac{C_1}{B_1} \neq \dfrac{C_2}{B_2}$;

в) $B_1 = B_2 = 0, \quad \dfrac{C_1}{A_1} = \dfrac{C_2}{A_2}$.

Нехай $p_1(x)$ і $p_2(x)$ дві різні точки з $\mathcal{P}_{2,\alpha}$. Множину $\{\lambda p_2(x) + (1-\lambda)\, p_1(x) | \lambda \geq 0\}$ будемо називати *півпрямою або* *променем з початком в точці* $p_1(x)$ *і точкою* $p_2(x)$ на ньому. Множина $\{\lambda p_2(x) + (1-\lambda)p_1(x) \,|\lambda \leq 0\}$ теж називається півпрямою або променем з початком в точці $p_1(x)$, який не містить точки $p_2(x)$. Різні *півпрямі* однієї прямої з спільною початковою точкою називаються *доповняльними.*

Множину
$\{\lambda p_1(x) + (1-\lambda)p_0(x) \,|\lambda \geq 0\} \cup \{\lambda p_2(x) + (1-\lambda)p_0(x) \,|\lambda \geq 0\}$ будемо називати *кутом з вершиною* $p_0(x)$ та точками $p_1(x)$ і $p_2(x)$ на сторонах. Якщо сторони кута є доповняльними півпрямими однієї прямої, то *кут* називається *розгорнутим.*

За *довжину* відрізка (4.2) (інтервала (4.3)) приймемо відстань між його кінцями

$$d(p_1(x), p_2(x)) = \|p_1(x) - p_2(x)\|. \tag{4.8}$$

За *величину кута з вершиною* $p_0(x)$ та точками $p_1(x)$ і $p_2(x)$ на його сторонах *приймемо кут між елементами* $p_1(x) - p_0(x)$ і $p_2(x) - p_0(x)$, тобто кут, який визначається з формули

$$\cos\alpha = \frac{(p_1(x) - p_0(x), p_2(x) - p_0(x))}{\|p_1(x) - p_0(x)\| \cdot \|p_2(x) - p_0(x)\|}. \tag{4.9}$$

Будемо вважати *прямі перпендикулярними, якщо кут між півпрямими цих прямих прямий.*

Нехай дві прямі задані рівняннями $A_1a + B_1b + C_1 = 0$, $A_2a + B_2b + C_2 = 0$. Встановимо, при яких умовах такі прямі будуть перпендикулярними. Насамперед, нехай $p_0(x) = a_0 + b_0x^\alpha$ спільна точка цих прямих, і нехай в рівняннях $B_1 \neq 0$ і $B_2 \neq 0$ (всі інші випадки розглянути самостійно). Очевидно, що точки $p_1(x) = -\dfrac{C_1}{B_1}x^\alpha$, $p_2(x) = -\dfrac{C_2}{B_2}x^\alpha$ належать відповідно першій і другій прямій. Тоді прямі перпендикулярні, коли елементи

$$p_1(x) - p_0(x) = -a_0 \left(\frac{C_1}{B_1} + b_0 \right) x^{\alpha},$$

$$p_2(x) - p_0(x) = -a_0 \left(\frac{C_2}{B_2} + b_0 \right) x^{\alpha},$$

ортогональні, тобто коли

$$(p_1(x) - p_0(x), p_2(x) - p_0(x)) = 0.$$

Звідки маємо

$$a_0^2 + \frac{\frac{C_2}{B_2} + b_0 + \frac{C_1}{B_1} + b_0}{\alpha + 1} a_0 + \frac{\left(\frac{C_1}{B_1} + b_0\right)\left(\frac{C_2}{B_2} + b_0\right)}{2\alpha + 1} =$$
$$= a_0^2 - \frac{\frac{A_2}{B_2} a_0 + \frac{A_1}{B_1} a_0}{\alpha + 1} a_0 + \frac{\frac{A_1}{B_1} + \frac{A_2}{B_2} a_0^2}{2\alpha + 1} = 0$$

Таким чином, умовою перпендикулярності двох прямих буде виконання рівності

$$1 - \frac{1}{\alpha + 1} \left(\frac{A_1}{B_1} + \frac{A_2}{B_2} \right) + \frac{1}{2\alpha + 1} \frac{A_1}{B_1} \cdot \frac{A_2}{B_2} = 0.$$

Остання рівність є умовою ортогональності двох елементів $1 - \frac{A_1}{B_1} x^{\alpha}$ і $1 - \frac{A_2}{B_2} x^{\alpha}$
і

$$B_1 - A_1 x^{\alpha}; \;\; B_2 - A_2 x^{\alpha} \tag{4.10}$$

Очевидно, що ці елементи належать відповідно прямим, які задані рівняннями $A_1 a + B_1 b = 0$ та $A_2 a + B_2 b = 0$, які або паралельні заданим, або хоча б одна з них співпадає із заданими.

Теорема 4.2. *Нехай маємо пряму* $l : Aa + Bb + C = 0$ *і точку* $p_0(x) = a_0 + b_0 x^\alpha$. *Відстань від точки* $p_0(x)$ *до прямої* l

$$d\left(p_0\left(x\right), l\right) = \inf_{p(x)\in l} \left\| p\left(x\right) - p_0\left(x\right)\right\|$$

обчислюється за формулою

$$d\left(p_0\left(x\right), l\right) = \frac{\alpha}{\left(\alpha+1\right)\sqrt{2\alpha+1}} \cdot \frac{\left|Aa_0 + Bb_0 + C\right|}{\sqrt{B^2 - \frac{2AB}{\alpha+1} + \frac{A^2}{2\alpha+1}}}.$$

Доведення. Нехай $p(x)$ довільна точка прямої l, тобто

$$p\left(x\right) = a - \frac{Aa+C}{B} x^\alpha$$

Тоді

$$d^2\left(p\left(x\right), p_0\left(x\right)\right) = \left(a-a_0\right)^2 - \frac{2}{\alpha+1}\left(a-a_0\right)\left(\frac{Aa+C}{B} + b_0\right) +$$
$$+ \frac{1}{2\alpha+1}\left(\frac{Aa+C}{B} + b_0\right)^2 = a^2\left(1 - \frac{2}{\alpha+1}\cdot\frac{A}{B} + \frac{1}{2\alpha+1}\cdot\frac{A^2}{B^2}\right) -$$
$$- 2a\left(a_0 + \frac{1}{\alpha+1}\left(b_0 - \frac{A}{B}a_0 + \frac{C}{B}\right) - \frac{1}{2\alpha+1}\left(\frac{AC}{B^2} + \frac{Ab_0}{B}\right)\right) +$$
$$+ a_0^2 + \frac{2a_0}{\alpha+1}\left(\frac{C}{B} + b_0\right) + \frac{1}{2\alpha+1}\left(\frac{C^2}{B^2} + b_0^2 + \frac{2Cb_0}{B}\right)$$

Відносно a маємо квадратний тричлен, який досягає мінімуму в точці

$$a = \left(a_0 + \frac{1}{\alpha+1}\left(b_0 - \frac{A}{B}a_0 + \frac{C}{B}\right) - \frac{1}{2\alpha+1}\left(\frac{AC}{B^2} + \frac{Ab_0}{B}\right)\right) \times$$
$$\times \left(1 - \frac{2}{\alpha+1}\cdot\frac{A}{B} + \frac{1}{2\alpha+1}\cdot\frac{A^2}{B^2}\right)^{-1}$$

і мінімальне значення рівне:

$$d^2\left(p_0\left(x\right),l\right)=\left[\left(\left(a_0^2+\frac{2a_0}{\alpha+1}\left(\frac{C}{B}+b_0\right)+\frac{1}{2\alpha+1}\left(\frac{C^2}{B^2}+b_0^2+\frac{2Cb_0}{B}\right)\right)\times\right.\right.$$
$$\times\left(1-\frac{2}{\alpha+1}\cdot\frac{A}{B}+\frac{1}{2\alpha+1}\cdot\frac{A^2}{B^2}\right)-\left(a_0+\frac{1}{\alpha+1}\left(b_0-\frac{A}{B}a_0+\frac{C}{B}\right)-\right.$$
$$\left.\left.-\frac{1}{2\alpha+1}\left(\frac{AC}{B^2}+\frac{Ab_0}{B}\right)\right)^2\right]\times\left(1-\frac{2}{\alpha+1}\cdot\frac{A}{B}+\frac{1}{2\alpha+1}\cdot\frac{A^2}{B^2}\right)^{-1}=$$
$$=\frac{\alpha^2}{\left(\alpha+1\right)^2\left(2\alpha+1\right)}\cdot\frac{\left(Aa_0+Bb_0+C\right)^2}{B^2-\frac{2AB}{\alpha+1}+\frac{A^2}{2\alpha+1}}$$

Завдання для самостійного опрацювання.

4.1. Вияснити структуру множини
$\left\{\lambda p_1\left(x\right)+\left(1-\lambda\right)|\lambda\in R\right\}$
в залежності від точок $p_1\left(x\right)$ і $p_2\left(x\right)$.

4.2. Переконатись, що для довільної не нулевої точки $p_0\left(x\right)$ $\Pi_{p_0(x)}$ є пряма. Скласти її рівняння.

4.3. Задано дві точки $p_1\left(x\right)$ і $p_2\left(x\right)$ $p_1\left(x\right)+p_2\left(x\right)$. Що є геометричним місцем точок, рівновіддалених від цих точок?

4.4. Вияснити, що є геометричним місцем точок, рівновіддалених від сторін цього кута.

4.5. Записати рівняння прямої, яка проходить через точку $p_0\left(x\right)$ і паралельна прямій, яка задана рівнянням $Aa+Bb+C=0$.

4.6. Знайти точку перетину непаралельних прямих:
а) заданих рівнянням $A_1a+B_1b+C_1=0$, $A_2a+B_2b+C_2=0$;
б) заданих парами точок, які лежать на цих прямих.

4.7. Записати рівняння прямої, яка проходить через точку $p_0\left(x\right)$ і точку перетину двох прямих, заданих рівняннями.

4.8. Записати рівняння прямої, яка проходить через точку $p_0\left(x\right)$ і ортогональна елементу $p_1\left(x\right)$.

4.9. Записати рівняння прямої, яка проходить через точку $p_0\left(x\right)$ і перпендикулярна прямій, заданій рівнянням $Aa+Bb+C=0$.

4.10. На відрізку з кінцями в точках $p_1\left(x\right)$ і $p_2\left(x\right)$ знайти точку p_0, яка ділить заданий відрізок у відношенні μ.

§5. Геометрія простору $\mathcal{P}_{2,\alpha}$.

У попередньому параграфі в просторі $\mathcal{P}_{2,\alpha}$ було введено поняття прямої кута, тобто основні геометричні поняття. Цілком природньо поставити питання про те, яка саме геометрія має місце в $\mathcal{P}_{2,\alpha}$. Виявляється, що це сама звичайнісінька планіметрія Евкліда. Підтвердженням цьому є виконання аксіом О. В. Погорєлова.

Будемо вважати, що $\mathcal{P}_{2,\alpha}$ – площина, а елементи з $\mathcal{P}_{2,\alpha}$ – точки. Множини виду

$$\left\{\lambda p_1\left(x\right)+\left(1-\lambda\right)\left|\lambda\in\mathbb{R}\right.\right\} \tag{5.1}$$

або

$$\left\{a+bx^{\alpha}\left|Aa+Bb+C=0\right.\right\} \tag{5.2}$$

є прямими на площині, причому другий запис містить і рівняння прямої. Отож ми часто будемо ототожнювати пряму з її рівнянням, яким вона задається.

Очевидно, що які б не були точки $p_1\left(x\right)$ і $p_2\left(x\right)$ $\left(p_1\left(x\right)\neq p_1\left(x\right)\right)$ з $\mathcal{P}_{2,\alpha}$, існує пряма, яка проходить через ці дві точки, причому така пряма одна. Яка б не була пряма, існують точки, які цій прямій належать та точки, які цій прямій не належать. Наприклад, точка $2p_1\left(x\right)+3p_2\left(x\right)$ не належить прямій у записі (5.1), а коли в записі (5.2) для прикладу $B\neq 0$, то точка $a+\left(a-\dfrac{Aa+C}{B}\right)x^{\alpha}$, $\left(a\neq 0\right)$ не належить прямій у записі (5.2). Отже, аксіоми I_1, I_2 (див [11]) виконуються.

Будемо говорити, що точка $p_3(x)$ лежить між точками $p_1(x)$ та $p_2(x)$, якщо існує $\lambda\,(0 < \lambda < 1)$ таке, що $p_3(x) = \lambda p_1(x) + (1-\lambda)\,p_2(x)$.

Нехай маємо пряму

$$\{p(x)\,|p(x) = \lambda p_1(x) + (1-\lambda)\,p_2(x)\,,\ \lambda \in \mathbb{R}\}$$

і нехай $q_1(x) = c_1 + d_1x^\alpha$, $q_2(x) = c_2 + d_2x^\alpha$, $q_3(x) = c_3 + d_3x^\alpha$ лежать на цій прямій. Тоді існують такі числа λ_1 та λ_2, що

$q_1(x) = \lambda_1 p_1(x) + (1-\lambda_1)\,p_2(x)$,

$q_2(x) = \lambda_2 p_1(x) + (1-\lambda_2)\,p_2(x)$.

Пряма, яка проходить через точки $q_1(x)$ і $q_2(x)$, збігається з прямою, яка проходить через точки $p_1(x)$ і $p_2(x)$. Дійсно

$$\begin{aligned}
&\{q(x)\,|q(x) = \lambda q_1(x) + (1-\lambda)\,q_2(x)\,,\ \lambda \in \mathbb{R}\} = \\
&= \{q(x)\,|q(x) = (\lambda\lambda_1 + \lambda_2(1-\lambda))\,p_1(x) + (\lambda(1-\lambda_1) + \\
&+ (1-\lambda)(1-\lambda_2)\,)p_2(x)\,,\ \lambda \in \mathbb{R}\} = \{q(x)\,|q(x) = \\
&= \mu p_1(x) + (1-\mu)\,p_2(x)\,|\mu \in \mathbb{R}\},
\end{aligned}$$

бо $\lambda\lambda_1 + \lambda_2(1-\lambda) + \lambda(1-\lambda_1) + (1-\lambda)(1-\lambda_2) = 1$.

Оскільки на цій же прямій лежить і точка $q_3(x)$, то існує число λ_0, що

$$q_3(x) = (1-\lambda_0)\,q_1(x) + \lambda_0 q_2(x)$$

і коли $0 < \lambda_0 < 1$, то $q_3(x)$ лежить між точками $q_1(x)$ і $q_2(x)$, коли $\lambda_0 > 1$, то точка $q_2(x)$ лежить між точками $q_1(x)$ і $q_3(x)$, і коли $\lambda_0 < 0$, то $q_1(x)$ лежить між точками $q_3(x)$ і $q_2(x)$.

Отже, з трьох точок на прямій одна і тільки одна лежить між двома іншими (Π_1).

Візьмемо дві множини

$$\Pi_1 = \{p(x)\,|p(x) = a + bx^\alpha,\ Aa + Bb + C > 0\}\,,$$

$$\Pi_2 = \{p(x) \,|p(x) = a + bx^{\alpha},\ Aa + Bb + C < 0\},$$

назвемо їх півплощинами, на які розбиває площину $\mathcal{P}_{2,\alpha}$ пряма l, задана рівнянням $Aa + Bb + C = 0$. Покажемо, що якщо кінці якого-небудь відрізка належать одній півплощині, то відрізок не перетинає пряму. Якщо кінці відрізка належать різним півплощинам, то відрізок перетинає пряму. Нехай, для прикладу, точки $p_1(x) = a_1 + b_1x^{\alpha}$ і $p_2(x) = a_2 + b_2x^{\alpha}$ такі, що $Aa_1 + Bb_1 + C > 0$ і $Aa_2 + Bb_2 + C > 0$. Припустимо, що на прямій l існує точка $p_0(x) = a_0 + b_0x^{\alpha}$, яка належить відрізку $\{p(x) \,|p(x) = \lambda(a_1 + b_1x^{\alpha}) + (1-\lambda)(a_2 + b_2x^{\alpha}) \,|0 < \lambda < 1\}$. Тоді існує λ_0 $(0 < \lambda_0 < 1)$, таке, що

$a_0 + b_0x^{\alpha} = \lambda_0(a_1 + b_1x^{\alpha}) + (1-\lambda_0)(a_2 + b_2x^{\alpha})$.

Звідки

$$\begin{aligned}&Aa_0 + Bb_0 + C = A(\lambda_0 a_1 + (1-\lambda_0)a_2) + \\ &+ B\left(\lambda_0 b_1 + (1-\lambda_0)b^2\right) + C = \lambda_0(Aa_1 + Bb_1 + C) + \\ &+ (1-\lambda_0)(Aa_2 + Bb_2 + C) = 0.\end{aligned}$$

З другого боку, врахувавши, що $0 < \lambda_0 < 1$, $Aa_1 + Bb_1 + C > 0$ і $Aa_2 + Bb_2 + C > 0$, дістаємо, що $Aa_0 + Bb_0 + C > 0$. Отримали протиріччя, що і доводить, коли кінці будь-якого відрізка належать $\prod_1$, то відрізок і пряма не перетинаються.

Нехай точки $p_1(x) = a_1 + b_1x^{\alpha}$ і $p_2(x) = a_2 + b_2x^{\alpha}$ належать різним півплощинам, наприклад, $p_1(x) \in \Pi_1$, $p_2(x) \in \Pi_2$, тобто

$$Aa_1 + Bb_1 + C > 0, \quad Aa_2 + Bb_2 + C < 0$$

.

Віднявши від першої нерівності другу, дістанемо

$$A(a_1 - a_2) + B(b_1 - b_2) > 0.$$

Будемо вважати, що $a_1 \neq a_2$ і $b_1 \neq b_2$. Тоді рівняння прямої, яка проходить через точки $p_1(x)$ і $p_2(x)$, має вигляд

$$\frac{a-a_1}{a_2-a_1}=\frac{b-b_1}{b_2-b_1}$$

Визначник системи

$$\begin{cases} Aa+Bb+C=0, \\ \dfrac{a-a_1}{a_2-a_1}=\dfrac{b-b_1}{b_2-b_1} \end{cases}$$

рівний

$$\begin{vmatrix} A & B \\ \dfrac{1}{a_2-a_1} & -\dfrac{1}{b_2-b_1} \end{vmatrix} = -\frac{A}{b_2-b_1}-\frac{B}{a_2-a_1}=\frac{A(a_1-a_2)+B(b_1-b_2)}{(a_2-a_1)(b_2-b_1)}.$$

Очевидно, що він не рівний нулю, тобто система має єдиний розв'язок, який і визначає точку перетину відрізка і прямої.

Отже, обгрунтовано, що пряма розбиває площину на дві півплощини (Π_2).

Нехай маємо відрізок

$C|(p_1(x), p_2(x)) := \{p(x)\,|p_1(x)(1-\lambda)+\lambda p_2(x)\,|0<\lambda<1\}$.

За його довжину була прийнята відстань між точками $p_1(x)$ і $p_2(x)$, тобто

$d(CI(p_1(x), p_2(x))) = \|p_1(x)-p_2(x)\|$

Візьмемо будь-яку внутрішню точку відрізка $p_0(x)=(1-\lambda_0)\,p_1(x)+\lambda_0 p_2(x)$, де $0<\lambda<1$. Тоді

$$
\begin{aligned}
&d\left(CI\left(p_1\left(x\right),p_0\left(x\right)\right)\right)+d\left(CI\left(p_0\left(x\right),p_2\left(x\right)\right)\right)=\\
&=\left\|p_1\left(x\right)-p_0\left(x\right)\right\|+\left\|p_0\left(x\right)-p_2\left(x\right)\right\|=\\
&=\sqrt{\lambda_0^2\left(a_1-a_2\right)^2+\frac{2\lambda_0^2}{\alpha+1}\left(a_1-a_2\right)\left(b_1-b_2\right)+\frac{\lambda_0^2}{2\alpha+1}\left(b_1-b_2\right)^2}+\\
&+\sqrt{\left(1-\lambda_0\right)^2\left(a_1-a_2\right)^2+\frac{2\left(1-\lambda_0\right)^2}{\alpha+1}\left(a_1-a_2\right)\left(b_1-b_2\right)+\frac{\left(1-\lambda_0\right)^2}{2\alpha+1}\left(b_1-b_2\right)^2}=\\
&=\sqrt{\left(a_1-a_2\right)^2+\frac{2}{\alpha+1}\left(a_1-a_2\right)\left(b_1-b_2\right)+\frac{\left(b_1-b_2\right)^2}{2\alpha+1}}=\\
&=\left\|p_1\left(x\right)-p_2\left(x\right)\right\|=d\left(CI\left(p_1\left(x\right),p_2\left(x\right)\right)\right)
\end{aligned}
$$

Отже, кожен відрізок має певну довжину, більшу від нуля. Довжина відрізка дорівнює сумі довжин частин, на які він розбивається будь-якою його точкою ($Ш_1$).

Кутом з вершиною $p_0\left(x\right)$ і точками $p_1\left(x\right)$ і $p_2\left(x\right)$ на його сторонах було названо множину

$\angle p_0\left(x\right)p_1\left(x\right)p_2\left(x\right):=$
$\left\{\lambda p_1\left(x\right)+\left(1-\lambda\right)p_0\left(x\right)\middle|\lambda\geq 0\right\}\cup\left\{\lambda p_2\left(x\right)+\left(1-\lambda\right)p_0\left(x\right)\middle|\lambda\geq 0\right\}$,
а його величиною було названо таке число α, яке визначаеться з формули

$$\cos\alpha=\frac{\left(p_1\left(x\right)-p_0\left(x\right),p_2\left(x\right)-p_0\left(x\right)\right)}{\left\|p_1\left(x\right)-p_0\left(x\right)\right\|\cdot\left\|p_2\left(x\right)-p_0\left(x\right)\right\|}$$

.

Для розгорнутого кута точки $p_0\left(x\right)$, $p_1\left(x\right)$, $p_2\left(x\right)$ лежать на одній прямій, причому $p_0\left(x\right)$ між точками $p_1\left(x\right)$ і $p_2\left(x\right)$. Тоді існує $\lambda\left(0<\lambda<1\right)$ таке, що $p_0\left(x\right)=\lambda p_1\left(x\right)+\left(1-\lambda\right)p_2\left(x\right)$. Звідки

$$p_1(x) - p_0(x) = (1-\lambda)(p_1(x) - p_2(x)),$$
$$p_2(x) - p_0(x) = -\lambda(p_1(x) - p_2(x)),$$

$$\cos\alpha = \frac{-\lambda(1-\lambda)}{\lambda(1-\lambda)} = -1,$$

тобто $\alpha = 180^\circ$.

Нехай $\angle p_1(x)\,p_0(x)\,p_2(x)$ не є розгорнутим і нехай $\widetilde{p}(x) = (1-\lambda)\,p_1(x) + \lambda p_2(x)\,,\ 0 < \lambda < 1$, тоді промінь

$$\{p(x)\,|p(x) = (1-\mu)\,p_0(x) + \mu\widetilde{p}(x)\,|\mu \geq 0\}$$

проходить між сторонами кута. Покажемо, що міра $\angle p_1(x)\,p_0(x)\,p_2(x)$ дорівнює сумі кутів $p_1(x)\,p_0(x)\,\widetilde{p}(x)$ і $\widetilde{p}(x)\,p_0(x)\,p_2(x)$.

Дійсно

$$\cos\alpha_1 = \frac{(p_1(x) - p_0(x)\,, \widetilde{p}(x) - p_0(x))}{\|p_1(x) - p_0(x)\| \cdot \|\widetilde{p}(x) - p_0(x)\|},$$
$$\cos\alpha_2 = \frac{(p_2(x) - p_0(x)\,, \widetilde{p}(x) - p_0(x))}{\|p_2(x) - p_0(x)\| \cdot \|\widetilde{p}(x) - p_0(x)\|}$$

і

$$\cos(\alpha_1 + \alpha_2) = \cos\left(\arccos\frac{(p_1(x) - p_0(x)\,, \widetilde{p}(x) - p_0(x))}{\|p_1(x) - p_0(x)\| \cdot \|\widetilde{p}(x) - p_0(x)\|} + \right.$$
$$\left. + \arccos\frac{(p_2(x) - p_0(x)\,, \widetilde{p}(x) - p_0(x))}{\|p_2(x) - p_0(x)\| \cdot \|\widetilde{p}(x) - p_0(x)\|}\right) =$$
$$= \frac{(p_1(x) - p_0(x)\,, \widetilde{p}(x) - p_0(x))\,(p_2(x) - p_0(x)\,, \widetilde{p}(x) - p_0(x))}{\|p_1(x) - p_0(x)\| \cdot \|p_2(x) - p_0(x)\| \cdot \|\widetilde{p}(x) - p_0(x)\|^2} -$$
$$- \sqrt{1 - \frac{(p_1(x) - p_0(x)\,, \widetilde{p}(x) - p_0(x))^2}{\|p_1(x) - p_0(x)\| \cdot \|\widetilde{p}(x) - p_0(x)\|^2}} \times$$
$$\times \sqrt{1 - \frac{(p_2(x) - p_0(x)\,, \widetilde{p}(x) - p_0(x))^2}{\|p_2(x) - p_0(x)\| \cdot \|\widetilde{p}(x) - p_0(x)\|^2}}.$$

Оскільки

$$(p_1(x) - p_0(x), \widetilde{p}(x) - p_0(x)) = \lambda (p_1(x) - p_0(x), p_2(x) - p_0(x)) + \\ + (1-\lambda) \cdot \|p_1(x) - p_0(x)\|^2,$$

$$(p_2(x) - p_0(x), \widetilde{p}(x) - p_0(x)) = \\ = (1-\lambda)(p_1(x) - p_0(x), p_2(x) - p_0(x)) + \lambda^2 \cdot \|p_2(x) - p_0(x)\|^2,$$

$\|\widetilde{p}(x) - p_0(x)\|^2 = (\widetilde{p}(x) - p_0(x)), (\widetilde{p}(x) - p_0(x)) = (1-\lambda)^2 \|p_1(x) - p_0(x)\|^2 + 2\lambda(1-\lambda)(p_1(x) - p_0(x), p_2(x) - p_0(x)) + \lambda^2 \|p_2(x) - p_0(x)\|^2,$

то

$$\cos(\alpha_1 + \alpha_2) = [(\lambda (p_1(x) - p_0(x), p_2(x) - p_0(x)) + \\ + (1-\lambda)\|p_1(x) - p_0(x)\|^2\big)\,((1-\lambda)(p_1(x) - p_0(x), p_2(x) - \\ - p_0(x)) + \lambda \|p_2(x) - p_0(x)\|^2\big) - \lambda(1-\lambda)\big(\|p_1(x) - p_0(x)\|^2 \times \\ \times |p_2(x) - p_0(x)\|^2 - (p_1(x) - p_0(x), p_2(x) - p_0(x))^2\big)\big] \times \\ \times \|p_1(x) - p_0(x)\|^{-1} \cdot \|p_2(x) - p_0(x)\|^{-1} \times \\ \times \big[(1-\lambda)^2 \|p_1(x) - p_0(x)\|^2 + 2\lambda(1-\lambda)(p_1(x) - p_0(x), p_2(x) - \\ - p_0(x)) + \lambda^2 \|p_2(x) - p_0(x)\|^2\big]^{-1} = \\ = \frac{(p_1(x) - p_0(x), p_2(x) - p_0(x))}{\|p_1(x) - p_0(x)\| \cdot \|p_2(x) - p_0(x)\|} = \cos\alpha.$$

Отже, кожен кут має певну градусну міру, більшу від нуля. Розгорнутий кут дорівнює 180°. Градусна міра кута дорівнює сумі градусних мір кутів, на які він розбивається будь-яким променем, що проходить між його сторонами (Ш_2).

Нехай маємо півпряму з початком в точці $p_0(x)$:

$\{p(x) \,|\, p(x) = (1-\lambda) p_0(x) + \lambda p_1(x), \ \lambda \geq 0\}$ і деяке число $d > 0$. Тоді з рівняння $\|p(x) - p_0(x)\| = d$ дістаємо

$$\lambda = \frac{d}{\|p(x) - p_0(x)\|},$$

тобто на будь-якій півпрямій від її початкової точки можна відкласти відрізок даної довжини і тільки один ($\mathtt{IУ}_1$).
Нехай маємо півпряму з початком в точці $p_0(x)$ і точку $p_1(x)$ на ній. Будемо вважати, що $\|p_1(x) - p_0(x)\| = \cos\alpha$, де $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$ – фіксована величина кута і що рівняння прямої, що проходить через точки $p_0(x)$ і $p_1(x)$ має вигляд $Aa+Bb+C=0$.
Візьмемо точку $p_2(x) = a_2 + b_2 x^\alpha$, де

$$a_2 = \frac{\cos^2\alpha + K\sin\alpha\left(\frac{(a_1-a_0)(b_1-b_0)}{\alpha+1} + \frac{(b_1-b_0)^2}{2\alpha+1}\right)}{(a_1-a_0)^2 + \frac{2(a_1-a_0)(b_1-b_0)}{\alpha+1} + \frac{(b_1-b_0)^2}{2\alpha+1}}(a_1-a_0) + a_0 =$$

$$= \frac{\cos^2\alpha + K\sin\alpha\left(\frac{(a_1-a_0)(b_1-b_0)}{\alpha+1} + \frac{(b_1-b_0)^2}{2\alpha+1}\right)}{\cos^2\alpha}(a_1-a_0) + a_0,$$

$$b_2 = \frac{\cos^2\alpha + K\sin\alpha\left((a_1-a_0)^2 + \frac{(a_1-a_0)(b_1-b_0)}{\alpha+1}\right)}{(a_1-a_0)^2 + \frac{2(a_1-a_0)(b_1-b_0)}{\alpha+1} + \frac{(b_1-b_0)^2}{2\alpha+1}}(b_1-b_0) + b_0 =$$

$$= \frac{\cos^2\alpha + K\sin\alpha\left((a_1-a_0)^2 + \frac{(a_1-a_0)(b_1-b_0)}{\alpha+1}\right)}{\cos^2\alpha}(b_1-b_0) + b_0,$$

$$K = \frac{(\alpha+1)\sqrt{2\alpha+1}}{\alpha}\cdot\sqrt{b_1^2 - \frac{2A_1B_1}{\alpha+1} + \frac{A_1^2}{2\alpha+1}}.$$

Неважко переконатись (Доведіть!), що $\|p_2(x) - p_0(x)\| = 1$ і що $p_2(x) = \{p(x) = a + bx^\alpha | Aa + Bb + C > 0\}$.

Покажемо, що величина кута між півпрямими з початком $p_0(x)$ і відповідно з точками на них $p_1(x)$ і $p_2(x)$ рівна α. Дійсно

$$\cos\alpha = \frac{\left(p_2(x) - p_0(x), p_1(x) - p_0(x)\right)}{\|p_2(x) - p_0(x)\| \cdot \|p_1(x) - p_0(x)\|} =$$

$$= \frac{\left(p_2(x) - p_0(x), p_1(x) - p_0(x)\right)}{\cos\alpha} = ((a_1 - a_0)(a_2 - a_0) + \frac{1}{\alpha+1}\times$$

$$\times\ ((a_1 - a_0)(b_2 - b_0) + (a_2 - a_0)(b_1 - b_0)) + \frac{1}{2\alpha+1}(b_1 - b_0)\times$$

$$\times\ (b_2 - b_0))\cos^{-1}\alpha = \left[\cos^2\alpha\,(a_1 - a_0)^2 + K\sin\alpha\times\right.$$

$$\times\left(\frac{(a_1 - a_0)^3 (b_1 - b_0)}{\alpha+1} + \frac{(a_1 - a_0)^2 (b_1 - b_0)^2}{2\alpha+1}\right) + \frac{1}{\alpha+1}\left(\cos^2\alpha\times\right.$$

$$\times\,(a_1 - a_0)(b_1 - b_0) + K\sin\alpha\left(\frac{(a_1 - a_0)^2 (b_1 - b_0)^2}{\alpha+1} + \right.$$

$$\left.\left. + \frac{(a_1 - a_0)(b_1 - b_0)^3}{2\alpha+1}\right)\right) + \frac{1}{\alpha+1}\left(\cos^2\alpha\,(a_1 - a_0)(b_1 - b_0) - \right.$$

$$\left. - K\sin\alpha\left((a_1 - a_0)^3 (b_1 - b_0) + \frac{(a_1 - a_0)^2 (b_1 - b_0)^2}{\alpha+1}\right)\right) +$$

$$+ \frac{1}{2\alpha+1}\left(\cos^2\alpha\,(b_1 - b_0)^2 - K\sin\alpha\left((a_1 - a_0)^2 (b_1 - b_0)^2 + \right.\right.$$

$$\left.\left.\left. + \frac{(a_1 - a_0)(b_1 - b_0)^3}{\alpha+1}\right)\right)\right]\cos^{-3}\alpha = \left[\cos^2\alpha\left((a_1 - a_0)^2 + \right.\right.$$

$$\left. + \frac{2(a_1 - a_0)(b_1 - b_0)}{\alpha+1} + \frac{(b_1 - b_0)^2}{2\alpha+1}\right) + K\sin\alpha\left(\frac{(a_1 - a_0)^3 (b_1 - b_0)}{\alpha+1} + \right.$$

$$+ \frac{(a_1 - a_0)^2 (b_1 - b_0)^2}{2\alpha+1} + \frac{(a_1 - a_0)^2 (b_1 - b_0)^2}{(\alpha+1)^2} + \frac{(a_1 - a_0)(b_1 - b_0)^3}{(\alpha+1)(2\alpha+1)} -$$

$$- \frac{(a_1 - a_0)^3 (b_1 - b_0)}{\alpha+1} - \frac{(a_1 - a_0)^2 (b_1 - b_0)^2}{(\alpha+1)^2} -$$

$$\left.\left. - \frac{(a_1 - a_0)^2 (b_1 - b_0)^2}{2\alpha+1} - \frac{(a_1 - a_0)(b_1 - b_0)^3}{(\alpha+1)(2\alpha+1)}\right)\right]\cos^{-3}\alpha =$$

$$= \left((a_1 - a_0)^2 + \frac{2(a_1 - a_0)(b_1 - b_0)}{\alpha + 1} + \frac{(b_1 - b_0)^2}{2\alpha + 1} \right) \cos^{-1}\alpha = \cos\alpha.$$

Отже, від будь-якої півпрямої у даній площині можна відкласти кут з заданою градусною мірою, меншою 90°.

Якщо величина кута $\alpha = 90^\circ$, то досить записати рівняння прямої, ортогональної до елемента $p_1(x) - p_0(x)$. Воно буде мати вигляд $Aa + Bb = 0$. Записати рівняння $Aa + Bb + C = 0$ і знайти C таке, щоб точка $p_0(x)$ належала прямій з рівнянням $Aa + Bb + C = 0$.

Якщо ж величина кута α більша 90°, то слід спочатку відкласти кут величини 90°, а після цього кут величини $\alpha - 90^\circ$. Отже, від будь-якої півпрямої у даній півплощині можна відкласти кут з даною градусною мірою, меншою 180°, і тільки один ($\mathtt{IУ}_2$).

Під трикутником будемо розуміти множину точок

$$\begin{aligned}
&\{p(x)\,|p(x) = (1-\lambda)\,p_1(x) + \lambda p_2(x)\,,\;\; 0 \le \lambda \le 1\} \cup \\
&\cup \{p(x)\,|p(x) = (1-\lambda)\,p_2(x) + \lambda p_3(x)\,,\;\; 0 \le \lambda \le 1\} \cup \\
&\cup \{p(x)\,|p(x) = (1-\lambda)\,p_3(x) + \lambda p_1(x)\,,\;\; 0 \le \lambda \le 1\}\,,
\end{aligned}$$

де $p_1(x)$, $p_2(x)$, $p_3(x)$ – три точки, які не лежать на одній прямій. Трикутники будемо вважати рівними, якщо в них відповідні сторони і відповідні кути рівні.

Нехай маємо трикутник з вершинами $p_1(x) = a_1 + b_1 x^\alpha$, $p_2(x) = a_2 + b_2 x^\alpha$, $p_3(x) = a_3 + b_3 x^\alpha$ і нехай $d(p_1(x), p_2(x)) = d_3$, $d(p_2(x), p_3(x)) = d_1$, $d(p_1(x), p_3(x)) = d_2$, величини кутів $\angle p_2(x)\,p_1(x)\,p_3(x)$, $\angle p_1(x)\,p_2(x)\,p_3(x)$, $\angle p_2(x)\,p_3(x)\,p_1(x)$ відповідно рівні α, β, γ, причому $\alpha \le 90^\circ$. Візьмемо довільну пряму l з рівнянням $Aa + Bb + C = 0$ і півплощину, наприклад,

$\Pi_1 = \{p(x) = a + bx^\alpha | Aa + Bb + C > 0\}$

На прямій l візьмемо точку $\widetilde{p_1}(x) = \widetilde{a_1} + \widetilde{b_1} x^\alpha$ і на одному з променів відкладемо від точки $\widetilde{p_1}(x)$ точку $\widetilde{p_2}(x) = \widetilde{a_2} + \widetilde{b_2} x^\alpha$

таку, що на відрізку з кінцями $\widetilde{p_1}(x)$ і $\widetilde{p_2}(x)$ візьмемо точку $\widetilde{p_4}(x) = \widetilde{a_4} + \widetilde{b_4} x^\alpha$, яка ділить його у відношенні

$$\mu = \frac{d_2 \cos \alpha}{\sqrt{d_1^2 - d_2^2 \sin^2 \alpha}} = \frac{d\left(\widetilde{p_1}(x), \widetilde{p_4}(x)\right)}{d\left(\widetilde{p_4}(x), \widetilde{p_2}(x)\right)}.$$

Тоді рівняння прямої l, яка проходить через точку $\widetilde{p_4}(x)$ і перпендикулярна прямій l, має вигляд

$$(\widetilde{a_1} - \widetilde{a_4})(a - \widetilde{a_4}) + \frac{1}{\alpha+1}\left((\widetilde{a_1} - \widetilde{a_4})\left(b - \widetilde{b_4}\right) + (a - \widetilde{a_4})\left(\widetilde{b_1} - \widetilde{b_4}\right)\right) + \\ + \frac{1}{2\alpha+1}\left(\widetilde{b_1} - \widetilde{b_4}\right)\left(b - \widetilde{b_4}\right) = 0.$$

Рівняння прямої l_2, яка лежить в Π_1 і кожна точка якої знаходиться на відстані $K d_2 \sin \alpha = K d_1 \sin \beta$, де

$$K = \frac{(\alpha+1)\sqrt{2\alpha+1}}{\alpha} \cdot \sqrt{B^2 - \frac{2AB}{\alpha+1} + \frac{A^2}{2\alpha+1}},$$

має вигляд $Aa + Bb + C = K d_2 \sin \alpha$.

Знайдіть точку $\widetilde{b_3}$ перетину прямих l_1 та l_2 і переконайтесь, що $d\left(\widetilde{p_1}(x), \widetilde{p_3}(x)\right) = d_2$, $d\left(\widetilde{p_2}(x), \widetilde{p_3}(x)\right) = d_1$, величини кутів $\widetilde{p_2}(x)\,\widetilde{p_1}(x)\,\widetilde{p_3}(x)$, $\widetilde{p_1}(x)\,\widetilde{p_2}(x)\,\widetilde{p_3}(x)$, $\widetilde{p_2}(x)\,\widetilde{p_3}(x)\,\widetilde{p_1}(x)$ відповідно рівні α, β, γ.

Таким чином можна переконатися, що який би не був трикутник, існує трикутник, що дорівнює йому у заданому розміщенні відносно даної півпрямої ($\mathtt{IY}_3$).

Наведіть приклад конкретного трикутника, знайдіть його сторони і кути.

Нарешті, якщо ми маємо пряму l, задану рівнянням $Aa + Bb + C = 0$, і точку $p_0(x) = a_0 + b_0 x^\alpha$, яка не лежить на цій прямій, причому наприклад, $Aa_0 + Bb_0 + C > 0$, то пряма l_1 є рівнянням

$$Aa + Bb + C = K d\left(p_0(x), l\right),$$

де

$$K = \frac{(\alpha+1)\sqrt{2\alpha+1}}{\alpha} \cdot \sqrt{B^2 - \frac{2AB}{\alpha+1} + \frac{A^2}{2\alpha+1}},$$

є прямою, паралельною прямій l, яка проходить через точку $p_0(x)$. Крім того, оскільки будь-яка пряма, паралельна прямій l, має рівняння $Aa + Bb + D = 0$, де $C \neq D$, то в очевидний спосіб переконуємося, що через точку $p_0(x)$ проходить одна пряма, паралельна прямій l.

Таким чином переконуємося, що через точку, що не лежить на даній прямій, можна провести на площині не більш як одну пряму, паралельну даній (У).

Тепер уже можна зробити загальний висновок про те, що з геометричної точки зору множина $\mathcal{P}_{2,\alpha}$ є евклідовою площиною, бо в $\mathcal{P}_{2,\alpha}$ виконуються всі аксіоми О. В. Погорєлова.

Завдання для самостійного опрацювання.

5.1. Два кути в просторі $\mathcal{P}_{2,\alpha}$ будемо називати суміжними, якщо в них одна сторона спільна, а інші сторони цих кутів є доповняльними півпрямими. Довести, що сума суміжних кутів дорівнює 180°.

5.2. Два кути в просторі $\mathcal{P}_{2,\alpha}$ будемо називати вертикальними, якщо сторони одного кута є доповняльними півпрямими сторін другого кута. Довести, що вертикальні кути рівні.

5.3. Нехай маємо трикутник з вершинами $p_1(x) = a_1 + b_1x^\alpha$, $p_2(x) = a_2 + b_2x^\alpha$, $p_3(x) = a_3 + b_3x^\alpha$. Скласти рівняння прямих, на яких лежать:

а) висота, опущена з вершини трикутника;

б) бісектриса кута трикутника;

в) медіана трикутника, проведена з даної вершини.

5.4. Переконатись безпосередньо, що сума кутів трикутника дорівнює 180°. Чим відрізняється таке доведення від доведення цього факту в шкільному курсі геометрії?

5.5. Назвемо колом з центром в точці $p_0(x)$ і радіусом R

множину точок $\{p(x) \,|d(p_0(x), p(x)) = R\}$. Дослідіть, де знаходиться:

а) центр кола, описаного навколо трикутника;

б) центр вписаного в трикутник кола (звичайно, означивши спочатку ці терміни). Якщо вершинами трикутника є точки $p_1(x)$, $p_2(x)$, $p_3(x)$, то яка точка буде центром

а) кола, описаного навколо трикутника;

б) кола, вписаного в трикутник?

5.6. Скориставшись означенням еліпса, гіперболи, параболи, дати означення відповідних множин точок в просторі $\mathcal{P}_{2,\alpha}$, вивести рівняння "еліпса "гіперболи "параболи"в просторі $\mathcal{P}_{2,\alpha}$.

§6. Декартові координати на площині.

У попередніх параграфах за базис в просторі $\mathcal{P}_{2,\alpha}$ було обрано точки 1 та x^α. Показано, що з геометричної точки зору $\mathcal{P}_{2,\alpha}$ має структуру евклідової площини, теорія якої будується на основі базису $\left(\vec{l_1}, \vec{l_2}\right)$, де $\vec{l_1}$ та $\vec{l_2}$ – вектори з довжинами відповідно 1, $\dfrac{1}{\sqrt{2\alpha+1}}$ та кутом між ними

$$\varphi = \arccos \frac{\sqrt{2\alpha+1}}{\alpha+1}, \quad \text{де} \quad \alpha > 0.$$

Проте в рамках даної структури ні при якому значенні α не можна дістати евклідову геометрію, побудовану в декартовій прямокутній системі координат. Дійсно, із зміною α від 0 до $+\infty$ кут φ змінюється від 0 до 90°. Разом з тим $|\vec{e}_2|$ змінюється від 1 до 0, тобто на $+\infty$ базис вироджується в пару $\vec{e}_1$ і нуль-вектор. Зрозуміло, що така пара не може бути базисом.

Щоб поправити справу, застосуємо стандартний прийом, а саме, нормуємо базис, тобто за базис в просторі $\mathcal{P}_{2,\alpha}$ візьмемо точки $e_1(x) = 1$ та $e_2(x) = \sqrt{2\alpha+1} \cdot x^\alpha$,

$$\left(\|e_1(x)\| = \|e_2(x)\| = 1, \quad \varphi = \arccos\frac{\sqrt{2\alpha+1}}{\alpha+1}\right).$$

У такому базисі кожен елемент $p(x)$ та $\mathcal{P}_{2,\alpha}$ можна подати у вигляді

$$p(x) = ae_1(x) + be_2(x) = a + \sqrt{2\alpha+1}bx^{\alpha},$$

а, отже,

$$\|p(x)\| = \sqrt{a^2 + \frac{2\sqrt{2\alpha+1}}{\alpha+1}ab + b^2} = \sqrt{a^2 + 2\cos\varphi ab + b^2} \qquad (6.1)$$

і для $\forall p_1(x) = a_1e_1(x) + b_1e_2(x),\ p_2(x) = a_2e_1(x) + b_2e_2(x) \in \mathcal{P}_{2,\alpha}$:

$$d(p_1(x), p_2(x)) = d\left(a_1 + \sqrt{2\alpha+1}b_1x^{\alpha}, \quad a_2 + \sqrt{2\alpha+1}b_2x^{\alpha}\right) =$$
$$= \sqrt{(a_1-a_2)^2 + \frac{2\sqrt{2\alpha+1}}{\alpha+1}\cdot(a_1-a_2)(b_1-b_2) + (b_1-b_2)^2} =$$
$$= \sqrt{(a_1-a_2)^2 + 2\cos\varphi(a_1-a_2)(b_1-b_2) + (b_1-b_2)^2} \qquad (6.2)$$

(зокрема $d(e_1(x), e_2(x)) = \sqrt{2-2\cos\varphi} = 2\sin\frac{\varphi}{2}$).

$$(p_1(x), p_2(x)) = \left(a_1 + \sqrt{2\alpha+1}b_1x^{\alpha}, \quad a_2 + \sqrt{2\alpha+1}b_2x^{\alpha}\right) =$$
$$= a_1a_2 + \frac{\sqrt{2\alpha+1}}{\alpha+1}(a_1b_2 + a_2b_1) + b_1b_2 =$$
$$= a_1a_2 + \cos\varphi(a_1b_2 + a_2b_1) + b_1b_2. \qquad (6.3)$$

Тепер уже очевидно, що при $\alpha \to +\infty$ граничним для простору $\mathcal{P}_{2,\alpha}$ буде евклідовий простір $\mathcal{P}_{2,\infty}$ з ортонормованим базисом.

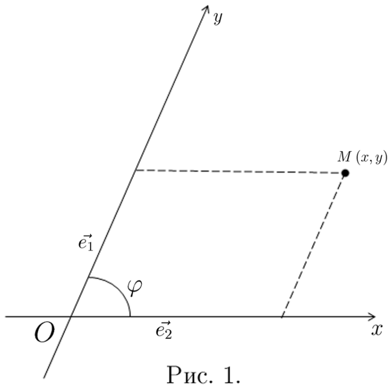

Рис. 1.

Аналізуючи формули (6.1), (6.2), (6.3), можна зробити висновок, що функціональний простір свою продуктивну роль виконав. Як результат ми дістали можливість будувати евклідову геометрію площини з допомогою декартової системи координат.

Візьмемо на площині точку O і базис $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, де $\vec{e}_1$ і $\vec{e}_2$ – одиничні вектори з кутом $\varphi \left(0 < \varphi < 180°\right)$, тобто задамо на площині систему координат $O\vec{e}_1\vec{e}_2$ (рис.1). Координати x і y радіус-вектора $\vec{OM}$ в базисі $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ є координатами точки M в системі координат $O\vec{e}_1\vec{e}_2$. У цій системі координат $O\vec{e}_1\vec{e}_2$

$$d\left(O, M\right) = |\overrightarrow{OM}| = \sqrt{x^2 + 2\cos\varphi xy + y^2}, \tag{6.4}$$

$$\begin{gathered}d\left(M_1, M_2\right) = |\overrightarrow{M_1M_2}| = |\left(x_2 - x_1\right)\vec{e}_1 + \left(y_2 - y_1\right)\vec{e}_2| = \\ = \sqrt{\left(x_2 - x_1\right)^2 + 2\cos\varphi\left(x_2 - x_1\right)\left(y_2 - y_1\right) + \left(y_2 - y_1\right)^2},\end{gathered} \tag{6.5}$$

$$\begin{gathered}\left(\overrightarrow{OM_1}, \overrightarrow{OM_2}\right) = \left(x_1\vec{e}_1 + y_1\vec{e}_2,\ x_2\vec{e}_1 + y_2\vec{e}_2\right) = \\ = x_1x_2 + \cos\varphi\left(x_1y_2 + x_2y_1\right) + y_1y_2,\end{gathered} \tag{6.6}$$

$$\cos\left(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}\right) = \frac{\left(\vec{a}, \vec{b}\right)}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}. \tag{6.7}$$

Загальне рівняння прямої має вигляд

$$Aa + Bb + C = 0, \quad \text{де} \;\; A^2 + B^2 \neq 0, \tag{6.8}$$

вектор $\vec{l} = -B\vec{e}_1 + A\vec{e}_2$ – напрямний вектор цієї прямої. Рівняння прямої, яка проходить через дві точки $M_1(x_1, y_1)$ і $M_2(x_2, y_2)$, записується у вигляді

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}, \quad \text{коли} \;\; x_1 \neq x_2, \; y_1 \neq y_2, \tag{6.9}$$

$$y = y_1, \quad \text{коли} \;\; y_1 = y_2,$$

$$x = x_1, \quad \text{коли} \;\; x_1 = x_2.$$

Прямі, задані рівнянням $A_1x + B_1y + C_1 = 0$, $A_2x + B_2y + C_2 = 0$, збігаються, коли існує $\lambda \in \mathbb{R}$, що $A_2 = \lambda A_1$, $B_2 = \lambda B_1$, $C_2 = \lambda C_1$, паралельні, коли існує $\lambda \in \mathbb{R}$, що $A_2 = \lambda A_1$, $B_2 = \lambda B_1$, $C_2 \neq \lambda C_1$, перетинаються, що $\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \neq 0$.

Нехай маємо пряму l, задану рівняннями $Ax + By + C = 0$ і точку$M_0(x_0, y_0)$. Знайдемо відстань від точки M_0 до прямої l. Якщо $B \neq 0$, то точка $M\left(x; -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}\right)$ належить прямій l.

Тоді

$$d^2(M_0, M) = (x - x_0)^2 + 2\cos\varphi\,(x - x_0)\left(-\frac{A}{B}x - \frac{C}{B} - y_0\right) +$$
$$+ \left(-\frac{A}{B}x - \frac{C}{B} - y_0\right)^2 = \left(1 - 2\frac{A}{B}\cdot\cos\varphi + \frac{A^2}{B^2}\right)x^2 -$$
$$- 2\left(x_0 + \cos\varphi\left(\frac{C}{B} + y_0\right) - \cos\varphi\frac{A}{B}x_0 - \frac{A}{B}\left(\frac{C}{B} + y_0\right)\right)x +$$
$$+ x_0^2 + 2\cos\varphi\, x_0\left(\frac{C}{B} + y_0\right) + \left(\frac{C}{B} + y_0\right)^2.$$

$$\min_{M\in l} d^2(M_0,M) = \left[-\left(x_0+\cos\varphi\left(\frac{C}{B}+y_0\right)-\cos\varphi\frac{A}{B}x_0 -\right.\right.$$

$$\left.\left.-\ \frac{A}{B}\left(\frac{C}{B}+y_0\right)\right)^2+\left(1-2\frac{A}{B}\cos\varphi+\frac{A^2}{B^2}\right)\times\right.$$

$$\left.\times\left(x_0^2+2\cos\varphi x_0\left(\frac{C}{B}+y_0\right)+\left(\frac{C}{B}+y_0\right)^2\right)\right]\times$$

$$\times\left(1-2\frac{A}{B}\cos\varphi+\frac{A^2}{B^2}\right)^{-1} = \frac{\sin^2\varphi\left(\frac{A}{B}x_0+y_0+\frac{C}{B}\right)^2}{1-2\cos\varphi\frac{A}{B}+\frac{A^2}{B^2}}.$$

Отже

$$d(M_0,l) = \frac{\sin\varphi|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{B^2-2\cos\varphi AB+A^2}} = \frac{\sin\varphi\cdot|Ax_0+By_0+C|}{|\vec{l}|}, \tag{6.10}$$

де $\vec{l}$ – напрямний вектор прямої l.

Якщо прямі l_1 і l_2, задані рівнянням $A_1x+B_1y+C_1=0$ і $A_2x+B_2y+C_2=0$ перетинаються, то кут між такими прямими можна визначити з формули

$$\cos\left(\widehat{\vec{l}_1,\vec{l}_2}\right) = \frac{\left(\vec{l}_1,\vec{l}_2\right)}{|\vec{l}_1|\cdot|\vec{l}_2|} =$$

$$= \frac{B_1B_2-\cos\varphi(B_1A_2+B_2A_1)+A_1A_2}{\sqrt{B_1^2-2\cos\varphi B_1A_1+A_1^2}\cdot\sqrt{B_2^2-2\cos\varphi B_2A_2+A_2^2}}. \tag{6.11}$$

Зокрема умова перпендикулярності прямих l_1 і l_2 записується у вигляді $B_1B_2-\cos\varphi(B_1A_2+B_2A_1)+A_1A_2=0$.

Завдання для самостійного опрацювання.

6.1. Нехай на площині обрана декартова система координат Oxy з кутом φ між осями координат. Знайти відстань між точками $M_1(x_1,y_1)$ та $M_2(x_2,y_2)$.

6.2. Нехай в лінійному просторі $\mathbb{R}^2$ задано числову функцію, яка кожній парі елементів $(x_1; y_1)$ та $(x_2; y_2)$ відносить число

$$x_1x_2 + \cos\varphi\,(x_1y_2 + x_2y_1) + y_1y_2.$$

Довести, що така функція задовольняє аксіоми скалярного добутку.

6.3. Нехай вершини трикутника ABC в декартовій системі координат $O\vec{e}_1\vec{e}_2 \quad (\vec{e}_1\widehat{,}\,\vec{e}_2) = \dfrac{\pi}{3}$ мають координати $A\,(a_1, a_2)$, $B\,(b_1, b_2)$, $C\,(c_1, c_2)$. Скласти рівняння прямих, на яких лежать відповідно медіана, висота, бісектриса, проведені з вершиниA. Знайти їх довжини.

6.4. Нехай маємо трикутник з сторонами a, b, c. Візьмемо за початок координат одну з вершин трикутника, а за осі координат прямої, на яких лежать ті дві сторони трикутника, для яких вибрана вершина спільна. Виразити через величини сторін довжини медіан, висот та бісектрис трикутника.

6.5. Побудувати фрагмент теорії кривих другого порядку в декартових координатах.

Зміст

ЛІТЕРАТУРА

1. Атанасян Л.С., Базалєв В.Т., Геометрія, ч.1 – М.:Просвещение, 1966. 336 с.

2. Канторович Л.В., Акимов Г.П. Функциональный анализ. –М.:Наука, 1977. 742 с.

3. Мальцев А.И. Основы линейной алгебры. – М.:Наука, 1970. 400 с.

4. Постников М.М. Аналитическая геометрия. – М.:Наука, 1979. 336 с.

5. Гусятников П.Б., Резниченко С.В. Векторная алгебра в примерах и задачах. – М.:Высшая школа, 1985. 232 с.

6. Донеддю А. Евклидова геометрия. – М.:Наука, 1978. 271с.

7. Крайзман М.Л.Розв'язування геометричних задач методом координат. – К.:Радянская школа, 1983. 126 с.

8. Крайзман М.Л.Розв'язування геометричних задач методом векторів. – К.:Радянская школа, 1980. 96 с.

9. Крутицкая Н.Ч. Шишкин А.А. Линейная алгебра в вопросах и задачах. – М.:Высшая школа, 1985. 120 с.

10. Кушнір І.А. Трикутник і тетраедр у задачах. – К.:Радянська школа, 1991. 204 с.

11. Погорєлов О.В. Геометрія 6-10. К.:Радянська школа, 1983. 270 с.

12. Скопец З.А. Геометрические миниатюры. М.:Просвещение, 1990. 222 с.